上卷目錄

原序

第一部分　理論基礎

下卷目錄

第二部分　特殊問題與應用

矩　陣　論

第一部分　理論基礎

第一章　矩陣及其運算

§1. 矩陣．主要的符號記法

1. 設給予某一數域 K❶。

定義 1. 域 K 中的數的長方陣列

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \right\| \tag{1}$$

稱爲矩陣。如果 $m=n$，那末稱之爲方陣，而相等的兩數 m 與 n 稱爲他的階。在一般的情形，矩陣稱爲 $m\times n$ 維長方矩陣。在矩陣中的那些數稱爲他的元素。

符號記法　元素的兩個足數記法是這樣的，他的第一個足數永遠指行的序數，而其第二個足數是指列的序數，這個元素就位於這組行列相交的地方。

同時我們亦用次之簡便記法來記矩陣(1)：

$$\|a_{ik}\| \quad (i=1, 2, \cdots, m; k=1, 2, \cdots, n)。 \tag{2}$$

---

❶ 數域是指數的任何一個集合，在他裏面常可施行四個運算：加法，減法，乘法與以不爲零的數來除的除法，而且所得出結果是唯一確定的。

可用所有有理數的集合，所有實數的集合或所有複數的集合作爲數域的例子。

我們假設以後所有遇到的數都是屬於事先所給予的數域裏面的。

有時亦用一個符號，例如矩陣 A，來記矩陣(1)。如果 A 是一個 n 級方陣，那末寫之爲：$A=\|a_{ik}\|_1^n$。方陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 的行列式將記爲：$|a_{ik}|_1^n$ 或 $|A|$。

引進由所予矩陣中元素所組成的行列式的一種簡便記法：

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_p \end{pmatrix}=\begin{vmatrix} a_{i_1k_1} & a_{i_1k_2} & \cdots & a_{i_1k_p} \\ a_{i_2k_1} & a_{i_2k_2} & \cdots & a_{i_2k_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_pk_1} & a_{i_pk_2} & \cdots & a_{i_pk_p} \end{vmatrix}。\quad (3)$$

行列式 (3) 稱爲矩陣 A 的 p 級子式，如果 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant m$，$1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_p\leqslant n$。

長方矩陣 $A=\|a_{ik}\|$ $(i=1, 2, \cdots, m;\ k=1, 2, \cdots, n)$ 有 $C_m^p\cdot C_n^p$ 個 p 級子式

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_p \end{pmatrix}\ \left(\begin{matrix}1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant m \\ 1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_p\leqslant n\end{matrix};\ p\leqslant m, n\right)。\quad (3')$$

當 $i_1=k_1, i_2=k_2, \cdots, i_p=k_p$ 時，稱子式(3′)爲主子式。

用(3)的記法，可將方陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 的行列式寫爲：

$$|A|=A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}。$$

矩陣中不爲零的諸子式的最大階，稱爲這個矩陣的秩。如果 r 是 $m\times n$ 維長方矩陣 A 的秩，那末顯然有 $r\leqslant m, n$。

由一個列所組成的長方矩陣

$$\left\|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix}\right\|,$$

稱爲單列(或列)矩陣且記之以：$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。

由一個行所組成的長方矩陣

$$\|z_1, z_2, \cdots, z_n\|,$$

稱爲單行(或行)矩陣且記之以:$[z_1, z_2, \cdots, z_n]$。

在主對角線以外的所有元素都等於零的方陣

$$\begin{Vmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{Vmatrix},$$

稱爲對角形方陣且記之以:$\|d_i\delta_{ik}\|_1^n$ ❶ 或

$$\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}。$$

設 m 個量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 經另外 n 個量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 齊次線性表出:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n, \end{array}\right\} \quad (4)$$

或簡寫爲:

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \quad (i = 1, 2, \cdots, m)。 \quad (4')$$

用(4)式來變諸值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 爲值 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 的變換稱爲線性變換。

這一個變換的係數構成一個 $m\times n$ 維的長方矩陣(1)。

已知的線性變換(4)唯一的確定矩陣(1),反之亦然。

在次節中,從線性變換(4)的性質來界說長方矩陣的基本運算。

§2. 長方矩陣的加法與乘法

我們來界說矩陣的基本運算:矩陣的加法,數與矩陣的乘法及矩陣間的乘法。

---

❶ 此處的 δ_{ik} 是克朗南格符號: $\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & (i=k), \\ 0 & (i\neq k)。\end{cases}$

1. 設諸量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 經量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 用線性變換

$$y_i=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \quad (i=1, 2, \cdots, m) \tag{5}$$

來表出，而量 $z_1, z_2, \cdots, z_m$ 經同一組量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 用線性變換

$$z_i=\sum_{k=1}^{n} b_{ik}x_k \quad (i=1, 2, \cdots, m) \tag{6}$$

來表出。則

$$y_i+z_i=\sum_{k=1}^{n} (a_{ik}+b_{ik})x_k \quad (i=1, 2, \cdots, m)。 \tag{7}$$

與之相對應的我們建立

定義 2. 兩個有相同維數 $m\times n$ 的矩陣 $A=\|a_{ik}\|$ 與 $B=\|b_{ik}\|$ 的和是指一個同維數的矩陣 $C=\|c_{ik}\|$，他的元素等於所予兩個矩陣的對應元素的和：

$$C=A+B,$$

如其 $\quad c_{ik}=a_{ik}+b_{ik} \quad (i=1, 2, \cdots, m; k=1, 2, \cdots, n)$。

得出兩個矩陣的和的運算稱爲矩陣的加法。

例

$$\left\|\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix}\right\|+\left\|\begin{matrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix} a_1+c_1 & a_2+c_2 & a_3+c_3 \\ b_1+d_1 & b_2+d_2 & b_3+d_3 \end{matrix}\right\|。$$

按照定義 2，祇有同維數的長方矩陣始能相加。

由這一定義知變換（7）的係數矩陣爲變換（5）與（6）的兩個係數矩陣的和。

由矩陣的加法定義直接推知，這一運算有**可易**與**可羣**的性質：

1° $\quad A+B=B+A$,

2° $\quad (A+B)+C=A+(B+C)$。

此處 A, B, C 是任何三個同維數的長方矩陣。

矩陣的加法運算很自然的可以推廣到任意多個矩陣相加的情形。

2. 在變換（5）中，將諸量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 乘以 K 中某一數 α。則

得:

$$\alpha y_i=\sum_{k=1}^{n}(\alpha a_{ik})x_k \quad (i=1, 2, \cdots, m)。$$

與之相對應的我們有:

定義 3. K 中數 α 對矩陣 $A=\|a_{ik}\|(i=1, 2, \cdots, m;\ k=1, 2, \cdots, n)$ 的乘積是指矩陣 $C=\|c_{ik}\|(i=1, 2, \cdots, m;\ k=1, 2, \cdots, n)$，他的元素都是矩陣 A 中的對應元素與數 α 的乘積:

$$C=\alpha A,$$

如其 $\quad c_{ik}=\alpha a_{ik} \quad (i=1, 2, \cdots, m;\ k=1, 2, \cdots, n)$。

得出數與矩陣的乘積的運算稱爲數與矩陣的乘法。

例

$$\alpha\left\|\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix} \alpha a_1 & \alpha a_2 & \alpha a_3 \\ \alpha b_1 & \alpha b_2 & \alpha b_3 \end{matrix}\right\|。$$

易知

1° $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$,

2° $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$,

3° $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$。

此處 A, B 爲同維數的長方矩陣，α, β 爲域 K 中的數。

兩個同維數長方矩陣的差 $A-B$ 是由等式

$$A-B=A+(-1)B$$

來定出的。

如果 A 是一個 n 級方陣而 α 爲 K 中的數，那末❶

$$|\alpha A|=\alpha^n|A|。$$

3. 設諸量 $z_1, z_2, \cdots, z_m$ 經量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 用線性變換

$$z_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}y_k \quad (i=1, 2, \cdots, m) \tag{8}$$

來表出，而量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 經量 $x_1, x_2, \cdots, x_q$ 用線性變換

❶ 這裏的符號 $|A|$ 與 $|\alpha A|$ 是各指矩陣 A 與 αA 的行列式(參考第一節)。

$$y_k=\sum_{j=1}^{q}b_{kj}x_j \quad (k=1, 2, \cdots, n) \tag{9}$$

來表出。則把 $y_k(k=1, 2, \cdots, n)$的這些表示式代入(8)式中，我們就可以把 $z_1, z_2, \cdots, z_m$ 經 $x_1, x_2, \cdots, x_q$ 用“結合的”變換

$$z_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\sum_{j=1}^{q}b_{kj}x_j=\sum_{j=1}^{q}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right)x_j \quad (i=1, 2, \cdots, m) \tag{10}$$

來表出。與之相對應的得出

定義 4．兩個長方矩陣

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}, \quad B=\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nq} \end{Vmatrix}$$

的乘積是指矩陣

$$C=\begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2q} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mq} \end{Vmatrix},$$

其中位於第 i 行與第 j 列相交地方的元素 c_{ij}，等於第一個矩陣 A 的第 i 行中元素與第二個矩陣 B 的第 j 列中元素的“乘積”❶：

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj} \quad (i=1, 2, \cdots, m;\ j=1, 2, \cdots, q)。 \tag{11}$$

得出兩個矩陣的乘積的運算稱爲矩陣的乘法。

例

$$\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 & f_2 \\ c_3 & d_3 & e_3 & f_3 \end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix} a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3 & a_1d_1+a_2d_2+a_3d_3 & a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3 & a_1f_1+a_2f_2+a_3f_3 \\ b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3 & b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3 & b_1e_1+b_2e_2+b_3e_3 & b_1f_1+b_2f_2+b_3f_3 \end{Vmatrix}。$$

❶ 對於兩組數序 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 與 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 的乘積，是指他們的對應數的乘積的和：$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$。

由定義 4 知變換 (10) 的係數矩陣,等於變換（8）的係數矩陣對變換（9）的係數矩陣的乘積。

我們注意,兩個長方矩陣的相乘,祇有在第一個因子的列數等於第二個因子的行數時,才可以施行。特別的,如果兩個因子都是同級的方陣,乘法常可施行。但是我們還要注意,卽使對於這一個特殊的情形,矩陣的乘法都不一定是可易的。例如,

$$\begin{Vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}2 & 0\\ 3 & -1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}8 & -2\\ 18 & -4\end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix}2 & 0\\ 3 & -1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}2 & 4\\ 0 & 2\end{Vmatrix}。$$

如果 $AB=BA$, 那末稱矩陣 A 與 B 是彼此可易的或可交換的。

例 矩陣

$$A=\begin{Vmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\end{Vmatrix} \quad 與 \quad B=\begin{Vmatrix}-3 & 2\\ -2 & -4\end{Vmatrix}$$

彼此可易,因為

$$AB=\begin{Vmatrix}-7 & -6\\ 6 & -4\end{Vmatrix},\quad BA=\begin{Vmatrix}-7 & -6\\ 6 & -4\end{Vmatrix}。$$

容易驗證,矩陣的乘法是可羣的,同時亦有結合乘法與加法的分配律存在。

1° $(AB)C=A(BC)$,

2° $(A+B)C=AC+BC$,

3° $A(B+C)=AB+AC$。

很自然的可以推廣矩陣的乘法運算到許多個矩陣相乘的情形。

如果利用長方矩陣的乘法,那末線性變換

$$\begin{aligned}y_1&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n,\\ y_2&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_m&=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\end{aligned}$$

可以寫爲一個矩陣的等式

$$\left\|\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix}\right\|,$$

或者簡寫爲:

$$y = Ax。$$

這裏 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y=(y_1, y_2, \cdots, y_m)$爲單列矩陣，而 $A=\|a_{ik}\|$爲一個 $m\times n$ 維長方矩陣。

還要提到一個特殊情形，就是在乘積 $C=AB$ 中，其第二個因子是一個對角形方陣 $B=\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$。那末從(11)式得出:

$$c_{ij}=a_{ij}d_j \quad (i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n),$$

亦卽

$$\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} a_{11}d_1 & a_{12}d_2 & \cdots & a_{1n}d_n \\ a_{21}d_1 & a_{22}d_2 & \cdots & a_{2n}d_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}d_1 & a_{m2}d_2 & \cdots & a_{mn}d_n \end{matrix}\right\|。$$

同樣的

$$\left\|\begin{matrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_m \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} d_1a_{11} & d_1a_{12} & \cdots & d_1a_{1n} \\ d_2a_{21} & d_2a_{22} & \cdots & d_2a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_ma_{m1} & d_ma_{m2} & \cdots & d_ma_{mn} \end{matrix}\right\|。$$

這樣一來，當右(左)乘長方矩陣 A 以對角形矩陣$\{d_1, d_2, \cdots\}$時，就是在矩陣 A 的所有的列(行)上順次的乘上數 $d_1, d_2, \cdots$

4. 設方陣 $C=\|c_{ij}\|_1^m$ 是各爲 $m\times n$ 與 $n\times m$ 維的兩個長方矩陣 $A=\|a_{ik}\|$與 $B=\|b_{kj}\|$的乘積:

$$\left\|\begin{matrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mm} \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & \cdots & b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{matrix}\right\|, \qquad (12)$$

亦卽

$$c_{ij}=\sum_{\alpha=1}^{n}a_{i\alpha}b_{\alpha j}\quad(i,\ j=1,\ 2,\cdots,\ m)。\tag{13}$$

我們來建立重要的別內-柯許公式，這個公式用矩陣 A 與 B 的子式來表出行列式 $|C|$：

$$\begin{vmatrix}c_{11}&\cdots&c_{1m}\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ c_{m1}&\cdots&c_{mm}\end{vmatrix}=\sum_{1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_m\leqslant n}\begin{vmatrix}a_{1k_1}&\cdots&a_{1k_m}\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ a_{mk_1}&\cdots&a_{mk_m}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}b_{k_11}&\cdots&b_{k_1m}\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ b_{k_m1}&\cdots&b_{k_mm}\end{vmatrix}\tag{14}$$

或寫爲簡便的記法(參考第一節)：

$$C\begin{pmatrix}1&2\cdots m\\1&2\cdots m\end{pmatrix}=\sum_{1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_m\leqslant n}A\begin{pmatrix}1&2\cdots m\\k_1k_2&\cdots k_m\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}k_1k_2\cdots k_m\\1&2\cdots m\end{pmatrix}。\tag{14'}$$ [1]

按照這一個公式，矩陣 C 的行列式，等於矩陣 A 中所有可能的最大級(m 級) [2] 子式與矩陣 B 中對應的同級子式的乘積的和。

別內-柯許公式的推得。從公式(13)，知矩陣 C 的行列式可以寫爲次之形狀：

$$\begin{vmatrix}c_{11}&\cdots&c_{1m}\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ c_{m1}&\cdots&c_{mm}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\sum\limits_{\alpha_1=1}^{n}a_{1\alpha_1}b_{\alpha_11}&\cdots&\sum\limits_{\alpha_m=1}^{n}a_{1\alpha_m}b_{\alpha_mm}\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ \sum\limits_{\alpha_1=1}^{n}a_{m\alpha_1}b_{\alpha_11}&\cdots&\sum\limits_{\alpha_m=1}^{n}a_{m\alpha_m}b_{\alpha_mm}\end{vmatrix}=$$

$$=\sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_m=1}^{n}\begin{vmatrix}a_{1\alpha_1}b_{\alpha_11}&\cdots&a_{1\alpha_m}b_{\alpha_mm}\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ a_{m\alpha_1}b_{\alpha_11}&\cdots&a_{m\alpha_m}b_{\alpha_mm}\end{vmatrix}=$$

$$=\sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_m=1}^{n}A\begin{pmatrix}1&2\cdots m\\ \alpha_1&\alpha_2\cdots\alpha_m\end{pmatrix}b_{\alpha_11}b_{\alpha_22}\cdots b_{\alpha_mm}。\tag{15}$$

如果 $m>n$，那末在數 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m$ 中間，總可找到兩個相等的

[1] 如果 $m>n$，那末矩陣 A 與 B 不能有 m 級子式。在此時公式(14)與(14')的右端都要換爲零。

[2] 參考上面的足註。

數。故等式(15)的右節的每一項都等於零。這就是說，此時$|C|=0$。

現在假設$m\leqslant n$。那末位於等式(15)右節的和中，祇要在足數α_1，α_2，…，α_m裏面有兩個或兩個以上的數彼此相等時，那一個項就等於零。這個和裏面所有其餘的項可以分爲各含$m!$個項的許多類，每一類都是合併那些足數組α_1，α_2，…，α_m彼此僅有次序不同的項所得出的（每一類中各項的足數α_1，α_2，…，α_m按照他的全部數值來說，都是相同的）。那末在一個類裏面所有諸項的和將等於❶

$$\sum\varepsilon(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)A\begin{pmatrix}1&2\cdots m\\k_1&k_2\cdots k_m\end{pmatrix}b_{\alpha_1 1}b_{\alpha_2 2}\cdots b_{\alpha_m m}=$$

$$=A\begin{pmatrix}1&2\cdots m\\k_1&k_2\cdots k_m\end{pmatrix}\sum\varepsilon(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)b_{\alpha_1 1}b_{\alpha_2 2}\cdots b_{\alpha_m m}=$$

$$=A\begin{pmatrix}1&2\cdots m\\k_1&k_2\cdots k_m\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}k_1&k_2\cdots k_m\\1&2\cdots m\end{pmatrix}。$$

因此從(15)得出(14′)。

例1.

$$\begin{Vmatrix}a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_nc_n & a_1d_1+a_2d_2+\cdots+a_nd_n\\ b_1c_1+b_2c_2+\cdots+b_nc_n & b_1d_1+b_2d_2+\cdots+b_nd_n\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}a_1\,a_2\cdots a_n\\ b_1\,b_2\cdots b_n\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}c_1&d_1\\c_2&d_2\\ \vdots&\vdots\\ c_n&d_n\end{Vmatrix}。$$

故公式(14)給予所謂**柯許恆等式**

$$\begin{vmatrix}a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_nc_n & a_1d_1+a_2d_2+\cdots+a_nd_n\\ b_1c_1+b_2c_2+\cdots+b_nc_n & b_1d_1+b_2d_2+\cdots+b_nd_n\end{vmatrix}=\sum_{1\leqslant i<k\leqslant n}\begin{vmatrix}a_i&a_k\\b_i&b_k\end{vmatrix}\begin{vmatrix}c_i&d_i\\c_k&d_k\end{vmatrix}。\quad(16)$$

在這一個等式中取$a_i=c_i$，$b_i=d_i(i=1,2,\cdots,n)$，我們得出：

$$\begin{vmatrix}a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 & a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n\\ a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n & b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\end{vmatrix}=\sum_{1\leqslant i<k\leqslant n}\begin{vmatrix}a_i&a_k\\b_i&b_k\end{vmatrix}^2。$$

故在a_i與$b_i(i=1,2,\cdots,n)$都是實數的情形，得出著名的不等式

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)。\quad(17)$$

---

❶ 此處$k_1<k_2<\cdots<k_m$是足數$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的標準位置，而$\varepsilon(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=(-1)^N$，其中$N$爲變排列$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$爲標準位置$k_1<k_2<\cdots<k_m$所必需的對換的個數。

當且僅當所有的數 a_i 都同其對應數 $b_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 成比例時，這個式子才能取等號。

例 2.

$$\begin{vmatrix} a_1c_1+b_1d_1 & \cdots & a_1c_n+b_1d_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nc_1+b_nd_1 & \cdots & a_nc_n+b_nd_n \end{vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} c_1 & \cdots & c_n \\ d_1 & \cdots & d_n \end{Vmatrix}。$$

故當 $n>2$ 時，

$$\begin{vmatrix} a_1c_1+b_1d_1 & \cdots & a_1c_n+b_1d_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nc_1+b_nd_1 & \cdots & a_nc_n+b_nd_n \end{vmatrix} =0。$$

討論一個特殊的情形，就是 A, B 同為 n 級方陣且在 (14′) 中設 $m=n$。那末就得到熟悉的行列式的乘法：

$$C\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix} B\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix},$$

或者用另一種記法：

$$|C| = |AB| = |A|\cdot|B|。\qquad (18)$$

這樣一來，兩個方陣的乘積的行列式，等於這兩個方陣的行列式的乘積。

5. 别內-柯許公式給予了這樣的可能性，在一般的情形，可以把兩個長方矩陣的乘積的子式經其因子的子式來表出。設

$$A=\|a_{ik}\|,\ B=\|b_{kj}\|,\ C=\|c_{ij}\|$$

$$(i=1, 2, \cdots, m;\ k=1, 2, \cdots, n;\ j=1, 2, \cdots, q)$$

且有

$$C=AB。$$

討論矩陣 C 的任何一個子式：

$$C\begin{pmatrix}i_1 & i_2 \cdots i_p \\ j_1 & j_2 \cdots j_p\end{pmatrix} \left(1 \begin{matrix} \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant m \\ \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_p \leqslant q \end{matrix};\ p \leqslant m, q\right)。$$

用這個子式的元素所組成的矩陣可以表為次二長方矩陣的乘積

$$\left\|\begin{matrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} \cdots a_{i_1 n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{i_p 1} & a_{i_p 2} \cdots a_{i_p n} \end{matrix}\right\|, \quad \left\|\begin{matrix} b_{1j_1} \cdots b_{1j_p} \\ b_{2j_1} \cdots b_{2j_p} \\ \cdots\cdots \\ b_{nj_1} \cdots b_{nj_p} \end{matrix}\right\|。$$

因此,應用別內-柯許公式,我們得出:

$$C\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \cdots i_p \\ j_1 & j_2 \cdots j_p \end{pmatrix} = \sum_{1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_p \leqslant n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \cdots i_p \\ k_1 & k_2 \cdots k_p \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \cdots k_p \\ j_1 & j_2 \cdots j_p \end{pmatrix}。 \tag{19}$$ [❶]

當 $p=1$ 時,公式(19)變爲公式(11)。當 $p>1$ 時,公式(19)是公式(11)的自然推廣。

還要注意公式(19)的一個推論。

兩個長方矩陣的乘積的秩不能超過其任一因子的秩。

如果 $C=AB$ 而且矩陣 A, B, C 的秩各爲 r_A, r_B, r_C,那末

$$r_C \leqslant r_A, \ r_B。$$

§3. 方陣

1. 一個 n 級方陣,位於其主對角線上的元素全爲 1,而所有其餘元素均爲零者,稱爲么矩陣且記之以 $E^{(n)}$ 或簡單的記爲 E。"么矩陣"這一名稱是與矩陣 E 的次之性質相結合的:對於任一長方矩陣

$$A=\|a_{ik}\| \quad (i=1, 2, \cdots, m; \ k=1, 2, \cdots, n)$$

都有等式

$$E^{(m)}A = AE^{(n)} = A。$$

顯然,

$$E^{(n)} = \|\delta_{ik}\|_1^n。$$

設 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 爲一方陣。則以平常的方式來界說矩陣的冪:

$$A^p = \underbrace{AA\cdots A}_{p\text{個}} \quad (p=1, 2, \cdots); \quad A^0 = E。$$

由矩陣乘法的可聚性得出:

$$A^pA^q = A^{p+q}。 \tag{20}$$

❶ 由別內-柯許公式,知矩陣 C 的 p 級子式,當 $p>n$ 時(如果有這種級數的子式存在),常等於零。在此時,公式(19)的右端須換爲零。參考本節 4 的第一個足註。

此處 p, q 是任意的非負整數。

討論係數在域 K 中的多項式(整有理函數):

$$f(t)=\alpha_0 t^m+\alpha_1 t^{m-1}+\cdots+\alpha_m。$$

我們將 $f(A)$ 了解為矩陣

$$f(A)=\alpha_0 A^m+\alpha_1 A^{m-1}+\cdots+\alpha_m E。$$

這就界說了矩陣的多項式。

設多項式 $f(t)$ 等於多項式 $h(t)$ 與 $g(t)$ 的乘積:

$$f(t)=h(t)g(t)。\tag{21}$$

多項式 $f(t)$ 是由 $h(t)$ 與 $g(t)$ 中的項逐項相乘且合併同類項後所得出的。此時所用的是指數定律: $t^p t^q=t^{p+q}$。因為所有這些運算,在換純量 t 為矩陣 A 時,都是合法的,故由(21)得出:

$$f(A)=h(A)g(A)。$$

因此,特別的有

$$h(A)g(A)=g(A)h(A)\,❶,\tag{22}$$

是即,同一矩陣的兩個多項式是彼此可易的。

例

約定在長方矩陣 $A=\|a_{ik}\|$ 中的第 p 個上對角線(下對角線)是指元素列 a_{ik},其中 $k-i=p$ (對應的 $i-k=p$)。以 $H^{(n)}$ 記一個 n 級方陣,其中第一個上對角線的元素都等於 1,而所有其餘元素都等於零。矩陣 $H^{(n)}$ 亦將簡記為 H。那末

$$H=H^{(n)}=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{Vmatrix},\quad H^2=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \end{Vmatrix}\ \text{諸如此類;}$$

$$H^p=0\quad (p\geqslant n)。$$

如果　$f(t)=a_0+a_1 t+a_2 t^2+\cdots+a_{n-1}t^{n-1}+\cdots$

---

❶ 因為 $g(t)h(t)=f(t)$,故在這些乘積中,每一個都等於同一的 $f(A)$。但須注意,在多個變數的代數恆等式中不許用矩陣來代換。不過,如所代入的矩陣都是兩兩可易的時候,這種代換是允許的。

爲 1 的多項式，那末由上面這些等式得出：

$$f(H)=a_0E+a_1H+a_2H^2+\cdots=\begin{Vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_2 \\ \vdots & & & \ddots & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{Vmatrix}。$$

同樣的，如果 F 是一個 n 級方陣，其中第一個下對角線的元素都等於 1，而其餘的元素都等於零，那末

$$f(F)=a_0E+a_1F+a_2F^2+\cdots=\begin{Vmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \end{Vmatrix}。$$

讓讀者自己去驗證矩陣 H 與 F 的次諸性質：

1° 在左乘任一 $m\times n$ 維長方矩陣 A 以 m 級矩陣 H（矩陣 F）所得出的結果中，矩陣 A 中所有的行都上昇（下降）了一位，矩陣 A 的最先（最後）一行不再出現，而結果中最後（最先）一行中都是零元素。例如，

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{Vmatrix}。$$

2° 在右乘任一 $m\times n$ 維長方矩陣 A 以 n 級矩陣 H（矩陣 F）所得出的結果中，矩陣 A 中所有的列都右（左）移了一位，矩陣 A 的最後（最先）一列不再出現，而結果中最先（最後）一列中都是零元素。例如，

$$\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ c_2 & c_3 & c_4 & 0 \end{Vmatrix}。$$

2. 方陣 A 稱爲降秩的，如果 $|A|=0$。在相反的情形，稱方陣 A 爲

滿秩的。

設 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 爲一個滿秩方陣($|A|\neq0$)。討論以 A 爲其係數矩陣的線性變換

$$y_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k \quad (i=1,2,\cdots,n)。 \tag{23}$$

視等式(23)爲關於 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的方程組，且注意由已予條件方程組(23)的行列式不爲零，我們可以用已知的公式把 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 經 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 來表出：

$$x_i=\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1,i-1} & y_1 & a_{1,i+1}\cdots a_{1n} \\ a_{21}\cdots a_{2,i-1} & y_2 & a_{2,i+1}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots a_{n,i-1} & y_n & a_{n,i+1}\cdots a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^{(-1)}y_k$$

$$(i=1,2,\cdots,n)。 \tag{24}$$

我們得出了(23)的逆變換。我們稱這一變換的係數矩陣

$$A^{-1}=\|a_{ik}^{(-1)}\|_1^n$$

爲矩陣 A 的逆矩陣。由(24)易知

$$a_{ik}^{(-1)}=\frac{A_{ki}}{|A|} \quad (i,k=1,2,\cdots,n), \tag{25}$$

其中 A_{ki} 爲行列式 $|A|$ 中元素 a_{ki} 的代數餘子式(餘因子)($i, k=1, 2, \cdots, n$)。

例如，如果

$$A=\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{Vmatrix} \quad 而且 \quad |A|\neq0,$$

那末

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{Vmatrix} b_2c_3-b_3c_2 & a_3c_2-a_2c_3 & a_2b_3-a_3b_2 \\ b_3c_1-b_1c_3 & a_1c_3-a_3c_1 & a_3b_1-a_1b_3 \\ b_1c_2-b_2c_1 & a_2c_1-a_1c_2 & a_1b_2-a_2b_1 \end{Vmatrix}。$$

從已予變換(23)與其逆變換(24)照某一次序或其相反的次序繼續施行，所得出的變換都是恆同變換(其係數矩陣爲么矩陣)；故有

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E。 \tag{26}$$

直接把矩陣 A 與 A^{-1} 來相乘，亦可以驗證等式(26)。事實上，由(25)❶

$$[AA^{-1}]_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{kj}^{(-1)}=\frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\delta_{ij}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)。$$

同理

$$[A^{-1}A]_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^{(-1)}a_{kj}=\frac{1}{|A|}\sum_{k=1}^{n}A_{ki}a_{kj}=\delta_{ij}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)。$$

不難看出，矩陣方程

$$AX=E \quad 與 \quad XA=E \quad (|A|\neq 0) \tag{27}$$

除解 $X=A^{-1}$ 外，沒有別的解。事實上，左乘第一個方程的兩節以 A^{-1}，右乘第二個方程的兩節以 A^{-1} 且用矩陣乘法的可羣性質與等式(26)，我們在這兩種情形都得出❷：

$$X=A^{-1}。$$

同樣的方法可以證明，每一個矩陣方程

$$AX=B,\quad XA=B \quad (|A|\neq 0), \tag{28}$$

其中 X 與 B 是同維數的長方矩陣，A 爲有對應級數的方陣，有一個且僅有一個解：

各爲 $$X=A^{-1}B \quad 與 \quad X=BA^{-1}。 \tag{29}$$

矩陣(29)各爲以矩陣 A"除"矩陣 B 的"左"與"右"商。由(28)與(29)對應的得出(參考§2的末尾)$r_B\leqslant r_X$ 與 $r_X\leqslant r_B$，亦即 $r_X=r_B$。比較(28)我們有：

在左或右乘一個長方矩陣以滿秩方陣時，不變原矩陣的秩。

還須注意，由(26)推知 $|A||A^{-1}|=1$，亦即

❶ 此處我們用及已知的行列式的性質。按照他的性質，任一列的元素與其代數餘子式的乘積之和等於行列式的值，而任一列的元素與其他一列的對應元素的代數餘子式的乘積之和等於零。

❷ 如果 A 是一個降秩矩陣，那末方程(27)就沒有解。事實上，如果在這些方程中任何一個有解 $X=\|x_{ik}\|_1^n$，那末由關於行列式相乘的定理[參考公式(18)]，$|A||X|=|E|=1$，這當 $|A|=0$ 時是不可能的。

$$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}。$$

對於兩個滿秩矩陣的乘積有：

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}。\tag{30}$$

3. 所有 n 級矩陣構成一個有么元素 E 的環❶。因爲在這一個環中界說了域 K 中的數與矩陣的乘法，而且有由 n^2 個線性無關矩陣所構成的基底存在，使所有的 n 級矩陣都可以經他們線性表出❷，所以 n 級矩陣環是一個代數❸。

所有的 n 級方陣對於加法運算構成一個可易羣❹。所有的滿秩 n 級矩陣對於乘法構成一個(不可易)羣。

方陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 稱爲高三角形的(低三角形的)，如果在這一個矩陣中所有位於主對角線的下方(主對角線的上方)的元素都等於零：

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix},\quad A=\begin{Vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{Vmatrix}。$$

(1)　　　　(2)

❶ 環是元素的一個集合，在他裏面確定有常可唯一施行的兩個運算：兩個元素的"加法"(適合可易律與可羣律)與兩個元素的"乘法"(適合可羣律與結合加法的分配律)，而且對加法有逆運算存在。參考，例如[17](方括號[ ]中的數字係指書末"參考文獻"中參考書的編號，以下同此。) 6, 19 與 115 頁(柯召譯本的第 7, 19, 與 109 頁)或[34]的第 333 頁。

❷ 事實上，元素在 K 中的任一矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 都可以表爲 $A=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}E_{ik}$ 的形狀，其中 E_{ik} 是一個 n 級矩陣，祇有在第 i 行與第 k 列相交的地方有元素 1 而所有其餘的元素都是 0。

❸ 參考，例如，[17]，116 頁(柯召譯本的第 111 頁)。

❹ 羣是某些元素的一個集合，在他裏面建立了一個運算，對於集合中任二元素 a 與 b 都在這一集合中唯一的確定第三個元素 $a*b$，而且(1)這個運算是可羣的 $[(a*b)*c=a*(b*c)]$，(2)在集合中有一個么元素 e 存在 $(a*e=e*a=a)$，(3)對集合中任一元素 a 都有逆元素 a^{-1} 存在 $(a*a^{-1}=a^{-1}*a=e)$。他的運算適合可易律者稱爲可易羣或阿柏爾羣。關於羣的概念可參考，例如，[17]，見下册(柯召譯本的第 351 頁與以後諸頁)。

對角形矩陣是高或低三角形矩陣的特例。

因爲三角形矩陣的行列式等於其對角線上諸元素的乘積，所以三角形(特別是對角形)矩陣是滿秩的充分必要條件爲其對角線上元素都不等於零。

容易驗證，任何兩個對角形(高三角形，低三角形)矩陣的和是一個對角形(高三角形，低三角形)矩陣，而且對於滿秩對角形(高三角形，低三角形)矩陣的逆矩陣仍然是同一類型的矩陣。所以

1° 所有 n 級對角形矩陣，所有 n 級高三角形矩陣，所有 n 級低三角形矩陣關於加法運算構成三個可易羣。

2° 所有滿秩對角形矩陣關於乘法運算構成一個可易羣。

3° 所有滿秩高(低)三角形矩陣關於乘法運算構成羣(不可易的)。

4° 在結束本節時，我們指出對於矩陣的一個重要運算——矩陣的轉置。

如果 $A=\|a_{ik}\|$ $(i=1, 2,\cdots, m;\ k=1, 2,\cdots, n)$，那末轉置矩陣 A' 爲等式 $A'=\|a'_{ki}\|$ 所確定，其中 $a'_{ki}=a_{ik}(i=1, 2,\cdots,m;\ k=1, 2,\cdots, n)$。如果矩陣 A 的維數爲 $m\times n$，那末矩陣 A' 的維數爲 $n\times m$。

容易驗證次諸性質❶：

1° $(A+B)'=A'+B'$,

2° $(\alpha A)'=\alpha A'$,

3° $(AB)'=B'A'$,

4° $(A^{-1})'=(A')^{-1}$。

如果方陣 $S=\|s_{ij}\|_1^n$ 同他自己的轉置矩陣重合 $(S'=S)$，那末稱這樣的矩陣爲對稱的。在對稱矩陣中，位於對主對角線相對稱的位置上的元素彼此相等。注意，兩個對稱矩陣的乘積，一般的說，不一定是對稱的。由 3°，知其乘積仍爲對稱矩陣的充分必要條件是所給予的兩個

❶ 在公式 1°，2°，3° 中，A，B 爲其對應運算可以施行的任何長方矩陣。在公式 4° 中，A 爲任何一個滿秩方陣。

對稱矩陣因子是彼此可易的。

如果方陣 $K=\|k_{ij}\|_1^n$ 同他的轉置矩陣祇差一個因子 -1 ($K'=-K$)，那末稱這樣的矩陣為反對稱的。在反對稱矩陣中，位於對主對角線相對稱的位置上的元素，彼此之間祇有一個因子 -1 的差別，而主對角上面的所有元素都等於零。由 3°，知兩個彼此可易的反對稱矩陣的乘積是一個對稱矩陣❶。

§4. 締結矩陣．逆矩陣的子式

1．設給予矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$。討論矩陣 A 的所有可能的 $p(1\leqslant p\leqslant n)$ 級子式：

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_p \end{pmatrix} \quad \left(1\leqslant \begin{matrix} i_1<i_2<\cdots<i_p \\ k_1<k_2<\cdots<k_p \end{matrix} \leqslant n\right)。 \tag{31}$$

這些子式的個數等於 N^2，其中 $N=C_n^p$ 為從 n 個東西中取出 p 個東西的組合數。為了把(31)諸子式佈置成一個方的陣列，我們要予所有從 n 個足數 $1, 2, \cdots, n$ 中所取出的 p 個數的組合以確定的(例如，字彙排列的)次序記數法。

如果對於這一個記數法，足數的組合 $i_1<i_2<\cdots<i_p$ 與 $k_1<k_2<\cdots<k_p$ 有序數 α 與 β，那末子式(31)將記為

$$a_{\alpha\beta}=A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_p \end{pmatrix}。$$

給予 α 與 β 以彼此無關的所有從 1 到 N 的值，我們就得到矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 的所有的 p 級子式。

N 級方陣

$$\mathfrak{A}_p=\|a_{\alpha\beta}\|_1^N$$

稱為矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 的 p 層締結矩陣；p 可取數值 $1, 2, \cdots, n$。此處

---

❶ 關於表方陣 A 為兩個對稱矩陣的乘積($A=S_1S_2$)或為兩個反對稱矩陣的乘積($A=K_1K_2$)的問題，可參考[147]。

$\mathfrak{A}_1=A$，而矩陣 $\mathfrak{A}_n$ 是由一個元素所組成的，等於 $|A|$。

註 足數的組合的記數次序要首先給他確定下來，同矩陣 A 的選擇無關。

例 設

$$A=\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{matrix}\right\|。$$

把從四個足數 1, 2, 3, 4 中取出兩個的組合的記數，排列成次之次序：

(1 2) (1 3) (1 4) (2 3) (2 4) (3 4)。

那末

$$\mathfrak{A}_2=\left\|\begin{matrix}
A\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} \\
A\begin{pmatrix}1&3\\1&2\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}1&3\\1&3\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}1&3\\1&4\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}1&3\\2&3\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}1&3\\3&4\end{pmatrix} \\
A\begin{pmatrix}1&4\\1&2\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}1&4\\1&3\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}1&4\\1&4\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}1&4\\2&3\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}1&4\\2&4\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}1&4\\3&4\end{pmatrix} \\
A\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}2&3\\1&3\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}2&3\\1&4\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}2&3\\2&3\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}2&3\\2&4\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}2&3\\3&4\end{pmatrix} \\
A\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}2&4\\1&3\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}2&4\\1&4\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}2&4\\2&3\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}2&4\\2&4\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}2&4\\3&4\end{pmatrix} \\
A\begin{pmatrix}3&4\\1&2\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}3&4\\1&3\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}3&4\\1&4\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}3&4\\2&3\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}3&4\\2&4\end{pmatrix} & A\begin{pmatrix}3&4\\3&4\end{pmatrix}
\end{matrix}\right\|。$$

我們來提出締結矩陣的某些性質：

1° 由 $C=AB$ 可得：$\mathfrak{C}_p=\mathfrak{A}_p\mathfrak{B}_p\ (p=1,\ 2, \cdots,\ n)$。

事實上，用公式(19)把矩陣乘積 C 的 $p\ (1\leqslant p\leqslant n)$ 級子式經矩陣因子的同級子式來表出，我們有：

$$C\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_p\\ k_1 & k_2 & \cdots & k_p\end{pmatrix}=\sum_{1\leqslant l_1<l_2<\cdots<l_p\leqslant n} A\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_p\\ l_1 & l_2 & \cdots & l_p\end{pmatrix} B\begin{pmatrix}l_1 & l_2 & \cdots & l_p\\ k_1 & k_2 & \cdots & k_p\end{pmatrix}$$

$$\left(1\leqslant \begin{matrix} i_1<i_2<\cdots<i_p \\ k_1<k_2<\cdots<k_p\end{matrix}\leqslant n\right)。\qquad (32)$$

顯然，用這一節的記法，等式(32)可以寫爲：

$$\mathfrak{c}_{\alpha\beta}=\sum_{\lambda=1}^{N}\mathfrak{a}_{\alpha\lambda}\mathfrak{b}_{\lambda\beta}\quad (\alpha,\ \beta=1,\ 2, \cdots,\ N)$$

(此處 α, β, λ 各爲足數組合 $i_1<i_2<\cdots<i_p$; $k_1<k_2<\cdots<k_p$; $l_1<l_2<\cdots<l_p$ 的記數)。故得

$$\mathfrak{C}_p=\mathfrak{A}_p\mathfrak{B}_p \quad (p=1, 2, \cdots, n)。$$

2° 由 $B=A^{-1}$ 可得: $\mathfrak{B}_p=\mathfrak{A}_p^{-1}(p=1, 2, \cdots, n)$。

這一個論斷可以直接從上一結果推得，如果我們取 $C=E$ 且注意此時 $\mathfrak{C}_p$ 爲一個 $N=C_n^p$ 級的么矩陣。

從論斷 2° 可以推得把逆矩陣的子式經原予矩陣的子式來表出的一個重要公式。

如果 $B=A^{-1}$，那末對於任何 $\left(1\leqslant\begin{matrix}i_1<i_2<\cdots<i_p\\k_1<k_2<\cdots<k_p\end{matrix}\leqslant n\right)$,

$$B\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_p\\ k_1 & k_2 & \cdots & k_p\end{pmatrix}=\frac{(-1)^{\sum\limits_{\nu=1}^{p} i_\nu+\sum\limits_{\nu=1}^{p} k_\nu} A\begin{pmatrix}k'_1 & k'_2\cdots k'_{n-p}\\ i'_1 & i'_2\cdots i'_{n-p}\end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix}1 & 2\cdots n\\ 1 & 2\cdots n\end{pmatrix}}, \tag{33}$$

其中 $i_1<i_2<\cdots<i_p$ 連同 $i'_1<i'_2<\cdots<i'_{n-p}$, $k_1<k_2<\cdots<k_p$ 連同 $k'_1<<k'_2<\cdots<k'_{n-p}$ 都構成完全足數組 $1, 2, \cdots, n$。

事實上，由 $AB=E$ 可得:

$$\mathfrak{A}_p\mathfrak{B}_p=\mathfrak{C}_p$$

或者較詳細的寫爲:

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \mathfrak{a}_{\gamma\alpha}\mathfrak{b}_{\alpha\beta}=\delta_{\gamma\beta}=\begin{cases}1 & (\gamma=\beta),\\ 0 & (\gamma\neq\beta)。\end{cases} \tag{34}$$

等式(34)還可以寫爲:

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n} A\begin{pmatrix}j_1 & j_2\cdots j_p\\ i_1 & i_2\cdots i_p\end{pmatrix} B\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_p\\ k_1 & k_2 & \cdots & k_p\end{pmatrix}=\begin{cases}1, \text{如果} \sum\limits_{\nu=1}^{p}(j_\nu-k_\nu)^2=0,\\ 0, \text{如果} \sum\limits_{\nu=1}^{p}(j_\nu-k_\nu)^2>0\end{cases}$$

$$\left(1\leqslant\begin{matrix}j_1<j_2<\cdots<j_p\\k_1<k_2<\cdots<k_p\end{matrix}\leqslant n\right)。 \tag{34'}$$

另一方面，應用已知的行列式 $|A|$ 的拉潑拉斯展開式，我們得出:

$$\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_p\le n} A\begin{pmatrix} j_1 & j_2\cdots j_p \\ i_1 & i_2\cdots i_p \end{pmatrix}\cdot(-1)^{\sum_{\nu=1}^{p} i_\nu+\sum_{\nu=1}^{p} k_\nu} A\begin{pmatrix} k'_1 & k'_2\cdots k'_{n-p} \\ i'_1 & i'_2\cdots i'_{n-p} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{cases} |A|, & \text{如果} \sum_{\nu=1}^{p}(j_\nu-k_\nu)^2=0, \\ 0, & \text{如果} \sum_{\nu=1}^{p}(j_\nu-k_\nu)^2>0, \end{cases} \tag{35}$$

其中 $i'_1<i'_2<\cdots<i'_{n-p}$ 連同 $i_1<i_2<\cdots<i_p$，$k'_1<k'_2<\cdots<k'_{n-p}$ 連同 $k_1<k_2<\cdots<k_p$ 都構成完全足數組 $1, 2, \cdots, n$。比較 (35) 同 (34′)，(34)證明了，等式(34)是適合的，如果不取 $B\begin{pmatrix} i_1 & i_2\cdots i_p \\ k_1 & k_2\cdots k_p \end{pmatrix}$ 爲 $b_{\alpha\beta}$，而取次之式子：

$$\frac{(-1)^{\sum_{\nu=1}^{p} i_\nu+\sum_{\nu=1}^{p} k_\nu} A\begin{pmatrix} k'_1 & k'_2\cdots k'_{n-p} \\ i'_1 & i'_2\cdots i'_{n-p} \end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix} 1 & 2\cdots n \\ 1 & 2\cdots n \end{pmatrix}}。$$

因爲在等式組(34)中，$\mathfrak{A}_p$ 的逆矩陣的元素 $b_{\alpha\beta}$ 是唯一確定的，所以我們有等式(33)。

第二章　高斯演段及其一些應用

§1. 高斯消去法

1. 設予含有 n 個未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, n 個方程的線方程組，且其右節爲 $y_1, y_2, \cdots, y_n$:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=y_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=y_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=y_n\text{。} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

這一方程組可以寫爲矩陣的形式:

$$Ax=y\text{。} \quad (1')$$

此處 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 都是單列矩陣，而 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 爲係數方陣。

如果 A 是一個滿秩矩陣，那末可以寫爲:

$$x=A^{-1}y \quad (2)$$

或者寫爲展開式:

$$x_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^{(-1)}y_k \quad (i=1, 2, \cdots, n)\text{。} \quad (2')$$

這樣一來，計算逆矩陣 $A^{-1}=\|a_{ik}^{(-1)}\|_1^n$ 的元素問題相當於對任何右節 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 來解方程組(1)的問題。逆矩陣的元素爲第一章的(25)式所確定。但當 n 很大時，用這一個公式來實際計算矩陣 A^{-1} 的元素是非常困難的。所以用有效的方法來計算逆矩陣的元素因而解出線性方程組是有其實際價値的❶。

在本章中我們將敍述這些方法的某一些方法的理論基礎，所說的方法是可以表爲高斯消去法的各種式樣的，關於這方面的知識，是讀者

---

❶ 對於這些方法的詳細知識，我們推薦法捷也娃的書[29]，還有載於"數學的成就"(俄文) 5 卷 3 期(1950)論文欄中的文章。

在中學的代數課程中所早已知道的。

2. 設在方程組(1)中 $a_{11}\neq 0$。從第二個方程開始,我們來消去以後的所有方程中的 x_1。爲了這一個目的,我們把第一個方程的 $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ 倍逐項加到第二個方程上去,把第一個方程的 $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ 倍逐項加到第三個方程上去,依此類推。此後方程(1)就換爲相抵方程組

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=y_1,\\ a_{22}^{(1)}x_2+\cdots+a_{2n}^{(1)}x_n&=y_2^{(1)},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\ a_{n2}^{(1)}x_2+\cdots+a_{nn}^{(1)}x_n&=y_n^{(1)} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

在後 $n-1$ 個方程中,未知量的係數與右節諸項爲次諸等式所確定:

$$a_{ij}^{(1)}=a_{ij}-\frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j},\ y_i^{(1)}=y_i-\frac{a_{i1}}{a_{11}}y_1\ (i,\ j=2,\ 3,\cdots,\ n)。\tag{3'}$$

設 $a_{22}^{(1)}\neq 0$。那末同樣的我們可在方程組(3)後 $n-2$ 個方程中消去 x_2,我們得出方程組

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots+a_{1n}x_n&=y_1,\\ a_{22}^{(1)}x_2+a_{23}^{(1)}x_3+\cdots+a_{2n}^{(1)}x_n&=y_2^{(1)},\\ a_{33}^{(2)}x_3+\cdots+a_{3n}^{(2)}x_n&=y_3^{(2)},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\ a_{n3}^{(2)}x_3+\cdots+a_{nn}^{(2)}x_n&=y_n^{(2)}。 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

此處的新係數與新的右節各項同上面一樣有等式關係:

$$a_{ij}^{(2)}=a_{ij}^{(1)}-\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}a_{2j}^{(1)},\ \ y_i^{(2)}=y_i^{(1)}-\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}y_2^{(1)}\ (i,\ j=3,\ 4,\cdots,\ n)。\tag{5}$$

繼續這個演段,我們在進行 $n-1$ 次之後,化組(1)爲一個三角形的回復組

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots+a_{1n}x_n&=y_1,\\ a_{22}^{(1)}x_2+a_{23}^{(1)}x_3+\cdots+a_{2n}^{(1)}x_n&=y_2^{(1)},\\ a_{33}^{(2)}x_3+\cdots+a_{3n}^{(2)}x_n&=y_3^{(2)},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\ a_{nn}^{(n-1)}x_n&=y_n^{(n-1)}。 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

這種演化可以施行的充分必要條件，是在演化過程中所有出現的數 a_{11}, $a_{22}^{(1)}$, $a_{33}^{(2)}$, $\cdots$, $a_{n-1,n-1}^{(n-2)}$ 都不等於零。

高斯演段的過程是由同一類型的運算來完成的，容易用近代的計算機來計算。

3．把演化出來的方程組的係數與其右節經原方程組(1)的係數與其右節來表出。此時我們並不預先假定，在演化過程中所有出現的數 a_{11}, $a_{22}^{(1)}$, $\cdots$, $a_{n-1,n-1}^{(n-2)}$ 都不是零，而來討論一般的情形，設其前 p 個數不爲零：

$$a_{11}\neq 0,\ a_{22}^{(1)}\neq 0,\ \cdots,\ a_{pp}^{(p-1)}\neq 0 \quad (p\leqslant n-1), \tag{7}$$

這就可以(經 p 次演化後)演化原方程組爲次之形狀

$$\left.\begin{array}{r}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=y_1,\\
a_{22}^{(1)}x_2+\cdots+a_{2n}^{(1)}x_n=y_2^{(1)},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{pp}^{(p-1)}x_p+\cdots+a_{pn}^{(p-1)}x_n=y_p^{(p-1)},\\
a_{p+1,p+1}^{(p)}x_{p+1}+\cdots+a_{p+1,n}^{(p)}x_n=y_{p+1}^{(p)},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{n,p+1}^{(p)}x_{p+1}+\cdots+a_{nn}^{(p)}x_n=y_n^{(p)}\text{。}
\end{array}\right\} \tag{8}$$

以 G_p 記這一個方程組的係數矩陣：

$$G_p=\left\|\begin{array}{llllll}
a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1p} & a_{1,p+1} & \cdots & a_{1n}\\
0 & a_{22}^{(1)}\cdots & a_{2p}^{(1)} & a_{2,p+1}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 \cdots & a_{pp}^{(p-1)} & a_{p,p+1}^{(p-1)} & \cdots & a_{pn}^{(p-1)}\\
0 & 0 \cdots & 0 & a_{p+1,p+1}^{(p)} & \cdots & a_{p+1,n}^{(p)}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 \cdots & 0 & a_{n,p+1}^{(p)} & \cdots & a_{nn}^{(p)}
\end{array}\right\|\text{。} \tag{9}$$

從矩陣 A 變到矩陣 G_p 是用次之方式來完成的：在矩陣 A 中，從第二行起到第 n 行止，順次對每一行加上他前面諸行（從最先 p 個）與某些數的乘積。因此，所有 h 級子式，包含在矩陣 A 與 G_p 的前 h 行裏面

$(h=1, 2, \cdots, n)$的，是完全相同的：

$$A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots h\\ k_1 & k_2 & \cdots k_h\end{pmatrix}=G_p\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots h\\ k_1 & k_2 & \cdots k_h\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_h\leqslant n\\ h=1, 2, \cdots, n\end{pmatrix}。\quad(10)$$

從這些式子，再看一下矩陣 G_p 的構造(9)，求得：

$$A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & p\\ 1 & 2 & \cdots & p\end{pmatrix}=a_{11}a_{22}^{(1)}\cdots a_{pp}^{(p-1)},\quad(11)$$

$$A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & p & i\\ 1 & 2 & \cdots & p & k\end{pmatrix}=a_{11}\,a_{22}^{(1)}\cdots a_{pp}^{(p-1)}\,a_{ik}^{(p)}\quad(i, k=p+1,\cdots, n)。\quad(12)$$

以前一等式除後一等式，得出基本公式❶

$$a_{ik}^{(p)}=\frac{A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & p & i\\ 1 & 2 & \cdots & p & k\end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & p\\ 1 & 2 & \cdots & p\end{pmatrix}}\quad(i, k=p+1,\cdots, n)。\quad(13)$$

如果條件(7)對於任一已予值 p 是適合的，那末這個條件對於任何一個小於 p 的值亦是適合的。因此公式(13)不僅對於所予的值 p 能成立，即對於所有比 p 小的值亦能成立。對於公式(11)亦有同樣的說法。故可換寫這些公式爲次諸等式

$$A\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=a_{11},\ A\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}=a_{11}\,a_{22}^{(1)},\ A\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}=a_{11}\,a_{22}^{(1)}\,a_{33}^{(2)},\cdots\quad(14)$$

這樣一來，條件(7)，亦即可以施行高斯演段的前 p 個步驟的充分必要條件，可以寫爲次諸不等式的形狀：

$$A\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\neq 0,\ A\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\neq 0,\cdots,\ A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & p\\ 1 & 2 & \cdots & p\end{pmatrix}\neq 0。\quad(15)$$

則由(14)得出：

$$a_{11}=A\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},\ a_{22}^{(1)}=\frac{A\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}},\ a_{33}^{(2)}=\frac{A\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}},\cdots,\ a_{pp}^{(p-1)}=\frac{A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & p\\ 1 & 2 & \cdots & p\end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & p-1\\ 1 & 2 & \cdots & p-1\end{pmatrix}}。$$

(16)

❶ 參考 [63]，101 頁。

爲了在高斯消去法演段中可以順次消去 $x_1, x_2, \cdots, x_p$，必須所有的值(16)都不等於零，亦即不等式(15)完全適合。同時對於 $a_{ik}^{(p)}$ 的公式是有意義的，如果在條件(15)中，祇要最後一個不等式能夠成立。

4. 設方程組(1)的係數矩陣有秩 r。那末可以調動方程的次序以及變更未知量的序數，使得次諸不等式全能適合：

$$A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & j\\ 1 & 2 & \cdots & j\end{pmatrix}\neq 0 \quad (j=1, 2, \cdots, r)。\tag{17}$$

這就使我們能夠順次消去 $x_1, x_2, \cdots, x_r$ 來得出方程組

$$\left.\begin{array}{r}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\quad=y_1,\\ a_{22}^{(1)}x_2+\cdots+a_{2n}^{(1)}x_n\quad=y_2^{(1)},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{rr}^{(r-1)}x_r+\cdots+a_{rn}^{(r-1)}x_n=y_r^{(r-1)},\\ a_{r+1,r+1}^{(r)}x_{r+1}+\cdots+a_{r+1,n}^{(r)}x_n=y_{r+1}^{(r)},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n,r+1}^{(r)}x_{r+1}+\cdots+a_{nn}^{(r)}x_n\quad=y_n^{(r)}。\end{array}\right\}\tag{18}$$

此處的係數爲(13)所確定。從這些式子，因爲矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 的秩等於 r，知有

$$a_{ik}^{(r)}=0 \quad (i, k=r+1, \cdots, n)。\tag{19}$$

所以(18)的後 $n-r$ 個方程化爲相容性條件

$$y_i^{(r)}=0 \quad (i=r+1, \cdots, n)。\tag{20}$$

注意在消去法演段中，獨立項的單列矩陣經過與任一係數列一樣的變換。所以在矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 中，添加獨立項的列爲其第 $n+1$ 個列，我們得出：

$$y_i^{(p)}=\frac{A\begin{pmatrix}1 & \cdots & p & i\\ 1 & \cdots & p & n+1\end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix}1 & \cdots & p\\ 1 & \cdots & p\end{pmatrix}} \quad (i=1, 2, \cdots, n;\ p=1, 2, \cdots, r)。\tag{21}$$

特別的，相容性條件(20)變爲熟悉的等式

$$A\begin{pmatrix}1 & \cdots & r & r+j \\ 1 & \cdots & r & n+1\end{pmatrix}=0 \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n-r)。 \tag{22}$$

如果 $r=n$，亦卽矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 是滿秩的，且有

$$A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & j \\ 1 & 2 & \cdots & j\end{pmatrix}\neq 0 \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

那末應用高斯消去法，可以順次消去 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1}$ 後，得出(6)形的方程組。

§2. 高斯演段的力學解釋

1. 討論任何彈性靜力系統 S，固定他的邊線(例如，弦線，軸，多跨距軸，膈膜，金屬板或不連續的系統)，且在他的上面取 n 個點 (1)，(2)，…，(n)。

在系統 S 的點 (1)，(2)，…，(n) 上受到作用於這些點的力 $F_1,\ F_2, \cdots, F_n$ 時，我們來研究這些點的位移(垂度) $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n$。我們假設這些力和位移都平行於同一的方向，因而它們就由他們的代數值來確定(圖 1)。

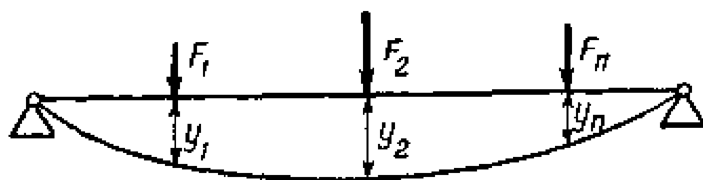


圖 1

此外，我們還假定力的線性疊置原則是適合的：

1° 兩組力的疊加時，其對應的垂度要相加。

2° 所有的力都乘以同一的實數時，所有的垂度都要乘上這一個相同的數。

以 a_{ik} 表點 (k) 在點 (i) 上的影響係數，亦卽在點 (k) 作用一個單位力時在點 (i) 所得出的垂度 $(i,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$(圖 2)。則對於力 $F_1,\ F_2,\ \cdots,\ F_n$ 的聯合作用，垂度 $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n$ 爲次諸公式所決定：

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}F_k=y_i \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)。 \tag{23}$$

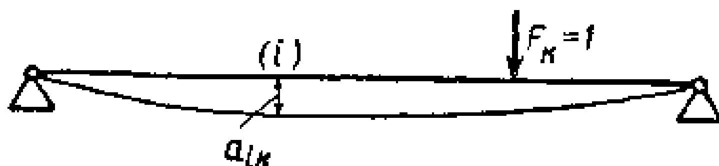


圖 2

比較(23)與以前的方程組(1),我們來找出方程組(1)的解這一個問題可作次之解釋:給予了垂度 $y_1, y_2, \cdots, y_n$。求出對應的力 $F_1, F_2, \cdots, F_n$。

以 S_p 記由 S 在點(1),(2),…,(p) ($p\leqslant n$)上加進 p 個固定的樞軸支承所得出的靜止系統。對於系統 S_p 的其餘諸活動點 ($p+1$),…,(n) 的影響係數記爲

$$a_{ik}^{(p)}\ (i, k=p+1, \cdots, n)$$

(對於 $p=1$ 時參考圖 3)。

圖 3

影響係數 $a_{ik}^{(p)}$ 可以視爲一個垂度,即在系統 S 上將單位力作用於點(k),而加反作用力 $R_1, R_2, \cdots, R_p$ 於固定點(1),(2),…,(p) 時,系統 S 上點(i)的垂度。因此

$$a_{ik}^{(p)}=R_1a_{i1}+\cdots+R_pa_{ip}+a_{ik}\text{。} \tag{24}$$

另一方面,對於這一組力,系統 S 在點(1),(2),…,(p) 的垂度等於零:

$$\left.\begin{array}{l} R_1a_{11}+\cdots+R_pa_{1p}+a_{1k}=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ R_1a_{p1}+\cdots+R_pa_{pp}+a_{pk}=0\text{。} \end{array}\right\} \tag{25}$$

如果

$$A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & p\\ 1 & 2 & \cdots & p\end{pmatrix}\neq 0,$$

那末我們可以從(25)定出 $R_1, R_2, \cdots, R_p$ 的表示式來代入(24)。可以這樣來消去 $R_1, R_2, \cdots, R_p$。在方程組(25)中加入等式(24),且將(24)寫爲次之形狀

$$R_1a_{i1}+\cdots+R_pa_{ip}+a_{ik}-a_{ik}^{(p)}=0\text{。} \tag{24'}$$

視(25)與(24')爲有 $p+1$ 個方程的齊次線方程組。因爲他有非零解 $R_1, R_2, \cdots, R_p, R_{p+1}=1$,故其行列式必須等於零:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} & a_{pk} \\ a_{i1} & \cdots & a_{ip} & a_{ik}-a_{ik}^{(p)} \end{vmatrix}=0\text{。}$$

因此

$$a_{ik}^{(p)}=\frac{A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & p & i\\ 1 & 2 & \cdots & p & k\end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & p\\ 1 & 2 & \cdots & p\end{pmatrix}}\quad (i, k=p+1, \cdots, n)\text{。} \tag{26}$$

用這些式子可以把"支承的"系統 S_p 的影響係數經原先的系統 S 的影響係數來表出。

但(26)式與上節的(13)式相同。故對任一個 $p(\leqslant n-1)$，高斯演段中的係數 $a_{ik}^{(p)}(i,k=$ $=p+1,\cdots,n)$ 就是支承系統 S_p 的影響係數。

我們可以不用代數的推出公式(13)，純粹從力學的推理來證明這一基本論斷的眞確性。對此，我們首先討論有一個支承的特殊情形：$p=1$（圖3）。此時系統 S_1 的影響係數爲次之諸式所確定[在(26)中設 $p=1$]：

$$a_{ik}^{(1)}=\frac{A\begin{pmatrix}1 & i\\ 1 & k\end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}}=a_{ik}-\frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1k}\quad (i,k=1,2,\cdots,n)。$$

這些式子與式(3′)相同。

這樣一來，如果在方程組(1°)中的係數 a_{ik} $(i,k=1,2,\cdots,n)$ 是靜止系統 S 的影響係數，那末高斯演段中的係數 $a_{ik}^{(1)}(i,k=2,\cdots,n)$ 就是系統 S_1 的影響係數。應用同樣的推理於系統 S_1，在他的點(2)加上第二個支承，我們就得出，方程組(4)中的係數 $a_{ik}^{(2)}(i,k=3,\cdots,n)$ 就是支承系統 S_2 的影響係數；一般的對於任何 $p(\leqslant n-1)$，高斯演段中的係數 $a_{ik}^{(p)}(i,k=$ $=p+1,\cdots,n)$ 就是支承系統 S_p 的影響係數。

顯然從力學的推理，順次加上 p 個支承相當於同時加上這些支承。

註 我們注意，對於消去法演段的力學的解釋，並沒有必要首先假定討論其垂度的諸點與作用力 $F_1,F_2,\cdots,F_n$ 的諸點彼此重合。可以取 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 爲點(1)，(2)，…，(n)的垂度，而力 $F_1,F_2,\cdots,F_n$ 作用於點(1′)，(2′)，…，(n′)上面。此時 a_{ik} 爲點(k′)在點(i)上的影響係數。對於這一個情形，我們代替在(j)的支承爲討論在點(j)，(j′)的廣義支承，就是說在(j′)點選取一個適當的輔助力 R_j 使得點(j)的垂度常等於零。可能在點(1)，(1′)；(2)，(2′)；…；(p)，(p′)加上 p 個廣義的支承，這一個可能性的條件就是說對於任何力 $F_{p+1},\cdots,F_n$，都有適當的力 $R_1=F_1,\cdots,R_p=F_p$ 使得 $y_1=0,y_2=0,\cdots,y_p=0$ 能夠適合的條件，可表爲不等式

$$A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & p\\ 1 & 2 & \cdots & p\end{pmatrix}\neq 0。$$

§3. 行列式的薛爾凡斯透恆等式

1. 在§1中應用比較矩陣 A 與 G_p 的方法我們得到等式(10)與(11)。

從這些等式可以直接推出重要的行列式的薛爾凡斯透恆等式。事實上，從(10)與(11)求得：

$$|A|=A\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\1&2&\cdots&n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1&2&\cdots&p\\1&2&\cdots&p\end{pmatrix}\begin{vmatrix}a_{p+1,p+1}^{(p)}\cdots a_{p+1,n}^{(p)}\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n,p+1}^{(p)}\quad\cdots a_{nn}^{(p)}\end{vmatrix}。\qquad(27)$$

引進子式 $A\begin{pmatrix}1&2&\cdots&p\\1&2&\cdots&p\end{pmatrix}$ 的加邊行列式:

$$b_{ik}=A\begin{pmatrix}1&2&\cdots&p&i\\1&2&\cdots&p&k\end{pmatrix}\quad(i,\ k=p+1,\ \cdots,\ n)。$$

把由這些行列式所組成的矩陣記爲:

$$B=\|b_{ik}\|_{p+1}^{n}。$$

則由(13)式知

$$\begin{vmatrix}a_{p+1,p+1}^{(p)}\cdots a_{p+1,n}^{(p)}\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{n,p+1}^{(p)}\quad\cdots a_{nn}^{(p)}\end{vmatrix}=\frac{\begin{vmatrix}b_{p+1,p+1}\cdots b_{p+1,n}\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\b_{n,p+1}\quad\cdots b_{nn}\end{vmatrix}}{\left[A\begin{pmatrix}1&2&\cdots&p\\1&2&\cdots&p\end{pmatrix}\right]^{n-p}}=\frac{|B|}{\left[A\begin{pmatrix}1&2&\cdots&p\\1&2&\cdots&p\end{pmatrix}\right]^{n-p}}。$$

所以等式(27)可以寫爲:

$$|B|=\left[A\begin{pmatrix}1&2&\cdots&p\\1&2&\cdots&p\end{pmatrix}\right]^{n-p-1}|A|。\qquad(28)$$

這就是行列式的薛爾凡斯透恆等式。他把由加邊行列式所組成的行列式 $|B|$ 經原行列式與被加邊的子式來表出。

等式(28)是建立於這樣的矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 上的,他的元素適合不等式

$$A\begin{pmatrix}1&2&\cdots&j\\1&2&\cdots&j\end{pmatrix}\neq0\quad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ p)。\qquad(29)$$

但從"連續性的推究"知道這一個限制可以除去,使得行列式的薛爾凡斯透恆等式對於任何矩陣都能成立。事實上,設不等式(29)不能適合。引進矩陣

$$A_\varepsilon=A+\varepsilon E。$$

顯然,$\lim\limits_{\varepsilon\to0}A_\varepsilon=A$。另一方面,子式

$$A_\varepsilon\begin{pmatrix}1 & 2\cdots j\\ 1 & 2\cdots j\end{pmatrix}=\varepsilon^j+\cdots\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$$

表示 p 個關於 ε 的不恆等於零的多項式。故可選取這樣的序列 $\varepsilon_m\to 0$，使得

$$A_{\varepsilon_m}\begin{pmatrix}1 & 2\cdots j\\ 1 & 2\cdots j\end{pmatrix}\neq 0\quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ p;\ m=1,\ 2,\ \cdots)。$$

對於矩陣 A_{ε_m} 我們可以寫出恆等式(28)。當 $m\to\infty$ 時，在這恆等式的兩節取極限，我們得出對於矩陣的極限 $A=\lim\limits_{m\to\infty}A_{\varepsilon_m}$ 的薛爾凡斯透恆等式❶。

如果我們應用恆等式(28)於行列式

$$A\begin{pmatrix}1 & 2\cdots p & i_1 & i_2\cdots i_q\\ 1 & 2\cdots p & k_1 & k_2\cdots k_q\end{pmatrix}\quad \left(p<\begin{matrix}i_1<i_2<\cdots<i_q\\ k_1<k_2<\cdots<k_q\end{matrix}\leqslant n\right),$$

那末我們就得出對於應用更方便的薛爾凡斯透恆等式的形狀：

$$B\begin{pmatrix}i_1 & i_2\cdots i_q\\ k_1 & k_2\cdots k_q\end{pmatrix}=\left[A\begin{pmatrix}1 & 2\cdots p\\ 1 & 2\cdots p\end{pmatrix}\right]^{q-1}A\begin{pmatrix}1 & 2\cdots p & i_1 & i_2\cdots i_q\\ 1 & 2\cdots p & k_1 & k_2\cdots k_q\end{pmatrix}。\quad (30)$$

§4. 方陣對三角形因子的分解式

1. 設予秩為 r 的矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$。對於這個矩陣的順序的主子式引入次之記法：

$$D_k=A\begin{pmatrix}1 & 2\cdots k\\ 1 & 2\cdots k\end{pmatrix}\quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)。$$

我們假設高斯演段的條件是適合的：

$$D_k\neq 0\quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ r)。$$

以 G 記由方程組

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k=y_i\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

❶ 矩陣序列 $B_m=\|b_{ik}^{(m)}\|_1^n$ (當 $m\to\infty$ 時) 的極限了解為矩陣 $B=\|b_{ik}\|_1^n$，其中 $b_{ik}=\lim\limits_{m\to\infty}b_{ik}^{(m)}(i,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$。

用高斯消去法所得出的方程組 (18) 的係數矩陣。矩陣 G 有高三角形的形狀，而且他的前 r 行的元素都為式(13)所確定，後 $n-r$ 行的元素全等於零❶：

$$G=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2r}^{(1)} & a_{2,r+1}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr}^{(r-1)} & a_{r,r+1}^{(r-1)} & \cdots & a_{rn}^{(r-1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{Vmatrix}。$$

化矩陣 A 到矩陣 G 是用次型的運算若干次（例如 N 次）後所完成的：把矩陣的第 j 行 ($j<i$) 與某一個數 α 的乘積加到第 i 行上去。這一個運算相當於左乘所要變換的矩陣以矩陣

$$\begin{matrix} & (j) & (i) & \\ \end{matrix}$$
$$\begin{Vmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & 1 & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & \alpha & & 1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{Vmatrix}。\qquad (31)$$

在這個矩陣中，位於主角線上的元素全為 1，其他元素除元素 α 外全等於零。

這樣一來，

$$G=W_N\cdots W_2W_1A,$$

其中每一個矩陣 W_1、W_2，…，W_N 都是 (31) 型的矩陣，所以是位於主對角線上的元素全等於 1 的低三角形矩陣。

設

$$W=W_N\cdots W_2W_1。\qquad (32)$$

❶ 參考(19)式。矩陣 G 與在 $p=r$ 時的矩陣 G_p [參考(8)，(9)二式]相同。

則有

$$G = WA。 \tag{33}$$

矩陣 W 稱爲在高斯消去法中對於矩陣 A 的演化（或變換）矩陣。矩陣 G 與 W 同時爲所給予的矩陣 A 所唯一確定。由 (32) 知 W 爲一個位於主對角線上的元素全等於 1 的低三角形矩陣。

因爲 W 是滿秩矩陣，所以由(33)得出：

$$A = W^{-1}G。 \tag{33'}$$

我們已經表矩陣 A 爲低三角形矩陣 W^{-1} 與高三角形矩陣 G 的乘積。關於分解矩陣 A 爲這種類型的問題爲次之定理所全部說明：

定理 1. 每一個秩爲 r 的矩陣 $A = \|a_{ik}\|_1^n$，其前 r 個順序的主子式都不爲零時，

$$D_k = A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k\\ 1 & 2 & \cdots & k\end{pmatrix} \neq 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, r), \tag{34}$$

可以表爲低三角形矩陣 B 對高三角形矩陣 C 的乘積的形狀：

$$A = BC = \begin{Vmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n}\\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & c_{nn}\end{Vmatrix}。 \tag{35}$$

此處

$$b_{11}c_{11} = D_1,\ b_{22}c_{22} = \frac{D_2}{D_1},\ \cdots,\ b_{rr}c_{rr} = \frac{D_r}{D_{r-1}}。 \tag{36}$$

矩陣 B 與 C 的前 r 個主對角線上的元素可以給予適合條件 (36) 的任何值。

矩陣 B 與 C 的前 r 個主對角線上的元素有這樣的功能，他們唯一的確定了矩陣 B 的前 r 列或矩陣 C 的前 r 行。對於這些元素有次諸等式：

$$b_{gk}=b_{kk}\frac{A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k-1 & g\\ 1 & 2 & \cdots & k-1 & k\end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k\\ 1 & 2 & \cdots & k\end{pmatrix}},\quad c_{kg}=c_{kk}\frac{A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k-1 & k\\ 1 & 2 & \cdots & k-1 & g\end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k\\ 1 & 2 & \cdots & k\end{pmatrix}} \tag{37}$$

$$(g=k,\ k+1,\ \cdots,\ n;\ \ k=1,\ 2,\ \cdots,\ r)。$$

對於 $r<n$ 的情形($|A|=0$),矩陣 B 的後 $n-r$ 列中諸元素可以全爲零,而對矩陣 C 的後 $n-r$ 行諸元素給予任何值,或者相反的,給矩陣 C 的後 $n-r$ 行全爲零而在矩陣 B 的後 $n-r$ 列中取任何元素。

證明　表適合條件(34)的矩陣爲乘積(35)的形狀的可能性已經在前面證明[參考(33′)]。

現在設 B 與 C 爲其乘積等於 A 的低三角形與高三角形矩陣。應用關於兩個矩陣的乘積的子式公式,求得:

$$A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k-1 & g\\ 1 & 2 & \cdots & k-1 & k\end{pmatrix}=\sum_{\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_k} B\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k-1 & g\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{k-1} & \alpha_k\end{pmatrix}C\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_k\\ 1 & 2 & \cdots & k\end{pmatrix} \tag{38}$$

$$(g=k,\ k+1,\ \cdots,\ n;\ \ k=1,\ 2,\ \cdots,\ r)。$$

因爲 C 是高三角形矩陣,所以矩陣 C 的前 k 列祇含有一個不爲零的 k 級子式 $C\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k\\ 1 & 2 & \cdots & k\end{pmatrix}$。因此等式(38)可以寫爲:

$$A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k-1 & g\\ 1 & 2 & \cdots & k-1 & k\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k-1 & g\\ 1 & 2 & \cdots & k-1 & k\end{pmatrix}C\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k\\ 1 & 2 & \cdots & k\end{pmatrix}=$$

$$=b_{11}b_{22}\cdots b_{k-1,k-1}b_{gk}c_{11}c_{22}\cdots c_{kk} \tag{39}$$

$$(g=k,\ k+1,\ \cdots,\ n;\ \ k=1,\ 2,\ \cdots,\ r)。$$

首先假設 $g=k$。那末就得出:

$$b_{11}b_{22}\cdots b_{kk}c_{11}c_{22}\cdots c_{kk}=D_k\quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ r), \tag{40}$$

這就已經推得關係式(36)。

對於等式(35)毫無妨礙的,我們可以右乘矩陣 B 以任一滿秩對角形矩陣 $M=\|\mu_i\delta_{ik}\|_1^n$,而同時左乘矩陣 C 以 $M^{-1}=\|\mu_i\delta_{ik}\|_1^n$。這相當於各乘矩陣 B 的諸列以 $\mu_1,\ \mu_2,\ \cdots,\ \mu_n$ 而各乘矩陣 C 的諸行以 $\mu_1^{-1},\ \mu_2^{-1},\ \cdots,\ \mu_n^{-1}$。所以對角線上的元素 $b_{11},\ \cdots,\ b_{rr},\ c_{11},\ \cdots,\ c_{rr}$ 可以給予適合條

件(36)的任何值。

再者，由(39)與(40)得出：

$$b_{gk}=b_{kk}\frac{A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k-1 & g\\ 1 & 2 & \cdots & k-1 & k\end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k\\ 1 & 2 & \cdots & k\end{pmatrix}}\quad (g=k,k+1,\cdots,n;\ k=1,2,\cdots,r),$$

是卽(37)的前一個式子。完全相類似的可以建立(37)式中關於矩陣 C 的元素的第二個式子。

注意在乘出矩陣 B 與 C 時，矩陣 B 的後 $n-r$ 列元素祇與矩陣 C 的後 $n-r$ 行的元素彼此相乘。我們已經看到，矩陣 C 的後 $n-r$ 行的元素可以全取為零❶。所以矩陣 B 的後 $n-r$ 列的元素可以取任何值。顯然，矩陣 B 與 C 的乘積並無變更，如果我們取矩陣 B 的後 $n-r$ 列中元素全為零，而對於矩陣 C 的後 $n-r$ 行中元素取任何值。

定理已經證明。

從已經證明的定理推得一些有趣的推論。

推論 1. 矩陣 B 中前 r 列元素與 C 中前 r 行元素連同矩陣 A 的元素有循環關係：

$$\left.\begin{aligned} b_{ik}&=\frac{a_{ik}-\sum_{j=1}^{k-1}b_{ij}c_{jk}}{c_{kk}}\quad (i\geqslant k;\ i=1,2,\cdots,n;\ k=1,2,\cdots,r),\\ c_{ik}&=\frac{a_{ik}-\sum_{j=1}^{i-1}b_{ij}c_{jk}}{b_{ii}}\quad (i\leqslant k;\ i=1,2,\cdots,r;\ k=1,2,\cdots,n)。\end{aligned}\right\}\quad (41)$$

關係式(41)可以直接從矩陣的等式(35)得出；可以適當的利用他們來實際計算矩陣 B 與 C 的元素。

推論 2. 如果矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 是一個適合條件(34)的滿秩矩陣 $(r=n)$，那末祇是在選取 B, C 的元素適合條件(36)以後，表示式(35)中的矩陣 B 與 C 是唯一確定的。

---

❶ 這可從表示式(33′)來得出。此處對角線上的元素 $b_{11},\cdots,b_{rr},c_{11},\cdots,c_{rr}$，已經證明祇要給予適當的因子 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_r$，可以取適合條件(36)的任何值。

推論 3. 如果 $S=\|s_{ik}\|_1^n$ 是一個 r 秩對稱矩陣而且

$$D_k=S\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k\\ 1 & 2 & \cdots & k\end{pmatrix}\neq 0 \quad (k=1,2,\cdots,r),$$

那末

$$S=BB',$$

其中 $B=\|b_{ik}\|_1^n$ 爲一低三角形矩陣而且

$$b_{gk}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{D_kD_{k-1}}}A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k-1 & g\\ 1 & 2 & \cdots & k-1 & k\end{pmatrix} & (g=k,k+1,\cdots,n;\ k=1,2,\cdots,r),\\ 0 & (g=k,k+1,\cdots,n;\ k=r+1,\cdots,n)。\end{cases} \tag{42}$$

2. 設在表示式(35)中，矩陣 C 的後 $n-r$ 個列全等於零。則可令：

$$B=F\cdot\begin{Vmatrix}b_{11} & & & & 0\\ & \ddots & & & \\ & & b_{rr} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & 0\end{Vmatrix}, \qquad C=\begin{Vmatrix}c_{11} & & & & 0\\ & \ddots & & & \\ & & c_{rr} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & 0\end{Vmatrix}\cdot L, \tag{43}$$

其中 F 爲低三角形矩陣，L 爲高三角形矩陣；而且矩陣 F 與 L 的前 r 個主對角線上元素都等於 1，矩陣 F 的後 $n-r$ 個列上與矩陣 L 的後 $n-r$ 個行上的元素可以任意選取。以表示式(43)中的 B, C 代入(35)且應用等式(36)，得到次之定理：

定理 2. 每一個秩爲 r 且有

$$D_k=A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k\\ 1 & 2 & \cdots & k\end{pmatrix}\neq 0 \quad (k=1,2,\cdots,r)$$

的矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$，都可以表成形爲低三角形矩陣 F，對角形矩陣 D 與高三角形矩陣 L 的乘積：

$$A=FDL=\begin{Vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ f_{21} & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & 1\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}D_1 & & & & & \\ & \frac{D_2}{D_1} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \frac{D_r}{D_{r-1}} & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}1 & l_{12} & \cdots & l_{1n}\\ 0 & 1 & \cdots & l_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{Vmatrix}, \tag{44}$$

其中

$$f_{gk}=\frac{A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k-1 & g\\ 1 & 2 & \cdots & k-1 & k\end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k\\ 1 & 2 & \cdots & k\end{pmatrix}},\quad l_{kg}=\frac{A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k-1 & k\\ 1 & 2 & \cdots & k-1 & g\end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & k\\ 1 & 2 & \cdots & k\end{pmatrix}} \tag{45}$$

$$(g=k+1,\ \cdots,\ n;\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ r),$$

而當 $g=k+1,\ \cdots,\ n;\ k=r+1,\ \cdots,\ n$ 時，f_{gk}，l_{kg} 爲任意的數。

3．應用高斯消去法到 $D_k\neq 0(k=1,2,\cdots,r)$ 的 r 秩矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$，給予我們兩個矩陣：主對角線上元素全等於 1 的低三角形矩陣 W 與前 r 個主對角線上元素爲 D_1，$\frac{D_2}{D_1}$，$\cdots$，$\frac{D_r}{D_{r-1}}$ 而後 $n-r$ 行的元素全爲零的高三角形矩陣 G。G 爲矩陣 A 的高斯型而 W 爲其演化矩陣。

爲了具體計算矩陣 W 的元素我們將給予次之方法。

如果對么矩陣 E 應用對於矩陣 A 所做的高斯演段中所有的變換（定出了矩陣 W_1，$\cdots$，W_N），我們就得出矩陣 W（此處換等於 G 的乘積 WA 以等於 W 的乘積 WE）。因此在矩陣 A 的右方加上一個么矩陣 E

$$\left\|\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 1\end{matrix}\right\|。\tag{46}$$

對這一個長方矩陣，應用所有高斯演段中的變換，我們得出一個由方陣 G 與 W 所組成的長方矩陣：

$$(G,\ W)。$$

這樣一來，對矩陣(46)應用高斯演段可同時得出矩陣 G 與矩陣 W。

如果 A 是一個滿秩矩陣，亦卽 $|A|\neq 0$，那末 $|G|\neq 0$。此時由(33′)得出 $A^{-1}=G^{-1}W$。因爲矩陣 G 與 W 爲高斯演段所完全確定，故求出逆矩陣 A^{-1} 的方法就化爲決定 G^{-1} 而後以 G^{-1} 來乘 W。

雖則在確定矩陣 G 以後，不難求出逆矩陣 G^{-1}，因爲 G 是一個三

角形矩陣。但是我們可以避免這一運算。為此，同矩陣 G 與 W 一樣，對於轉置矩陣 A' 引進類似的矩陣 G_1 與 W_1。則有 $A'=W_1^{-1}G_1$，亦即

$$A=G_1'W_1'^{-1}。\tag{47}$$

比較等式(33')與(44)：

$$A=W^{-1}G,\quad A=FDL。$$

這些等式可視為(35)型的兩種不同的分解式；此處我們視乘積 DL 為第二個因子 C。因為在第一個因子中對角線上前 r 個元素與 W^{-1} 中的對應元素相同（都等於1），所以他們的前 r 個列是完全相同的。故因矩陣 F 的後 $n-r$ 個列可以任意選取，就可以這樣來選取，使得

$$F=W^{-1}。\tag{48}$$

另一方面，比較等式(47)與(44)

$$A=G_1'W_1'^{-1},\quad A=FDL,$$

證明我們可以這樣來選取 L 中允許任意選取的元素，使得

$$L=W_1'^{-1}。\tag{49}$$

代(44)中的 F 與 L 以(48)與(49)中的表示式，我們得出：

$$A=W^{-1}DW_1'^{-1}。\tag{50}$$

比較這個等式與等式(33')及(47)，我們得到：

$$G=DW_1'^{-1},\quad G_1'=W^{-1}D。\tag{51}$$

引入對角形矩陣

$$\hat{D}=\left\{\frac{1}{D_1},\ \frac{D_1}{D_2},\ \cdots,\ \frac{D_{r-1}}{D_r},\ 0,\ \cdots,\ 0\right\}。\tag{52}$$

那末，因為

$$D=D\hat{D}D,$$

從(50)與(51)得出：

$$A=G_1'\hat{D}G。\tag{53}$$

(53) 證明了，矩陣 A 對於三角形因子的分解式，可以應用高斯演段到矩陣 A 與 A' 上來得出。

現在設 A 為一個滿秩矩陣 $(r=n)$。那末 $|D|\neq 0$，$\hat{D}=D^{-1}$。故由

(50)得出：

$$A^{-1}=W_1'\hat{D}W\text{。}\tag{54}$$

這個式子給予了應用高斯演段到長方矩陣

$$(A,\ E)\quad (A',\ E)$$

上來有效的計算逆矩陣 A^{-1} 的可能性。

在特殊的情形，取對稱矩陣 S 來替代矩陣 A，則矩陣 G_1 與 $\dot{G}$ 重合，而且矩陣 W_1 亦與矩陣 W 重合，因此(53)與(54)式取次之形狀：

$$S=G'\hat{D}G,\tag{55}$$

$$S^{-1}=W'\hat{D}W\text{。}\tag{56}$$

§5. 矩陣的分塊．分塊矩陣的運算方法．廣義高斯演段

常常要利用這樣的矩陣，把他裂分為長方部分——"子塊"或"塊"。在本節中我們從事於這種"分塊"矩陣的研究。

1．假設已予長方矩陣

$$A=\|a_{ik}\|\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\text{。}\tag{57}$$

利用水平的與垂直的直線我們把矩陣 A 分成許多長方形的塊：

$$A=\begin{pmatrix} \overbrace{A_{11}}^{n_1} & \overbrace{A_{12}}^{n_2} & \cdots & \overbrace{A_{1t}}^{n_t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}\begin{matrix} \}m_1 \\ \}m_2 \\ \vdots \\ \}m_s \end{matrix}\text{。}\tag{58}$$

關於矩陣(58)，是說把他分成 st 個 $m_\alpha\times n_\beta$ 維塊 $(\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ s;$ $\beta=1,\ 2,\ \cdots,\ t)$或者說把他表成分塊矩陣的形狀。(58)亦可縮寫為：

$$A=(A_{\alpha\beta})\quad (\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ s;\ \beta=1,\ 2,\ \cdots,\ t)\text{。}\tag{59}$$

在 $s=t$ 的情形，可以應用這樣的寫法：

$$A=(A_{\alpha\beta})_1^s\text{。}\tag{60}$$

對分塊矩陣來施行運算，關於把諸塊換為數值元素的那些公式同

樣的能夠成立。例如，設已予兩個同維數的長方矩陣且分爲對應的同維子塊：

$$A=(A_{\alpha\beta}),\ B=(B_{\alpha\beta})\ (\alpha=1,2,\cdots,s;\ \beta=1,2,\cdots,t)。\quad (61)$$

易知，

$$A+B=(A_{\alpha\beta}+B_{\alpha\beta})\ (\alpha=1,2,\cdots,s;\ \beta=1,2,\cdots,t)。\quad (62)$$

詳細的來建立分塊矩陣的乘法。已知（參考第一章定義 4 下面的註）當兩個長方矩陣 A 與 B 相乘時，第一個因子 A 的行長必須等於第二個因子 B 的列的長度。爲了這些矩陣的"塊的"相乘可以施行，我們要補充這樣的條件，就是使第一個因子的塊中所有橫線上的維數與第二個因子的塊中所有縱線上的維數彼此一致：

$$A=\begin{pmatrix} \overbrace{A_{11}}^{n_1} & \overbrace{A_{12}}^{n_2} & \cdots & \overbrace{A_{1t}}^{n_t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}\begin{matrix} \}m_1 \\ \}m_2 \\ \vdots \\ \}m_s \end{matrix},\quad B=\begin{pmatrix} \overbrace{B_{11}}^{p_1} & \overbrace{B_{12}}^{p_2} & \cdots & \overbrace{B_{1u}}^{p_u} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2u} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{t1} & B_{t2} & \cdots & B_{tu} \end{pmatrix}\begin{matrix} \}n_1 \\ \}n_2 \\ \vdots \\ \}n_t \end{matrix}。\quad (63)$$

那就容易驗證，

$$AB=C=(C_{\alpha\beta}),\ 其中\ C_{\alpha\beta}=\sum_{\delta=1}^{t} A_{\alpha\delta}B_{\delta\beta}\ \begin{pmatrix}\alpha=1,2,\cdots,s \\ \beta=1,2,\cdots,u\end{pmatrix}。\quad (64)$$

我們特別注意這樣的特殊情形，就是有一個因子是準對角形矩陣。設 A 是一個準對角形矩陣，就是 $s=t$ 且當 $\alpha\neq\beta$ 時 $A_{\alpha\beta}=0$。在這一個情形我們的(64)式給予：

$$C_{\alpha\beta}=A_{\alpha\alpha}B_{\alpha\beta}\quad(\alpha=1,2,\cdots,s;\ \beta=1,2,\cdots,u)。\quad (65)$$

在左乘一個分塊矩陣以準對角形矩陣時，分塊矩陣的諸行各左乘以準對角形矩陣中對角線上的對應子塊。

現在設 B 是一個準對角形矩陣，亦即 $t=u$ 且當 $\alpha\neq\beta$ 時 $B_{\alpha\beta}=0$。那末由(64)我們得出：

$$C_{\alpha\beta}=A_{\alpha\beta}B_{\beta\beta}\quad(\alpha=1,2,\cdots,s;\ \beta=1,2,\cdots,u)。\quad (66)$$

在右乘一個分塊矩陣以準對角形矩陣時，分塊矩陣的諸列各右乘以準對角形矩陣中對角線上的對應子塊。

我們注意，兩個同級的分塊方陣常可施行乘法，如果把每一個因子都裂分爲子塊的相同的平方陣列且在每一因子的對角線上都是一些平方的子塊。

分塊方陣 (58) 稱爲高(低)準三角形的，如果 $s=t$ 且當 $\alpha>\beta$ 時所有 $A_{\alpha\beta}=0$ (對應的當 $\alpha<\beta$ 時所有的 $A_{\alpha\beta}=0$)。準對角形矩陣是準三角形矩陣的一種特殊情形。

從(64)式容易看出，

兩個高(低)準三角形矩陣的乘積仍然是一個高(低)準三角形矩陣❶；此時乘積的對角線上的子塊是由因子的對角線上對應子塊來相乘所得出的。

事實上，設在(64)中 $s=t$ 且有

$$\text{在}\ \alpha<\beta\ \text{時,}\ A_{\alpha\beta}=0,\ B_{\alpha\beta}=0,$$

我們得出：

$$\left.\begin{aligned}\text{當}\ \alpha<\beta\ \text{時,}\ C_{\alpha\beta}&=0\\ C_{\alpha\alpha}&=A_{\alpha\alpha}B_{\alpha\alpha}\end{aligned}\right\}\quad(\alpha,\beta=1,2,\cdots,s)。$$

與

對於低準三角形矩陣的情形可以同樣的來得出。

注意準三角形矩陣的行列式的計算規則。這一個規則可以從拉濮拉斯展開式來得出。

如果 A 是一個準三角形(特別的是準對角形)矩陣，那末這個矩陣的行列式等於其對角線上諸子塊的行列式的乘積：

$$|A|=|A_{11}|\,|A_{22}|\cdots|A_{ss}|\ominus。\qquad(67)$$

2. 設已給予分塊矩陣

---

❶ 此處假定分塊的相乘是可以施行的。

⊖ 此處假定 $|A_{11}|,\cdots,|A_{ss}|$ 這些行列式都是有意義的——譯者註。

$$A=\begin{pmatrix}\overbrace{A_{11}}^{n_1} & \overbrace{A_{12}}^{n_2} & \cdots & \overbrace{A_{1t}}^{n_t}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st}\end{pmatrix}\begin{matrix}\}m_1\\ \}m_2\\ \vdots\\ \}m_s\end{matrix}。\tag{68}$$

把第 β 行右乘以 $m_\alpha\times n_\beta$ 維長方矩陣 X 的結果加到第 α 行諸子塊上，我們得出分塊矩陣：

$$B=\begin{pmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1t}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{\alpha1}+XA_{\beta1} & \cdots & A_{\alpha t}+XA_{\beta t}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{\beta1} & \cdots & A_{\beta t}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ A_{s1} & \cdots & A_{st}\end{pmatrix}。\tag{69}$$

引入輔助方陣 V，表爲次之子塊的平方陣列的形狀：

$$V=\begin{pmatrix}\overbrace{E}^{m_1} & \cdots & \overbrace{0}^{m_\alpha} & \cdots & \overbrace{0}^{m_\beta} & \cdots & \overbrace{0}^{m_s}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & E & \cdots & X & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & E & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & E\end{pmatrix}\begin{matrix}\}m_1\\ \vdots\\ \}m_\alpha\\ \vdots\\ \}m_\beta\\ \vdots\\ \}m_s\end{matrix}。\tag{70}$$

矩陣 V 的對角線上諸子塊都是么矩陣，其級數順次爲 $m_1, m_2, \cdots, m_s$；除開位於第 α 子塊行與第 β 子塊列相交處的子塊爲 X 外，分塊矩陣 V 的所有對角線以外的子塊都等於零。

不難看出，

$$VA=B。\tag{71}$$

故因 V 是一個滿秩矩陣，對於矩陣 A 與 B 的秩有次之關係❶：

$$r_A=r_B。\tag{72}$$

在特別的情形，當 A 是一個方陣時，由(70)有：

❶ 參考第一章第三節中(29)式後面的結果。

$$|V||A|=|B|。\tag{73}$$

但是方陣 V 的行列式等於 1:

$$|V|=1。\tag{74}$$

故有

$$|A|=|B|。\tag{75}$$

可以得到同樣的結果,如果在矩陣 (68) 中把右乘其某一列以適當維數的長矩陣 X 所得出的諸子塊對應的加到另一列上去。

上面所得出的結果可以總結爲次之定理:

定理 3. 如果在分塊矩陣 A 中,把左(右)乘第 β 個子塊行(列)以 $m_\alpha\times m_\beta$ 維 ($m_\beta\times m_\alpha$ 維) 的長方矩陣 X 後的結果加到第 α 個子塊行(列)上,那末這一變換並不變動矩陣 A 的秩;又如 A 是一個方陣,則對矩陣 A 的行列式亦無改變。

3. 現在來討論這樣的特殊情形,就是在矩陣 A 的對角線上,子塊 A_{11} 是一個方陣而且是滿秩的($|A_{11}|\neq 0$)。

在矩陣 A 的第 α 行,加上左乘第一行以 $A_{\alpha 1}A_{11}^{-1}(\alpha=2,\cdots,s)$的結果,我們就得出矩陣

$$B_1=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ 0 & A_{22}^{(1)} & \cdots & A_{2t}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & A_{s2}^{(1)} & \cdots & A_{st}^{(1)} \end{pmatrix},\tag{76}$$

其中

$$A_{\alpha\beta}^{(1)}=-A_{\alpha 1}A_{11}^{-1}A_{1\beta}+A_{\alpha\beta}\quad(\alpha=2,\cdots,s;\ \beta=2,\cdots,t)。\tag{77}$$

如果 $A_{22}^{(1)}$ 是一個滿秩方陣,那末這一步驟可以繼續進行。這樣一來,我們得出廣義的高斯演段。

設 A 爲方陣。則有

$$|A|=|B_1|=|A_{11}|\begin{vmatrix} A_{22}^{(1)} & \cdots & A_{2t}^{(1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s2}^{(1)} & \cdots & A_{st}^{(1)} \end{vmatrix}。\tag{78}$$

式(78)把含有 st 個塊的行列式 $|A|$ 的計算化爲祇含 $(s-1)(t-1)$ 個子塊的有較小級數行列式的計算❶。

討論分爲四塊的行列式 Δ:

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}, \tag{79}$$

其中 A 與 D 都是方陣。

設 $A\neq0$。那末從第二行減去左乘第一行以 CA^{-1} 之積，我們得出:

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{vmatrix}=|A|\,|D-CA^{-1}B|。\tag{I}$$

同樣的，如果 $|D|\neq0$，那末在 Δ 中從第一行減去右乘第二行以 BD^{-1} 的乘積，我們得出:

$$\Delta=\begin{vmatrix} A-BD^{-1}C & 0 \\ C & D \end{vmatrix}=|A-BD^{-1}C|\,|D|。\tag{II}$$

在特殊的情形，四個矩陣 A, B, C, D 都是同爲 n 級的方陣時，由(I)與(II)得出休爾公式，化 $2n$ 級行列式的計算爲 n 級行列式的計算:

$$\Delta=|AD-ACA^{-1}B| \quad (|A|\neq0), \tag{Ia}$$

$$\Delta=|AD-BD^{-1}CD| \quad (|D|\neq0)。\tag{IIa}$$

如果矩陣 A 與 C 彼此可易，那末由(Ia)得出:

$$\Delta=|AD-CB| \quad (\text{如其有條件 } AC=CA)。\tag{Iб}$$

同樣的，如果 C 與 D 彼此可易，那末

$$\Delta=|AD-BC| \quad (\text{如其有條件 } CD=DC)。\tag{IIб}$$

公式(Iб)是在假設 $|A|\neq0$ 下所得出的，而公式(IIб)是當 $|D|\neq0$ 時得出的。但是從連續性的推究，這些限制是可以取消的。

從公式(I)—(IIб)，互易其右節的 A 與 D 且同時互易其 B 與 C，我們還可以得出六個公式。

---

❶ 如果 $A_{22}^{(1)}$ 是一個方陣且有 $|A_{22}^{(1)}|\neq0$，那末對於所得出的有 $(s-1)(t-1)$ 個子塊的行列式，我們可以再來應用同樣的變換，諸如此類。

例
$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 0 & b_1 & b_2\\ 0 & 1 & b_3 & b_4\\ c_1 & c_2 & d_1 & d_2\\ c_3 & c_4 & d_3 & d_4\end{vmatrix}。$$

由(15)式得:

$$\Delta=\begin{vmatrix} d_1-c_1b_1-c_2b_3 & d_2-c_1b_2-c_2b_4\\ d_3-c_3b_1-c_4b_3 & d_4-c_3b_2-c_4b_4\end{vmatrix}。$$

4. 從定理 3 推得次之

定理 4. 如果表長方矩陣 R 爲分塊型

$$R=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}, \tag{80}$$

其中 A 爲 n 級滿秩方陣($|A|\neq 0$),那末矩陣 R 的秩等於 n 的充分必要條件是

$$D=CA^{-1}B。 \tag{81}$$

證明 從矩陣 R 的第二個塊行減去左乘第一行以 CA^{-1} 的乘積,我們得出矩陣

$$T=\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & D-CA^{-1}B\end{pmatrix}。 \tag{82}$$

由定理 3,矩陣 R 與 T 有相同的秩。矩陣 T 與矩陣 A 有相同的秩(亦即都等於 n)的充分必要條件是 $D-CA^{-1}B=0$,亦即(81)能夠成立。定理即已證明。

從定理 4 可推得逆矩陣 A^{-1} 與一般乘積 $CA^{-1}B$ 所構成的演段,其中 B,C 各爲 $n\times p$, $q\times n$ 維長方矩陣❶。

用高斯演段❷來把矩陣

$$\begin{pmatrix}A & B\\ -C & 0\end{pmatrix}\quad (|A|\neq 0) \tag{83}$$

---

❶ 參考[65]。

❷ 此處我們對矩陣(83)並沒有完全用高斯演段,而祇是用到他的前 n 個程序,其中 n 爲這個矩陣的秩。如果當 $p=n$ 時,條件(15)成立,那末是可以這樣做的。如果這個條件不能適合,那末因爲 $|A|\neq 0$,我們可以調動矩陣(83)的前 n 個行(或前 n 個列),使得前 n 次高斯演段可以施行。當條件(15)對於 $p=n$ 能成立時,我們有時要用到這種有些變動的高斯演段。

變為次之形狀

$$\begin{pmatrix} G & B_1 \\ 0 & X \end{pmatrix}。\tag{84}$$

我們來證明

$$X=CA^{-1}B。\tag{85}$$

事實上，應用變換矩陣(83)的同樣變換，我們把矩陣

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -C & -CA^{-1}B \end{pmatrix}\tag{86}$$

變為次形矩陣

$$\begin{pmatrix} G & B_1 \\ 0 & X-CA^{-1}B \end{pmatrix}。\tag{87}$$

由定理4，知矩陣(86)有秩 n (n 為矩陣 A 的級數)。但此時矩陣(87)的秩亦必等於 n。故有 $X-CA^{-1}B=0$，亦卽得出(85)式。

特別的，如果 $B=y$，其中 y 為單列矩陣且有 $C=E$，那末

$$X=A^{-1}y。$$

因此，對矩陣

$$\begin{pmatrix} A & y \\ -E & 0 \end{pmatrix}$$

應用高斯演段，我們得出次之方程組的解

$$Ax=y。$$

再者，如果在(83)中取 $B=C=E$，那末對矩陣

$$\begin{pmatrix} A & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$$

應用高斯演段後，我們可以得出：

$$\begin{pmatrix} G & W \\ 0 & X \end{pmatrix},$$

其中

$$X=A^{-1}。$$

求出 A^{-1} 的這一個方法可以用次例來說明。

例 設

$$A=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&0&2\\3&1&2\end{vmatrix}。$$

要算出 A^{-1}。

應用經過變動的消去法❶於次之矩陣

$$\begin{Vmatrix}2&1&1&1&0&0\\1&0&2&0&1&0\\3&1&2&0&0&1\\-1&0&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0\end{Vmatrix}。$$

對所有的行(除第二行外)都加上第二行的適當的倍數，使得除第二個元素外，第一列上所有的元素都等於零。此後除第二行第三行外，所有的行都加上第三行的適當倍數，使得除第二第三個元素外，第二列的元素全都等於零。最後，在後三行上，加上第一行的適當倍數，使得我們得出次形矩陣

$$\begin{Vmatrix}*&*&*&*&*&**&*&*&*&*&**&*&*&*&*&*\\0&0&0&-2&-1&2\\0&0&0&4&1&-3\\0&0&0&1&1&-1\end{Vmatrix}。$$

因此

$$A^{-1}=\begin{Vmatrix}-2&-1&2\\4&1&-3\\1&1&-1\end{Vmatrix}。$$

❶ 參考上面的足註。

第三章　n 維向量空間中線性運算子

矩陣是研究 n 維向量空間中線性運算的基本分析工具。對於這些運算子的研究，給予了把所有矩陣來分類的可能性，且得出屬於同一類中所有矩陣的重要性質。

在本章中將敍述 n 維空間中線性運算子的最簡單性質的一些敍述。n 維空間中線性運算子的進一步的研究將在第七與第九章中繼續予以討論。

§1. 向量空間

1. 假設已經給予任意元素 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \cdots$ 的某一個集合 $\boldsymbol{R}$，且在他裏面確定了兩個運算："加法"運算與"對域 K 中的數的乘法"運算❶。我們假設這些運算對於 $\boldsymbol{R}$ 中任何元素 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ 與 K 中任何元素 α, β，都可以在 $\boldsymbol{R}$ 中唯一的施行，且有：

1° $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$。

2° $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$。

3° $\boldsymbol{R}$ 中有這樣的元素 $\mathbf{0}$ 存在，使數 0 與 $\boldsymbol{R}$ 中任何元素 $\boldsymbol{x}$ 的乘積都等於元素 $\mathbf{0}$：

$$0\cdot\boldsymbol{x}=\mathbf{0}。$$

4° $1\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$。

5° $\alpha(\beta\boldsymbol{x})=(\alpha\beta)\boldsymbol{x}$。

6° $(\alpha+\beta)\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}$。

7° $\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}$。

定義 1. 元素的集合 $\boldsymbol{R}$，在他裏面常可唯一的施行兩個運算：元

---

❶ 這些運算將用平常的符號"+"與"·"來標出，而且後一個符號常常省去而祇是暗中含有在內。

素的"加法"與"$\boldsymbol{R}$ 中元素對 K 中數的乘法",而且這兩個運算適合公設 $1°—7°$ 時,我們稱之為(域 K 上)向量空間,而稱其元素為向量[1]。

定義 2. $\boldsymbol{R}$ 中向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \cdots, \boldsymbol{u}$, 稱為線性相關,如果在 K 中有這樣的數 $\alpha, \beta, \cdots, \delta$ 存在,不全等於零,使得

$$\alpha \boldsymbol{x}+\beta \boldsymbol{y}+\cdots+\delta \boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}。\qquad (1)$$

如果沒有這樣的線性相關性存在時,向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \cdots, \boldsymbol{u}$ 稱為線性無關。

如果向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \cdots, \boldsymbol{u}$ 線性相關,那末在他們裏面至少有一個可以表為係數在域 K 中的其餘諸向量的線性組合。例如,如果在(1)中 $\alpha \neq 0$, 那末

$$\boldsymbol{x}=-\frac{\beta}{\alpha}\boldsymbol{y}-\cdots-\frac{\delta}{\alpha}\boldsymbol{u}。$$

定義 3. 空間 $\boldsymbol{R}$ 稱為有限維空間,而數 n 為這一個空間的維數,如果在 $\boldsymbol{R}$ 中有 n 個線性無關的向量存在,同時 $\boldsymbol{R}$ 中任何 $n+1$ 個向量都是線性相關的。如果在空間中可以找出任意多個向量線性無關系統,那末稱這一個空間為無限維空間。

在這一教程中,主要的研究有限維空間。

定義 4. 在 n 維空間中,給予了有一定次序的線性無關向量組 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$, 稱為這個空間的基底。

2. 例 1. 平常的向量集合(有向的幾何線段)是一個三維向量空間。這個空間中所有與某一個平面平行的向量構成一個二維空間,而與某一條直線平行的全部向量構成一個一維向量空間。

例 2. 稱域 K 中 n 個數的列 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 為向量(n 為一個固定的數)。以單列矩陣的運算為其基本運算:

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)+(y_1, y_2, \cdots, y_n)=(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n),$$
$$\alpha(x_1, x_2, \cdots, x_n)=(\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n)。$$

列 $(0, 0, \cdots, 0)$ 為其零元素。容易驗證,所有的公設 $1°—7°$ 都能適合。這些向量構成一個

---

[1] 不難看出,由性質 $1°—7°$ 可以得出所有平常數的相加與相乘的性質。例如,對於 $\boldsymbol{R}$ 中任一元素 $\boldsymbol{x}$; $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{x}[\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}=1\cdot\boldsymbol{x}+0\cdot\boldsymbol{x}=(1+0)\boldsymbol{x}=1\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}]$, $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$, 其中 $-\boldsymbol{x}=(-1)\cdot\boldsymbol{x}$, 諸如此類。

n 維空間。作為這個空間的基底，例如，可以取 n 級么矩陣的諸列：

$$(1, 0, \cdots, 0),\ (0, 1, \cdots, 0),\ \cdots,\ (0, 0, \cdots, 1)。$$

在這個例子中所討論的空間，常稱為 n 維數序空間。

例 3. 無限序列 $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ 的集合，其中很自然的定出運算：

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)+(y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots)=(x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots, x_n+y_n, \cdots),$$

$$\alpha(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)=(\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n, \cdots),$$

表現為一個無限維空間。

例 4. 係數在域 K 中，次數 $<n$ 的多項式 $a_0+a_1t+\cdots+a_{n-1}t^{n-1}$ 集合可以表為一個 n 維向量空間❶。作為這個空間的基底，例如，可以取冪次 $t^0, t^1, t^2, \cdots, t^{n-1}$。

所有的多項式（不加次數的限制）構成一個無限維空間。

例 5. 所有確定於閉區間 $[a, b]$ 上的函數構成一個無限維空間。

3. 設向量 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 構成 n 維向量空間 R 的基底，而 x 為這個空間的任一向量。那末向量 $x, e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是線性相關的（因為他的個數等於 $n+1$）：

$$\alpha_0 x+\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\cdots+\alpha_n e_n=0,$$

且在數 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 中至少有一個不等於零。但由向量 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 的線性無關性，在此時必須有 $\alpha_0 \neq 0$。因此

$$x=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n, \tag{2}$$

其中 $x_i=-\dfrac{\alpha_i}{\alpha_0}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$。

注意，數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是由所予向量 x 與基底 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 所唯一確定的。事實上，如果同(2)並列的對於向量 x 有另一種表示式

$$x=x_1'e_1+x_2'e_2+\cdots+x_n'e_n, \tag{3}$$

那末，從(3)減去(2)，我們得出：

$$(x_1'-x_1)e_1+(x_2'-x_2)e_2+\cdots+(x_n'-x_n)e_n=0,$$

故由基底向量的線性無關性推知

$$x_1'-x_1=x_2'-x_2=\cdots=x_n'-x_n=0,$$

亦即

$$x_1'=x_1,\ x_2'=x_2,\ \cdots,\ x_n'=x_n。 \tag{4}$$

❶ 可以取平常的多項式加法與多項式對數的乘法作為他的基本運算。

數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 稱爲在基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 中向量 $\boldsymbol{x}$ 的坐標。

如果 $$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{n} y_i \boldsymbol{e}_i,$$

那末 $$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)\boldsymbol{e}_i, \quad \alpha\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha x_i \boldsymbol{e}_i,$$

亦卽,向量和的坐標可由諸向量的對應坐標的相加來得出,在乘一個向量以數 α 時,所有的坐標都要乘上這一個數。

4. 設向量

$$\boldsymbol{x}_k=\sum_{i=1}^{n} x_{ik} \boldsymbol{e}_i \quad (k=1, 2, \cdots, m)$$

線性相關,亦卽

$$\sum_{k=1}^{m} c_k \boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{0}, \tag{5}$$

且在數 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 中至少有一個不等於零。

如果一個向量等於零,那末他的坐標全等於零。故向量等式(5)相當於次之純量等式組:

$$\left.\begin{array}{l} c_1x_{11}+c_2x_{12}+\cdots+c_mx_{1m}=0, \\ c_1x_{21}+c_2x_{22}+\cdots+c_mx_{2m}=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1x_{n1}+c_2x_{n2}+\cdots+c_mx_{nm}=0。 \end{array}\right\} \tag{6}$$

已知這一組關於 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 的齊次線方程組有非零解的充分必要條件,是他的係數矩陣的秩小於未知量的個數,亦卽小於 m。因此,他的秩等於數 m 是向量 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ 線性無關的充分必要條件。這樣一來,就有次之

定理 1. 爲了使向量 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ 線性無關的充分必要條件,是在任何基底中由這些向量的坐標所組成的矩陣

$$\left\| \begin{array}{cccc} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{array} \right\| \tag{7}$$

的秩等於 m，亦即等於向量的個數。

註　向量 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ 的線性無關性說明了矩陣 (7) 中諸列的線性無關性，因為位於第 k 個列的是向量 $\boldsymbol{x}_k$ 的坐標$(k=1, 2, \cdots, m)$。因此根據定理，如果在長方矩陣中諸列線性無關，那末這個矩陣的秩等於他的列的個數。故知在任一長方矩陣中，線性無關列的最大的數目等於這個矩陣的秩。再者，如果我們轉置矩陣，亦即以行為列以列為行，那末顯然此時矩陣的秩並無改變。因此，在長方矩陣中，線性無關列的列數，等於線性無關行的行數，亦等於這一個矩陣的秩[1]。

5．如果在 n 維空間中已經取定基底 $e_1, e_2, \cdots, e_n$，那末每一個向量 x 都唯一的對應於列 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 為向量 x 在這一個已予基底中的坐標。這樣一來，給予了基底就在任何一個 n 維向量空間 $\boldsymbol{R}$ 中的向量與例 2 中所說的 n 維數序空間 $\boldsymbol{R}'$ 的向量之間構成了一個一一對應關係。而且 $\boldsymbol{R}$ 中向量的和對應於在 $\boldsymbol{R}'$ 中的對應向量的和。對於向量與域 K 中的數 α 的乘積亦有類似的情形。換句話說，任何 n 維向量空間都與 n 維數序空間同構，因此，所有在同一個數域 K 上的維數同為 n 的向量空間都是彼此同構的。這就說明了，如果把同構的空間當做一個來看待時，對於已予的數域祇有一個 n 維向量空間存在。

可能發生這樣的問題，如果把同構的空間當做一個來看待時，"抽象的" n 維空間就與 n 維數序空間重合，為什麼我們又引進"抽象的" n 維空間。事實上，我們可以界說向量為給予一定次序的 n 個數所成的組，且如例 2 一樣建立對於這些向量的運算關係。但此時會把與基底的選取無關的向量性質同對於特殊基底所發生的情況混在一起。例如，向量的坐標全等於零是這個向量的性質，他與基底的選取無關。向量的坐標彼此相等就不是這個向量的性質，因為變動基底後，這個性質就會消失。向量空間的公理構成直接推出與基底的選取無關的向量性質。

§2．映像 n 維空間於 m 維空間中的線性運算子

1．討論線性變換

$$\left.\begin{array}{l} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n, \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n, \end{array}\right\} \tag{8}$$

[1] 這個論斷是從定理 1 來得出的，在定理 1 的證明中，我們用到齊次線方程組的已知性質（祇有在係數矩陣的秩小於未知量的個數時始有非零解存在）。我們亦可不用這一個性質來證明定理 1（參考 §5）。

其係數在域 K 中，與同在這一個域上的兩個向量空間：n 維空間 $\boldsymbol{R}$ 與 m 維空間 $\boldsymbol{S}$。我們在 $\boldsymbol{R}$ 中選取某一基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 且在 $\boldsymbol{S}$ 中選取某一基底 $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \cdots, \boldsymbol{g}_m$。那末變換(8)變 $\boldsymbol{R}$ 中每一個向量 $\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i$ 為 $\boldsymbol{S}$ 中某一個向量 $\boldsymbol{y}=\sum_{k=1}^{m} y_k \boldsymbol{g}_k$，亦卽，變換(8)確定了一個運算子 $\boldsymbol{A}$，變向量 $\boldsymbol{x}$ 為向量 $\boldsymbol{y}$：$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$。不難看出，這個運算子 $\boldsymbol{A}$ 有線性的性質，我們將其述為：

定義 5. 映像 $\boldsymbol{R}$ 於 $\boldsymbol{S}$ 中的運算子 $\boldsymbol{A}$，亦卽變 $\boldsymbol{R}$ 中每一個向量 $\boldsymbol{x}$ 為 $\boldsymbol{S}$ 中某一個向量 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的運算子，稱為線性的，如果對於 $\boldsymbol{R}$ 中任何向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1$ 與 K 中任一數 α，都有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}_1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1, \quad \boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{x})=\alpha\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}。\tag{9}$$

這樣一來，對於 $\boldsymbol{R}$ 與 $\boldsymbol{S}$ 中已予的基底，變換(8)確定一個線性運算子，映像 $\boldsymbol{R}$ 於 $\boldsymbol{S}$ 中。

現在我們來證明，相反的，對於任何映像 $\boldsymbol{R}$ 於 $\boldsymbol{S}$ 中的線性運算子 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{R}$ 中任一基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$，$\boldsymbol{S}$ 中任一基底 $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \cdots, \boldsymbol{g}_m$，都有元素在域 K 中的這樣的長方矩陣

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix} \right\| \tag{10}$$

存在，利用這一矩陣來構成的線性變換(8)把變換後的向量 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的坐標經向量 $\boldsymbol{x}$ 的坐標來表出。

事實上，應用運算子 $\boldsymbol{A}$ 於基底的向量 $\boldsymbol{e}_k$ 來得出在基底 $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \cdots, \boldsymbol{g}_m$ 中向量 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_k$ 的坐標且記之為 $a_{1k}, a_{2k}, \cdots, a_{mk}$ $(k=1, 2, \cdots, n)$：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_k=\sum_{i=1}^{m} a_{ik}\boldsymbol{g}_i \quad (k=1, 2, \cdots, n)。\tag{11}$$

同乘等式(10)的兩節以 x_k 後將其全部加起，我們得出：

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_k=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k\right)\boldsymbol{g}_i,$$

故

$$y=Ax=A\left(\sum_{k=1}^{n}x_k e_k\right)=\sum_{k=1}^{n}x_k Ae_k=\sum_{i=1}^{m}y_i g_i,$$

其中
$$y_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k \quad (i=1,2,\cdots,m),$$

這就是所要證明的結果。

這樣一來，對於 R 與 S 中已予的基底，每一個映像 R 於 S 中的線性運算子 A 對應於一個維數爲 $m\times n$ 的長方矩陣(10)，反之，每一個這樣的矩陣對應於某一個映像 R 於 S 中的線性運算子。

此時在對應於運算子 A 的矩陣 A 中，其第 k 列是向量 $Ae_k(k=1,2,\cdots,n)$ 的坐標所順次組成的。

以 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 與 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)$ 記向量 x 與 y 的坐標列。那末向量等式

$$y=Ax$$

對應於矩陣等式

$$y=Ax,$$

這就是變換(8)的矩陣寫法。

例

討論所有的係數在數域 K 中，次數 $\leqslant n-1$ 的，t 的多項式集合。這一個集合可以表爲 n 維向量空間 R_n（參考本章第一節1中的例4）。同樣的，係數在域 K 中，次數 $\leqslant n-2$ 的 t 的全部多項式構成空間 R_{n-1}。微分運算子 $\frac{d}{dt}$ 變 R_n 中每一個多項式爲 R_{n-1} 中某一個多項式。這樣一來，這個運算子映像 R_n 於 R_{n-1} 中。微分運算子是一個線性運算子，因爲

$$\frac{d}{dt}[\varphi(t)+\psi(t)]=\frac{d\varphi(t)}{dt}+\frac{d\psi(t)}{dt},\quad \frac{d}{dt}[\alpha\varphi(t)]=\alpha\frac{d\varphi(t)}{dt}。$$

在空間 R_n 與 R_{n-1} 中，選取 t 的冪次爲基底：

$$t^0=1,\ t,\ \cdots,\ t^{n-1} \text{ 與 } t^0=1,\ t,\ \cdots,\ t^{n-2}。$$

應用公式(11)，組成在這些基底中對應於微分運算子的 $(n-1)\times n$ 維長方矩陣

$$\left\|\begin{matrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1\end{matrix}\right\|。$$

§3. 線性運算子的加法與乘法

1. 設予映像 $\boldsymbol{R}$ 於 $\boldsymbol{S}$ 中的兩個線性運算子 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$，且設其各對應於矩陣

$$A=\|a_{ik}\|,\ B=\|b_{ik}\|\quad (i=1,2,\cdots,m;\ k=1,2,\cdots,n)。$$

定義 6. 運算子 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 的和是指由次之等式所確定的運算子 $\boldsymbol{C}$，

$$\boldsymbol{Cx}=\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Bx}\quad (\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R})❶。\tag{12}$$

基於這一個定義，容易驗證，線性運算子 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 的和 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 亦是一個線性運算子。

再者，
$$\boldsymbol{Ce}_k=\boldsymbol{Ae}_k+\boldsymbol{Be}_k=\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}+b_{ik})\boldsymbol{e}_k。$$

故知運算子 $\boldsymbol{C}$ 對應於矩陣 $C=\|c_{ik}\|$，其中 $c_{ik}=a_{ik}+b_{ik}(i=1,2,\cdots,m;$ $k=1,2,\cdots,n)$，亦卽運算子 $\boldsymbol{C}$ 對應於矩陣

$$C=A+B。\tag{13}$$

從對應於向量等式(12)的矩陣等式

$$Cx=Ax+Bx\tag{14}$$

(x 爲向量 $\boldsymbol{x}$ 的坐標列)，可以得出同樣的結果。因爲列 x 是任意的，所以由(14)可以推得(13)。

2. 設予三個向量空間 $\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{S}$ 與 $\boldsymbol{T}$，各有維數 q，n 與 m，且予兩個線性運算子 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{B}$ 映像 $\boldsymbol{R}$ 於 $\boldsymbol{S}$ 中而 $\boldsymbol{A}$ 映像 $\boldsymbol{S}$ 於 $\boldsymbol{T}$ 中；用符號的寫法爲：

$$\boldsymbol{T}\xleftarrow{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{S}\xleftarrow{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{R}。$$

定義 7. 運算子 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 的乘積是指這樣的運算子 $\boldsymbol{C}$，對於 $\boldsymbol{R}$ 中任何 $\boldsymbol{x}$ 都有

$$\boldsymbol{Cx}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Bx})\quad (\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R})。\tag{15}$$

---

❶ $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}$ 的意義是說元素 $\boldsymbol{x}$ 屬於集合 $\boldsymbol{R}$。我們是假設等式(12)對於 $\boldsymbol{R}$ 中任何 $\boldsymbol{x}$ 都能成立。

運算子 $\boldsymbol{C}$ 映像 $\boldsymbol{R}$ 於 $\boldsymbol{T}$ 中:

$$\boldsymbol{T} \xleftarrow{\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}} \boldsymbol{R}。$$

由運算子 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 的線性性質可推得運算子 $\boldsymbol{C}$ 的線性性質。在空間 $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{T}$ 中選取任意基底，且以 A, B, C 記運算子 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 在所選定的基底中的矩陣，那末向量等式

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{z}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \tag{16}$$

將對應於矩陣等式

$$z=Ay,\ y=Bx,\ z=Cx,$$

其中 x, y, z 各爲向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ 的坐標列。故得:

$$Cx=A(Bx)=(AB)x,$$

再由列 x 的任意性，知有

$$C=AB。 \tag{17}$$

這樣一來，運算子 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 的乘積 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ 對應於矩陣 $C=\|c_{ij}\|$, $(i=1, 2, \cdots, m;\ j=1, 2, \cdots, q)$，他等於矩陣 A 與 B 的乘積。

讓讀者自己去證明，運算子

$$\boldsymbol{C}=\alpha\boldsymbol{A}\quad(\alpha\in K)$$ [1]

對應於矩陣

$$C=\alpha A。$$

這樣一來，我們看到在第一章中所說的矩陣的運算可以界說爲線性運算子的和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，積 $\boldsymbol{AB}$ 與 $\alpha\boldsymbol{A}$ 所對應的矩陣 $A+B$, AB 與 αA，其中 A 與 B 爲對應於運算子 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 的矩陣，而 α 爲 K 中的數。

§4. 坐標的變換

討論在 n 維向量空間中的兩個基底: $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ (“舊”基底) 與 $\boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*, \cdots, \boldsymbol{e}_n^*$ (“新”基底)。

如果給予了其中一組基底的向量關於另一基底的坐標，那末基底

[1] 這就是說對於這個運算子有 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\ (\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R})$。

中向量的相互關係就完全確定。

我們假設：

$$\left.\begin{array}{l} e_1^* = t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + \cdots + t_{n1}e_n, \\ e_2^* = t_{12}e_1 + t_{22}e_2 + \cdots + t_{n2}e_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n^* = t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + \cdots + t_{nn}e_n, \end{array}\right\} \tag{18}$$

或者縮寫爲：

$$e_k^* = \sum_{i=1}^{n} t_{ik} e_i \quad (k=1, 2, \cdots, n)。 \tag{18'}$$

找出同一的向量在不同基底中的坐標間的關係。

設 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 與 $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*$ 爲向量 $\boldsymbol{x}$ 各在"舊"基底與"新"基底中的坐標：

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{k=1}^{n} x_k^* e_k^*。 \tag{19}$$

以(18)式中向量 e_k^* 的表示式代入(19)式中，我們得出：

$$\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k^* \sum_{i=1}^{n} t_{ik} e_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} t_{ik} x_k^*\right) e_i 。$$

比較這一個等式與(19)式且注意向量的坐標爲所予向量與所在基底所唯一確定的，我們得出：

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ik} x_k^* \quad (i=1, 2, \cdots, n), \tag{20}$$

或者詳細的寫爲：

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = t_{11}x_1^* + t_{12}x_2^* + \cdots + t_{1n}x_n^*, \\ x_2 = t_{21}x_1^* + t_{22}x_2^* + \cdots + t_{2n}x_n^*, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = t_{n1}x_1^* + t_{n2}x_2^* + \cdots + t_{nn}x_n^*。 \end{array}\right\} \tag{21}$$

(21)式確定了從某一基底變到另一基底時向量坐標間的變換。他們把"舊"坐標經"新"坐標來表出。矩陣

$$T = \| t_{ik} \|_1^n \tag{22}$$

稱爲坐標的變換矩陣或演化矩陣。在他裏面的第 k 列是由"新"基底中第 k 個向量在"舊"基底中的坐標所組成的。這可以從(18)式來看出或者直接在(21)式中取 $x_k^*=1$ 而當 $i\neq k$ 時取 $x_i^*=0$ 來得出。

注意,矩陣 T 是滿秩的,亦卽

$$|T|\neq 0。\tag{23}$$

事實上,在(21)中取 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$,我們得出行列式爲 $|T|$ 的 n 個知量 $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*$ 的 n 個齊次方程的線方程組。這個方程組祇有零解 $x_1^*=0, x_2^*=0, \cdots, x_n^*=0$,因爲否則由(19)將得出向量 $e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*$ 間的線性相關性。故有 $|T|\neq 0$❶。

引進單列矩陣 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 與 $x^*=(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$ 的討論。

那末坐標的變換公式(21)可以寫爲次之矩陣等式:

$$x=Tx^*。\tag{24}$$

再同時左乘這個等式的兩節以 T^{-1},我們得出逆變換的表示式:

$$x^*=T^{-1}x。\tag{25}$$

§5. 相抵矩陣. 運算子的秩. 薛爾凡斯透不等式

1. 假設已予數域 K 上維數各爲 n 與 m 的兩個向量空間 $\boldsymbol{R}$ 與 $\boldsymbol{S}$,且予映像 $\boldsymbol{R}$ 於 $\boldsymbol{S}$ 中的線性運算子 $\boldsymbol{A}$。在本節中,我們來說明,當 $\boldsymbol{R}$ 與 $\boldsymbol{S}$ 中的基底變更後,對應於所予線性運算子 $\boldsymbol{A}$ 的矩陣是怎樣變動的。

在 $\boldsymbol{R}$ 與 $\boldsymbol{S}$ 中各取基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 與 $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \cdots, \boldsymbol{g}_m$。在這些基底中,設運算子 $\boldsymbol{A}$ 對應於矩陣 $A=\|a_{ik}\|$,$(i=1, 2, \cdots, m; k=1, 2, \cdots, n)$。向量等式

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\tag{26}$$

❶ 不等式(23)亦可從定理1(本章§1, 4)推出,因爲矩陣 T 的元素是線性無關向量組 $e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*$ 的"舊"坐標。

對應於矩陣等式

$$y=Ax, \tag{27}$$

其中 x 與 y 爲向量 $\boldsymbol{x}$ 與 $\boldsymbol{y}$ 各在基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 與 $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \cdots, \boldsymbol{g}_m$ 中的坐標列。

現在在 $\boldsymbol{R}$ 與 $\boldsymbol{S}$ 中取另外的基底 $\boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*, \cdots, \boldsymbol{e}_n^*$ 與 $\boldsymbol{g}_1^*, \boldsymbol{g}_2^*, \cdots, \boldsymbol{g}_m^*$。在新基底中，$x, y, A$ 各換爲：x^*, y^*, A^*。此處

$$y^*=A^*x^*。 \tag{28}$$

以 Q 與 N 各記階爲 n 與 m 的滿秩方陣，他們爲空間 $\boldsymbol{R}$ 與 $\boldsymbol{S}$ 中當舊基底變爲新基底時的坐標的變換矩陣(參考 §4)：

$$x=Qx^*,\ \ y=Ny^*。 \tag{29}$$

那末從(27)與(29)，我們得出：

$$y^*=N^{-1}y=N^{-1}Ax=N^{-1}AQx^*。 \tag{30}$$

設 $P=N^{-1}$，我們由(28)與(30)得出：

$$A^*=PAQ。 \tag{31}$$

定義 8. 兩個維數相同的長方矩陣 A 與 B 稱爲*相抵的*，如果有兩個滿秩方陣 P 與 Q 存在，[1] 使得

$$B=PAQ。 \tag{32}$$

由(31)得知，在 $\boldsymbol{R}$ 與 $\boldsymbol{S}$ 中選取不同的基底時，對應於同一線性運算子 $\boldsymbol{A}$ 的兩個矩陣，是永遠彼此相抵的。不難看出，相反的，如果在 $\boldsymbol{R}$ 與 $\boldsymbol{S}$ 中對於某一基底來說矩陣 A 對應於運算子 $\boldsymbol{A}$，而矩陣 B 與矩陣 A 相抵，那末在 $\boldsymbol{R}$ 與 $\boldsymbol{S}$ 中一定可以對於某一個另外的基底來說，B 是對應於同一運算子 $\boldsymbol{A}$ 的。

這樣一來，每一個映像 $\boldsymbol{R}$ 於 $\boldsymbol{S}$ 中的線性運算子，對應於元素在域 K 中的由彼此相抵的矩陣所組成的矩陣類。

---

[1] 如果矩陣 A 與 B 有維數 $m\times n$，那末在(32)中方陣 P 的級數等於 m，而方陣 Q 的級數等於 n。如果相抵矩陣 A 與 B 的元素屬於某一個數域，那末矩陣 P 與 Q 亦可以這樣選取，使得他們的元素都屬於這個同一的數域。

2. 次之定理給予兩個矩陣的相抵性的判定：

定理 2. 兩個同維數的長方矩陣彼此相抵的充分必要條件是這兩個矩陣有相同的秩。

證明

條件的必要性　在（左或右）乘長方矩陣以任一滿秩方陣時，不變長方矩陣的秩（參考第一章(29)式下面的結論）。故由(32)得出

$$r_A = r_B。$$

條件的充分性　設 A 為一個 $m\times n$ 維的長方矩陣。他表出一個映像空間 $\boldsymbol{R}$（基底為 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 時）於 $\boldsymbol{S}$（基底為 $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \cdots, \boldsymbol{g}_m$ 時）中的線性運算子 $\boldsymbol{A}$。以 r 記向量 $\boldsymbol{Ae}_1, \boldsymbol{Ae}_2, \cdots, \boldsymbol{Ae}_n$ 中線性無關向量的個數。沒有什麼損失的，可以假設向量 $\boldsymbol{Ae}_1, \boldsymbol{Ae}_2, \cdots, \boldsymbol{Ae}_r$ 是線性無關的❶，而其餘的向量 $\boldsymbol{Ae}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{Ae}_n$ 可以經他們來線性表出：

$$\boldsymbol{Ae}_k = \sum_{j=1}^{r} c_{kj}\boldsymbol{Ae}_j \quad (k=r+1, \cdots, n)。 \tag{33}$$

在 $\boldsymbol{R}$ 中定出次之形狀的新基底：

$$\boldsymbol{e}_i^* = \begin{cases} \boldsymbol{e}_i & (i=1, 2, \cdots, r), \\ \boldsymbol{e}_i - \sum_{j=1}^{r} c_{ij}\boldsymbol{e}_j & (i=r+1, \cdots, n)。 \end{cases} \tag{34}$$

那末由(33)，得

$$\boldsymbol{Ae}_k^* = \boldsymbol{0} \quad (k=r+1, \cdots, n)。 \tag{35}$$

我們又假設：

$$\boldsymbol{Ae}_j^* = \boldsymbol{g}_j^* \quad (j=1, 2, \cdots, r)。 \tag{36}$$

向量 $\boldsymbol{g}_1^*, \boldsymbol{g}_2^*, \cdots, \boldsymbol{g}_r^*$ 線性無關。補充以某些向量 $\boldsymbol{g}_{r+1}^*, \cdots, \boldsymbol{g}_m^*$ 使 $\boldsymbol{g}_1^*, \boldsymbol{g}_2^*, \cdots, \boldsymbol{g}_m^*$ 成為 $\boldsymbol{S}$ 的基底。

那末在新基底 $\boldsymbol{e}_1^*, \cdots, \boldsymbol{e}_n^*; \boldsymbol{g}_1^*, \cdots, \boldsymbol{g}_m^*$ 中對應於同一運算子 $\boldsymbol{A}$ 的矩陣，由(35)與(36)將有次之形狀：

❶ 這可以由調動基底中向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 的序數來得出。

$$I_r=\begin{Vmatrix} \overbrace{1 & 0\cdots 0}^{r} & 0\cdots 0 \\ 0 & 1\cdots 0 & 0\cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0\cdots 1 & 0\cdots 0 \\ 0 & 0\cdots 0 & 0\cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0\cdots 0 & 0\cdots 0 \end{Vmatrix}。\tag{37}$$

在矩陣 I_r 中，沿主對角線由上向下有 r 個 1；矩陣 I_r 的其他元素全等於零。因爲矩陣 A 與 I_r 都對應於同一運算子 $\boldsymbol{A}$，所以他們是彼此相抵的。因爲已經證明了相抵矩陣有相同的秩，所以原矩陣的秩等於 r。

我們已經證明了任何 r 秩長方矩陣都與"標準"矩陣 I_r 相抵。但矩陣 I_r 完全被維數 $m\times n$ 與數 r 所確定。故所有 $m\times n$ 維的 r 秩長方矩陣都與同一矩陣 I_r 相抵，因而彼此相抵。定理即已證明。

3. 假設已經給予了映像 n 維空間 $\boldsymbol{R}$ 於 m 維空間 $\boldsymbol{S}$ 中的線性運算子 $\boldsymbol{A}$。$\boldsymbol{Ax}$ 形的向量集合，其 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}$ 者，構成一個向量空間❶。我們以 $\boldsymbol{AR}$ 來記這一個空間；他是空間 $\boldsymbol{S}$ 的一部分，或者說他是空間 $\boldsymbol{S}$ 的子空間。

與 $\boldsymbol{S}$ 中子空間 $\boldsymbol{AR}$ 相伴的，我們考慮所有適合方程

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}\tag{38}$$

的向量 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R})$。這些向量同樣的構成 $\boldsymbol{R}$ 中子空間；我們以 $\boldsymbol{N_A}$ 來記這一個子空間。

定義 9. 如果線性運算子 $\boldsymbol{A}$ 映像 $\boldsymbol{R}$ 於 $\boldsymbol{S}$ 中，那末空間 $\boldsymbol{AR}$ 的維數 r 稱爲運算子 $\boldsymbol{A}$ 的秩❷，而由所有適合條件 (38) 的向量 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R})$

❶ $\boldsymbol{Ax}(\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R})$ 形向量集合適合 §1 的公設 1°—7°，因爲兩個 $\boldsymbol{Ax}(\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R})$ 形的向量的和與這種向量對數的乘積仍然給予這種形狀的向量。

❷ 空間 $\boldsymbol{AR}$ 的維數永遠 $\leqslant$ 空間 $\boldsymbol{R}$ 的維數，亦即 $r\leqslant n$。這個可以由等式 $\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{e}_i$ ($\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 爲 $\boldsymbol{R}$ 的基底) 引到等式 $\boldsymbol{Ax}=\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{Ae}_i$ 來得出。

所構成的空間 N_A 的維數 d 稱爲運算子 $\boldsymbol{A}$ 的朒。

對於一個已予的運算子 $\boldsymbol{A}$，在不同的基底中所對應的全部相抵長方矩陣裏面，有一個標準矩陣 I_r[參考(37)]。以 $\boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*, \cdots, \boldsymbol{e}_n^*$ 與 $\boldsymbol{g}_1^*, \boldsymbol{g}_2^*, \cdots, \boldsymbol{g}_m^*$ 各記其在 $\boldsymbol{R}$ 與 $\boldsymbol{S}$ 中的對應基底。那末

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1^*=\boldsymbol{g}_1^*, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_r^*=\boldsymbol{g}_r^*, \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_{r+1}^*=\cdots=\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n^*=0。$$

由 $\boldsymbol{AR}$ 與 N_A 的定義，知向量 $\boldsymbol{g}_1^*, \cdots, \boldsymbol{g}_r^*$ 構成 $\boldsymbol{AR}$ 的基底，而向量 $\boldsymbol{e}_{r+1}^*, \cdots, \boldsymbol{e}_n^*$ 構成 $\boldsymbol{N}_A$ 的基底。因此推得 r 爲運算子 $\boldsymbol{A}$ 的秩而

$$d=n-r。\tag{39}$$

如果 A 是任何一個對應於運算子 $\boldsymbol{A}$ 的矩陣，那末他與 I_r 相抵，因而有相同的秩 r。這樣一來，運算子 $\boldsymbol{A}$ 的秩與長方矩陣 A 的秩相同，

$$A=\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mn} \end{matrix}\right\|$$

爲運算子 $\boldsymbol{A}$ 在某兩個基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n \in \boldsymbol{R}$ 與 $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \cdots, \boldsymbol{g}_m \in \boldsymbol{S}$ 中所確定的。

矩陣 A 的諸列爲向量 $\boldsymbol{Ae}_1, \boldsymbol{Ae}_2, \cdots, \boldsymbol{Ae}_n$ 的坐標所組成。因爲由 $\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^n x_i\boldsymbol{e}_i$ 得出 $\boldsymbol{Ax}=\sum_{i=1}^n x_i\boldsymbol{Ae}_i$，所以運算子 $\boldsymbol{A}$ 的秩，亦即 $\boldsymbol{AR}$ 的維數，等於 $\boldsymbol{Ae}_1, \boldsymbol{Ae}_2, \cdots, \boldsymbol{Ae}_n$ 中線性無關向量的個數的最大數。這樣一來，矩陣的秩等於這個矩陣中線性無關列的列數。因在轉置矩陣後，換行爲列而不變其秩，所以矩陣的線性無關行的個數等於這個矩陣的秩❶。

4. 假設已經給予兩個線性運算子 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 與其乘積 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$。設運算子 $\boldsymbol{B}$ 映像 $\boldsymbol{R}$ 於 $\boldsymbol{S}$ 中，而運算子 $\boldsymbol{A}$ 映像 $\boldsymbol{S}$ 於 $\boldsymbol{T}$ 中。那末運算子 $\boldsymbol{C}$ 映像 $\boldsymbol{R}$ 於 $\boldsymbol{T}$ 中：

$$\boldsymbol{T}\xleftarrow{A}\boldsymbol{S}\xleftarrow{B}\boldsymbol{R}, \boldsymbol{T}\xleftarrow{C}\boldsymbol{R}。$$

❶ 對於這一個結果，我們已經在 §1 中用另一種推理來得出(參考 §1，4 的結尾)。

對於 $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{S}$ 與 $\boldsymbol{T}$ 中某一選定基底，引入運算子 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 與 $\boldsymbol{C}$ 的對應矩陣 A, B 與 C。那末運算子的等式 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ 將對應於矩陣等式 $C=AB$。

以 r_A, r_B, r_C 記運算子 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 的秩，亦即各為矩陣 A, B, C 的秩。這些數為子空間 $\boldsymbol{AS}$, $\boldsymbol{BR}$, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BR})$ 的維數所確定。因 $\boldsymbol{BR}\subset\boldsymbol{S}$，所以 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BR})\subset\boldsymbol{AS}$[1]。再者，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BR})$的維數不能超過 $\boldsymbol{BR}$ 的維數[2]。故有

$$r_C\leqslant r_A,\quad r_C\leqslant r_B。$$

對於這些不等式，我們曾經在第一章§2中，由關於兩個矩陣的乘積中子式的公式求出來過。

視運算子 $\boldsymbol{A}$ 為映像 $\boldsymbol{BR}$ 於 $\boldsymbol{T}$ 中的運算子。那末這個運算子的秩將等於空間 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BR})$ 的維數，亦即 r_C。故由(39)式，我們得出：

$$r_C=r_B-d_1, \tag{40}$$

其中 d_1 為適方程

$$\boldsymbol{Ax}=0 \tag{41}$$

的所有 $\boldsymbol{BR}$ 中諸向量的線性無關向量數的極大數。但這一方程的屬於 $\boldsymbol{S}$ 的所有解構成一個 d 維子空間，其中

$$d=n-r_A \tag{42}$$

為映像 $\boldsymbol{S}$ 於 $\boldsymbol{T}$ 中的運算子 $\boldsymbol{A}$ 的腑。因為 $\boldsymbol{BR}\subset\boldsymbol{S}$，所以

$$d_1\leqslant d。 \tag{43}$$

由(40)，(42)與(43)我們得出：

$$r_A+r_B-n\leqslant r_C。$$

這樣一來，我們得出了關於 $m\times n$ 維與 $n\times q$ 維兩個長方矩陣 A 與 B 的乘積的秩的次之**薛爾凡斯透不等式**：

$$r_A+r_B-n\leqslant r_{AB}\leqslant r_A,\ r_B。 \tag{44}$$

[1] $R\subset S$ 的意義是集合 R 為 S 的部分集合。

[2] 參考上面定義9的足註。

§6. 映像 n 維空間於其自己中的線性運算子

映像 n 維向量空間 $\boldsymbol{R}$ 於其自己中（在這一情形中 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{S}$, $n=m$）的線性運算子，我們將簡稱爲 $\boldsymbol{R}$ 中線性運算子。

$\boldsymbol{R}$ 中兩個線性運算子的和，與這種運算子對數的乘積，都仍然是 $\boldsymbol{R}$ 中線性運算子。兩個這種線性運算子常可施行乘法，而且他們的乘積仍然是 $\boldsymbol{R}$ 中線性運算子。這樣一來，$\boldsymbol{R}$ 中線性運算子構成一個環❶。在這個環裏面有么運算子，即是運算子 $\boldsymbol{E}$，對於他有

$$\boldsymbol{Ex}=\boldsymbol{x}\quad(\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R})。\tag{45}$$

再者，對於 $\boldsymbol{R}$ 中任何一個運算子 $\boldsymbol{A}$ 都有

$$\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{A}。$$

如果 $\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 中線性運算子，那末 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{AA}$, $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{AAA}$, $\cdots$, 一般的 $\boldsymbol{A}^m=\underbrace{\boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A}}_{m個}$ 都有意義。此外，我們設 $\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}$。那末容易看出，對於任何非負整數 p 與 q 都有

$$\boldsymbol{A}^p\boldsymbol{A}^q=\boldsymbol{A}^{p+q}。$$

設 $f(t)=\alpha_0t^m+\alpha_1t^{m-1}+\cdots+\alpha_{m-1}t+\alpha_m$ 爲一個係數在域 K 中的純量 t 的多項式。我們假設：

$$f(\boldsymbol{A})=\alpha_0\boldsymbol{A}^m+\alpha_1\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+\alpha_{m-1}\boldsymbol{A}+\alpha_m\boldsymbol{E}。\tag{46}$$

此時對於任何兩個多項式 $f(t)$ 與 $g(t)$ 都有 $f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{A})=g(\boldsymbol{A})f(\boldsymbol{A})$。

設
$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Ax}\quad(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R})。$$

以 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 記向量 $\boldsymbol{x}$ 在任一基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 中的坐標，而以 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 記向量 $\boldsymbol{y}$ 在同一基底中的坐標。那末

$$y_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k\quad(i=1, 2, \cdots, n)。\tag{47}$$

在基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 中，線性運算子 $\boldsymbol{A}$ 對應於方陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$❷。

---

❶ 這個環是一個代數。參考第一章，§3，3。

❷ 參考本章§2。此時空間 $R=S$ 而基底 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 與 $g_1, g_2, \cdots, g_m$ 是相同的。

讀者注意（參考§2）在這個矩陣中，位於第 k 列的是向量 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_k$ $(k=1, 2, \cdots, n)$ 的坐標。引進坐標列 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 與 $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，我們的變換(47)可以寫爲矩陣的形狀

$$y=Ax。 \tag{48}$$

兩個運算子 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 的和與乘積對應於其對應方陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 與 $B=\|b_{ik}\|_1^n$ 的和與乘積。乘積 $\alpha\boldsymbol{A}$ 對應於矩陣 αA。么運算子 $\boldsymbol{E}$ 對應於么矩陣 $E=\|\delta_{ik}\|_1^n$。這樣一來，選定基底後就在 $\boldsymbol{R}$ 中線性運算子環與元素在 K 中的 n 級方陣環之間，建立了一個同構關係。此時多項式 $f(\boldsymbol{A})$ 對應於矩陣 $f(A)$。

考慮與基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 相伴的 $\boldsymbol{R}$ 中另一基底 $\boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*, \cdots, \boldsymbol{e}_n^*$。那末同(48)一樣，有

$$y^*=A^*x^*, \tag{49}$$

其中 x^*, y^* 爲向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ 在基底 $\boldsymbol{e}_1^*, \boldsymbol{e}_2^*, \cdots, \boldsymbol{e}_n^*$ 中的坐標所組成的單列矩陣，而 $A^*=\|a_{ik}^*\|_1^n$ 爲運算子 $\boldsymbol{A}$ 在這一個基底中的對應方陣。把坐標的變換式寫爲矩陣形狀

$$x=Tx^*, \quad y=Ty^*。 \tag{50}$$

那末由(48)與(50)我們得出：

$$y^*=T^{-1}ATx^*,$$

比較(49)即知：

$$A^*=T^{-1}AT。 \tag{51}$$

(51)式爲本章§5中(31)式的一個特例（在此時 $P=T^{-1}$, $Q=T$）。

定義 10. 兩個矩陣 A 與 B，適合關係式

$$B=T^{-1}AT, \tag{51'}$$

其中 T 爲某一個滿秩矩陣者，稱爲相似的[1]。

[1] 矩陣 T 常可這樣選取，使得他的元素屬於矩陣 A 與 B 的元素所屬的基礎數域 K 裏面。容易驗證相似矩陣的次之三個性質：反身性（矩陣 A 常同他自己相似），對稱性（如果 A 與 B 相似，那末 B 亦與 A 相似）與遞推性（如果 A 與 B 相似，B 與 C 相似，那末 A 亦與 C 相似）。

這樣一來，我們證明了，對於不同的基底，對應於 $\boldsymbol{R}$ 中同一的線性運算子的兩個矩陣彼此相似，而且連結這些矩陣的矩陣 T，與從第一基底變到第二基底去的坐標變換矩陣相同[參考(50)]。

換句話說，$\boldsymbol{R}$ 中線性運算子對應於彼此相似的全部矩陣所構成的矩陣類；這些矩陣是在不同的基底中與所予運算子相對應的矩陣。

研究 $\boldsymbol{R}$ 中線性運算子的性質，就是研究相似矩陣類中諸矩陣所公有的性質，亦即研究矩陣的這種性質，當已予矩陣變為他的相似矩陣後所不變的性質。

還要注意，兩個相似矩陣的行列式常相等。事實上，由(51′)知

$$|B|=|T|^{-1}|A|\ |T|=|A|。\tag{52}$$

等式 $|B|=|A|$ 是 A 與 B 相似的必要條件而不是充分條件。

在第六章中，我們將建立起兩個矩陣相似的判定，是即給予兩個 n 級矩陣彼此相似的充分必要條件。

按照等式(52)我們可以界說 $\boldsymbol{R}$ 中線性運算子的行列式($|\boldsymbol{A}|$)，就是了解為對應於所予運算子的任何一個矩陣的行列式。

如果 $|\boldsymbol{A}|=0(\neq 0)$，那末運算子 A 稱為降秩的(滿秩的)。按照這一個定義，在任一基底中降秩(滿秩)運算子對應於降秩(滿秩)矩陣。對於降秩運算子有：

(1)常有向量 $\boldsymbol{x}\neq 0$ 存在使得 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，

(2)$\boldsymbol{AR}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的真子空間。

對於滿秩運算子有：

(1)從 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，必須得出 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$；

(2)$\boldsymbol{AR}\equiv\boldsymbol{R}$，亦即空間 $\boldsymbol{R}$ 中所有的向量都可以寫成 $\boldsymbol{Ax}(\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R})$ 的形狀。

換句話說，$\boldsymbol{R}$ 中線性運算子是降秩的或滿秩的，要視其朒大於或等於零而定。

§7. 線性運算子的特徵數與特徵向量

在研究 $\boldsymbol{R}$ 中線性運算子 $\boldsymbol{A}$ 的構造時，適合次式的向量 $\boldsymbol{x}$ 有重要的作用

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x} \quad (\lambda\in K,\ \boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0})。 \tag{53}$$

這樣的向量稱為運算子 $\boldsymbol{A}$（矩陣 A）的特徵向量，而其對應數 λ 稱為運算子 $\boldsymbol{A}$（矩陣 A）的特徵根或特徵數。

為了求出運算子 $\boldsymbol{A}$ 的特徵數與特徵向量，我們選定 $\boldsymbol{R}$ 中任一基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$。設 $\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{e}_i$ 而 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 為在基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 中運算子 $\boldsymbol{A}$ 所對應的矩陣。比較等式(53)中左右兩節的對應的向量坐標，得出一組純量方程

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=\lambda x_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=\lambda x_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=\lambda x_n, \end{array}\right\} \tag{54}$$

這個方程組亦可以寫為：

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+(a_{nn}-\lambda)x_n=0。 \end{array}\right\} \tag{55}$$

因為所要找出的向量不能等於零，所以在他的坐標 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中，至少有一個坐標必須不等於零。

為了使齊次方程組(55)有非零解的充分必要條件是這一個方程組的行列式等於零：

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0。 \tag{56}$$

方程(56)是關於 λ 的一個 n 次代數方程。這個方程的係數在矩陣

$A=\|a_{ik}\|_1^n$ 的元素所在的同一的數域裏面，亦卽在域 K 裏面。

方程(56)常在幾何學，力學，天文學，物理學的各種問題中遇到，稱爲矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 的特徵方程或長期方程❶(這個方程的左節稱爲矩陣的特徵多項式)。

這樣一來，線性運算子 $\boldsymbol{A}$ 的每一個特徵數 λ 都是特徵方程(56)的根。反之，如果某一個數 λ 是方程(56)的根，那末對於這一個値 λ，方程組(55)因而(54)有非零解 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 亦卽這一個數 λ 對應於運算子 $\boldsymbol{A}$ 的特徵向量 $\boldsymbol{x}=\sum x_i \boldsymbol{e}_i$。

由上述結果，知 $\boldsymbol{R}$ 中任一線性運算子 $\boldsymbol{A}$ 不能有多於 n 個不同的特徵數。

如果 K 是所有複數的域，那末 $\boldsymbol{R}$ 中任一線性運算子都至少在 $\boldsymbol{R}$ 中有一個特徵向量與對應於這個特徵向量的特徵數 λ❷。這可以從複數的基本定理來得出，因爲代數方程(56)在複數域中至少有一個根。

寫方程(56)爲展開式

$$|A-\lambda E|\equiv(-\lambda)^n+S_1(-\lambda)^{n-1}+S_2(-\lambda)^{n-2}+\cdots+S_{n-1}(-\lambda)+S_n=0; \quad (57)$$

不難看出，在此處有

$$S_1=\sum_{i=1}^n a_{ii}, \quad S_2=\sum_{1\leqslant i<k\leqslant n} A\begin{pmatrix} i & k \\ i & k \end{pmatrix}, \cdots, \quad (58)$$

一般的，S_p 等於矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 的所有 p 級主子式的和$(p=1,2,\cdots,n)$❸。

---

❶ 這一名稱是這樣來的，因爲在長期的行星擾動的硏究中遇到過這一個方程。

❷ 如果 K 是任何一個代數閉合域，亦卽係數在這個域中的所有代數方程都有根在這個域的裏面，那末這個論斷對於這一種更普遍的情形仍然眞確。

❸ 冪次 $(-\lambda)^{n-p}$ 祇有在特徵行列式(56)中含有任何 $n-p$ 個對角線上元素

$$a_{j_1j_1}-\lambda, \quad a_{j_2j_2}-\lambda, \quad \cdots, \quad a_{j_{n-p}j_{n-p}}-\lambda$$

的項中才能出現。這些對角線上元素的乘積在行列式(56)中有因子等於主子式

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_p \end{pmatrix},$$

其中足數 $i_1, i_2, \cdots, i_p$ 與足數 $j_1, j_2, \cdots, j_{n-p}$ 一同構成全部足數 $1, 2, \cdots, n$:

$|A-\lambda E|=(a_{j_1j_1}-\lambda)(a_{j_2j_2}-\lambda)\cdots(a_{j_{n-p}j_{n-p}}-\lambda)A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_p \end{pmatrix}+\cdots$ 此處須乘 $(-\lambda)^{n-p}$ 以 $A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_p \end{pmatrix}$。找出由足數 $1, 2, \cdots, n$ 中取 $n-p$ 個 $j_1, j_2, \cdots, j_{n-p}$ 的所有可能的組合，我們就得出 $(-\lambda)^{n-p}$ 的係數 S_p，就是矩陣 A 的所有 p 級主子式的和。

特別的，$S_n = |A|$。

以 $\widetilde{A}$ 記在另一基底中對應於同一運算子 $\boldsymbol{A}$ 的矩陣。矩陣 $\widetilde{A}$ 與矩陣 A 相似：

$$\widetilde{A} = T^{-1}AT。$$

故有

$$\widetilde{A} - \lambda E = T^{-1}(A - \lambda E)T,$$

因而

$$|\widetilde{A} - \lambda E| = |A - \lambda E|。\tag{59}$$

這樣一來，相似矩陣 A 與 $\widetilde{A}$ 有相同的特徵多項式。這個多項式常稱為運算子 $\boldsymbol{A}$ 的特徵多項式且記之以 $|\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E}|$。

如果 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \cdots$ 是運算子 $\boldsymbol{A}$ 的線性無關的特徵向量，都對應於同一特徵數 λ，而 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ 為 K 中任何數，那末向量 $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} + \gamma\boldsymbol{z} + \cdots$ 或等於零，或者是運算子 $\boldsymbol{A}$ 的對應於同一數 λ 的特徵向量。事實上，由

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \lambda\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{z} = \lambda\boldsymbol{z}, \cdots$$

知有

$$\boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} + \gamma\boldsymbol{z} + \cdots) = \lambda(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} + \gamma\boldsymbol{z} + \cdots)。$$

換句話說，對應於同一特徵數 λ 的線性無關的特徵向量構成一個"特徵"子空間的基底，這一子空間中每一個向量都是對應於同一數 λ 的特徵向量。特別的，每一個特徵向量產生一個一維特徵子空間，成一個"特徵方向"。

但是如果運算子 $\boldsymbol{A}$ 的一些特徵向量對應於不同的特徵數，那末這些特徵向量的線性組合，一般的說，不是運算子 $\boldsymbol{A}$ 的特徵向量。

特徵向量與特徵數對於線性運算子的研究的價值，將在次節中用單構線性運算子為例來予以說明。

§8. 單構線性運算子

首先有次之引。

引 對應於兩兩不相等的特徵數的諸特徵向量常線性無關。

證明　設

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i=\lambda_i\boldsymbol{x}_i\ (\boldsymbol{x}_i\neq\boldsymbol{0};\ \lambda_i\neq\lambda_k,\ \text{如果}\ i\neq k;\ i,k=1,2,\cdots,m)\tag{60}$$

且設

$$\sum_{i=1}^{m}c_i\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{0}\ 。\tag{61}$$

對這一等式的兩節施行運算子 $\boldsymbol{A}$，我們得出：

$$\sum_{i=1}^{m}c_i\lambda_i\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{0}\ 。\tag{62}$$

乘等式(61)的兩節以 λ_1 而後從(62)中減去他，我們得出：

$$\sum_{i=2}^{m}c_i(\lambda_i-\lambda_1)\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{0}\ 。\tag{63}$$

我們亦可以說，等式(63)是從(61)式逐項施行運算子 $\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{E}$ 來得出的。對(63)逐項施行運算子 $\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{A}-\lambda_3\boldsymbol{E}$, $\cdots$, $\boldsymbol{A}-\lambda_{m-1}\boldsymbol{E}$，我們得出次之等式：

$$c_m(\lambda_m-\lambda_{m-1})(\lambda_m-\lambda_{m-2})\cdots(\lambda_m-\lambda_1)\boldsymbol{x}_m=\boldsymbol{0},$$

故 $c_m=0$ 。因爲在(61)式中，任何一項都可以放在最後一項的位置，所以在(61)中

$$c_1=c_2=\cdots=c_m=0,$$

亦卽在向量 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 間不能有線性相關性。我們的引已經證明。

如果運算子的特徵方程有 n 個不同的根而且這些根都在域 K 裏面，那末由上引知對應於這些根的特徵向量線性無關。

定義 11. $\boldsymbol{R}$ 中線性運算子 $\boldsymbol{A}$ 稱爲*單構運算子*，如果 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{R}$ 中有 n 個線性無關的特徵向量，其中 n 爲 $\boldsymbol{R}$ 的維數。

這樣一來，$\boldsymbol{R}$ 中線性運算子是單構的，如果他的特徵多項式的根都在域 K 裏面而且彼此都不相等。但這一條件並不是必要的。有這樣的單構線性運算子存在，他的特徵多項式含有重根。

討論任一單構線性運算子 $\boldsymbol{A}$ 。以 $\boldsymbol{g}_1,\boldsymbol{g}_2,\cdots,\boldsymbol{g}_n$ 記 $\boldsymbol{R}$ 中由這個運算子的特徵向量所組成的基底，亦卽

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{g}_k=\lambda_k\boldsymbol{g}_k \quad (k=1, 2, \cdots, n)。$$

如果
$$\boldsymbol{x}=\sum_{k=1}^{n}x_k\boldsymbol{g}_k,$$

那末
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\sum_{k=1}^{n}x_k\boldsymbol{A}\boldsymbol{g}_k=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\boldsymbol{g}_k。$$

換句話說，單構運算子 $\boldsymbol{A}$ 對向量 $\boldsymbol{x}=\sum_{k=1}^{n}x_k\boldsymbol{g}_k$ 的影響可述之如次：在 n 維向量空間 $\boldsymbol{R}$ 中，有 n 個線性無關的"方向"存在，沿某一單構運算子 $\boldsymbol{A}$ 得出係數爲 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的"引伸"。任一向量 $\boldsymbol{x}$ 都可以沿這些特徵方向來分解分量。對這些分量取對應的"引伸"後加起就得出向量 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$。

不難看出，運算子 $\boldsymbol{A}$ 在"特徵"基底 $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \cdots, \boldsymbol{g}_n$ 中對應於對角形矩陣

$$\widetilde{A}=\|\lambda_i\delta_{ik}\|_1^n。$$

如果我們以 A 記在任一基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 中對應於運算子 $\boldsymbol{A}$ 的矩陣，那末

$$A=T\|\lambda_i\delta_{ik}\|_1^nT^{-1}。\tag{64}$$

與對角形矩陣相似的矩陣稱爲單構矩陣。這樣一來，在任一基底中，單構運算子都對應於單構矩陣，反之亦然。

在等式 (64) 中的矩陣 T 演化基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 爲基底 $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \cdots, \boldsymbol{g}_n$。在矩陣 T 的第 k 列是，對應於矩陣 A 的特徵數 λ_k 的，特徵向量 $\boldsymbol{g}_k$ (在基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 中) 的坐標 $(k=1, 2, \cdots, n)$。矩陣 T 稱爲關於矩陣 A 的基礎矩陣。

等式(64)可以寫爲：

$$A=TLT^{-1} \quad (L=\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\})。\tag{64'}$$

化到 p 層締結矩陣$(1\leqslant p\leqslant n)$，我們得出(參考第一章的 § 4)：

$$\mathfrak{A}_p=\mathfrak{T}_p\mathfrak{L}_p\mathfrak{T}_p^{-1};\tag{65}$$

$\mathfrak{L}_p$ 爲 N 級對角形矩陣 $(N=C_n^p)$，在其對角線上是從 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 中取 p 個的所有可能的乘積。比較(65)與(64')，給予我們以次之

定理 3. 如果矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 是單構的，那末對於任何 $p\leqslant n$，其 p 層縮結矩陣 $\mathfrak{A}_p$ 亦是單構的；此時矩陣 $\mathfrak{A}_p$ 的特徵數是從矩陣 A 的特徵數 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 中取 p 個的所有可能的乘積 $\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\cdots\lambda_{i_p}(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n)$，而矩陣 $\mathfrak{A}_p$ 的基礎矩陣爲矩陣 A 的基礎矩陣 T 的 p 層縮結矩陣 $\mathfrak{T}_p$。

推論 如果單構矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 的特徵數對應於有坐標 $t_{1k}, t_{2k}, \cdots, t_{nk}$ $(k=1, 2, \cdots, n)$ 的特徵向量，而且 $T=\|t_{ik}\|_1^n$，那末矩陣 $\mathfrak{A}_p$ 的特徵數 $\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \cdots, \lambda_{k_p}$ $(1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_p\leqslant n)$ 對應於有坐標

$$T\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_p \end{pmatrix} \quad (1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n) \tag{66}$$

的特徵向量。

任一矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 都可以表爲矩陣序列 $A_m(m\to\infty)$ 的極限，其中每一個都沒有多重特徵數因而是單構的。當 $m\to\infty$ 時，矩陣 A_m 的特徵數 $\lambda_1^{(m)}, \lambda_2^{(m)}, \cdots, \lambda_n^{(m)}$ 的極限爲矩陣 A 的特徵數 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，亦即

$$\lim_{m\to\infty}\lambda_k^{(m)}=\lambda_k \quad (k=1, 2, \cdots, n)。$$

故有

$$\lim_{m\to\infty}\lambda_{k_1}^{(m)}\lambda_{k_2}^{(m)}\cdots\lambda_{k_p}^{(m)}=\lambda_{k_1}\lambda_{k_2}\cdots\lambda_{k_p} \quad (1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_p\leqslant n)。$$

因爲還有 $\lim\limits_{m\to\infty}\mathfrak{A}_{(m)p}=\mathfrak{A}_p$，故從定理 3 推得

定理 4.（克朗南格） 如果 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是任一矩陣的全部特徵數，那末由數 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 中取出 p 個的所有可能的乘積爲縮結矩陣 $\mathfrak{A}_p$ 的全部特徵數 $(p=1, 2, \cdots, n)$。

在這一節中，我們祇研究單構運算子與單構矩陣。至於運算子與矩陣的一般類型的結構的研究將在第六與第七章中述及。

第四章　矩陣的特徵多項式與最小多項式

與每一個矩陣相結合的有兩個多項式:特徵多項式與最小多項式。這些多項式在矩陣論的各種問題中有重要的作用。例如,將在次章中引進的關於矩陣的函數概念就完全奠基於矩陣的最小多項式的概念。在這一章中我們來討論特徵多項式與最小多項式的性質。這些探討開端於關於有矩陣係數的多項式與他們間的運算的基本性質。

§1. 矩陣多項式的加法與乘法

討論多項式的方陣 $A(\lambda)$,亦卽元素爲 λ 的多項式(係數在已予數域 K 中)的方陣:

$$A(\lambda)=\|a_{ik}(\lambda)\|_1^n=\|a_{ik}^{(0)}\lambda^m+a_{ik}^{(1)}\lambda^{m-1}+\cdots+a_{ik}^{(m)}\|_1^n。\qquad (1)$$

矩陣 $A(\lambda)$ 可以表爲對 λ 來展開的以矩陣爲係數的多項式:

$$A(\lambda)=A_0\lambda^m+A_1\lambda^{m-1}+\cdots+A_m,\qquad (2)$$

其中

$$A_j=\|a_{ik}^{(j)}\|_1^n\quad (j=0,1,\cdots,m)。\qquad (3)$$

如果 $A_0\neq 0$,數 m 稱爲多項式的次數。數 n 稱爲多項式的階。如果 $|A_0|\neq 0$,多項式(1)稱爲正則的。

以矩陣爲係數的多項式,我們常稱爲矩陣多項式。爲了與矩陣多項式有所區別,平常的以純量爲係數的多項式稱爲純量多項式。

討論矩陣多項式的基本運算。設給予兩個同級的矩陣多項式 $A(\lambda)$ 與 $B(\lambda)$。以 m 記這些多項式的較大次數。這些多項式可以寫爲

$$A(\lambda)=A_0\lambda^m+A_1\lambda^{m-1}+\cdots+A_m,$$
$$B(\lambda)=B_0\lambda^m+B_1\lambda^{m-1}+\cdots+B_m。$$

那末

$$A(\lambda)\pm B(\lambda)=(A_0\pm B_0)\lambda^m+(A_1\pm B_1)\lambda^{m-1}+\cdots+(A_m\pm B_m),$$

亦卽兩個同級的矩陣多項式的和(差)可以表爲次數不超過所予多項式的較大次數的矩陣多項式。

設給予級數同爲 n 而次數各爲 m 與 p 的兩個矩陣多項式 $A(\lambda)$ 與 $B(\lambda)$:

$$A(\lambda)=A_0\lambda^m+A_1\lambda^{m-1}+\cdots+A_m \quad (A_0\neq 0),$$
$$B(\lambda)=B_0\lambda^p+B_1\lambda^{p-1}+\cdots+B_p \quad (B_0\neq 0)。$$

那末

$$A(\lambda)B(\lambda)=A_0B_0\lambda^{m+p}+(A_0B_1+A_1B_0)\lambda^{m+p-1}+\cdots+A_mB_p。\quad (4)$$

如果我們以 $B(\lambda)$ 乘 $A(\lambda)$ (亦卽互易因子的次序), 那末一般的我們得出另一多項式。

矩陣多項式的相乘還有一個特殊的性質。與純量多項式不同, 矩陣多項式的乘積(4)可能有小於 $m+p$ 的次數, 亦卽小於其因子的次數的和。事實上, 在(4)中矩陣的乘積 A_0B_0, 在 $A_0\neq 0$, $B_0\neq 0$ 時, 可能等於零。但如在矩陣 A_0 與 B_0 中有一個是滿秩矩陣時, 那末由 $A_0\neq 0$ 與 $B_0\neq 0$ 得出: $A_0B_0\neq 0$。這樣一來, 兩個矩陣多項式的乘積等於一個矩陣多項式, 他的次數小於或等於因式的次數的和。如果在兩個因式中, 至少有一個是正則多項式, 那末乘積的次數常等於因式的次數的和。

§ 2. 矩陣多項式的右除與左除

設給予級數同爲 n 的兩個矩陣多項式 $A(\lambda)$ 與 $B(\lambda)$, 且設 $B(\lambda)$ 是正則的:

$$A(\lambda)=A_0\lambda^m+A_1\lambda^{m-1}+\cdots+A_m \quad (A_0\neq 0),$$
$$B(\lambda)=B_0\lambda^p+B_1\lambda^{p-1}+\cdots+B_p \quad (|B_0|\neq 0)。$$

我們說, 在以 $B(\lambda)$ 除 $A(\lambda)$ 時, 矩陣多項式 $Q(\lambda)$ 與 $R(\lambda)$ 各爲其右商與右餘, 如果

$$A(\lambda)=Q(\lambda)B(\lambda)+R(\lambda) \quad (5)$$

而且如 $R(\lambda)\neq 0$, 則其次數小於 $B(\lambda)$ 的次數。

同樣的，在以 $B(\lambda)$除 $A(\lambda)$時，稱矩陣多項式 $\hat{Q}(\lambda)$與 $\hat{R}(\lambda)$各爲其左商與左餘，如果

$$A(\lambda)=B(\lambda)\hat{Q}(\lambda)+\hat{R}(\lambda) \tag{6}$$

而且如 $\hat{R}(\lambda)\neq 0$，則其次數小於 $B(\lambda)$的次數。

讀者要注意，在(5)中以"除式" $B(\lambda)$來"右"除時(亦即求出其右商與右餘)，$B(\lambda)$乘在商式 $Q(\lambda)$的右邊，而在(6)中，以除式 $B(\lambda)$來"左"除時，$B(\lambda)$乘在商式 $\hat{Q}(\lambda)$ 的左邊。在一般的情形，多項式 $Q(\lambda)$ 與 $R(\lambda)$並不與 $\hat{Q}(\lambda)$及 $\hat{R}(\lambda)$重合。

我們來證明，如果除式是正則多項式，那末兩個同級矩陣多項式，無論右除或左除，常可唯一的施行。

討論 $B(\lambda)$右除 $A(\lambda)$的情形。如果 $m<p$，那末可以取 $Q(\lambda)=0$，$R(\lambda)=A(\lambda)$。在 $m\geqslant p$ 時可以用平常的以多項式除多項式的方法來求出商式 $Q(\lambda)$與餘式 $R(\lambda)$。"除"被除式的首項 $A_0\lambda^m$ 以除式的首項 $B_0\lambda^p$。得出所求的商式的首項 $A_0B_0^{-1}\lambda^{m-p}$。右乘這一項以 $B(\lambda)$ 且在 $A(\lambda)$ 中減去這一個乘積。我們求出"第一個餘式" $A^{(1)}(\lambda)$：

$$A(\lambda)=A_0B_0^{-1}\lambda^{m-p}B(\lambda)+A^{(1)}(\lambda)。 \tag{7}$$

多項式 $A^{(1)}(\lambda)$如不爲零，其次數 $m^{(1)}$小於 m：

$$A^{(1)}(\lambda)=A_0^{(1)}\lambda^{m^{(1)}}+\cdots \quad (A_0^{(1)}(\lambda)\neq 0,\ m^{(1)}<m)。 \tag{8}$$

如果 $m^{(1)}\geqslant p$，那末重複這一做法，我們得出：

$$\left.\begin{aligned} &A^{(1)}(\lambda)=A_0^{(1)}B_0^{-1}\lambda^{m^{(1)}-p}B(\lambda)+A^{(2)}(\lambda),\\ &A^{(2)}(\lambda)=0 \text{ 或 } A^{(2)}(\lambda)=A_0^{(2)}\lambda^{m^{(2)}}+\cdots(m^{(2)}<m^{(1)})\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

諸如此類。

因爲多項式 $A(\lambda)$，$A^{(1)}(\lambda)$，$A^{(2)}(\lambda)$，…的次數逐一下降，所以在某一步驟後，我們得出餘式 $R(\lambda)$，如不爲零則其次數小於 p。那末由(7)，(9)等等，我們得出：

$$A(\lambda)=Q(\lambda)B(\lambda)+R(\lambda),$$

其中

$$Q(\lambda)=A_0B_0^{-1}\lambda^{m-p}+A_0^{(1)}B_0^{-1}\lambda^{m^{(1)}-p}+\cdots。\tag{10}$$

現在來證明右除的唯一性。設同時有

$$A(\lambda)=Q(\lambda)B(\lambda)+R(\lambda)\tag{11}$$

與

$$A(\lambda)=Q^*(\lambda)B(\lambda)+R^*(\lambda),\tag{12}$$

其中 $R(\lambda)$ 與 $R^*(\lambda)$ 如有次數，則其次數小於 $B(\lambda)$ 的次數，亦即小於 p。由(12)減去(11)，我們得出：

$$[Q(\lambda)-Q^*(\lambda)]B(\lambda)=R^*(\lambda)-R(\lambda)。\tag{13}$$

如果 $Q(\lambda)-Q^*(\lambda)\neq 0$，那末因爲 $|B_0|\neq 0$，等式(13)的左節的次數等於 $B(\lambda)$ 與 $Q(\lambda)-Q^*(\lambda)$ 的次數的和，所以 $\geqslant p$。這是不可能的，因爲等式(13)的右節的多項式不能有大於或等於 p 的次數。這樣一來，$Q(\lambda)-Q^*(\lambda)\equiv 0$，因而由(13)得 $R^*(\lambda)-R(\lambda)=0$，亦即

$$Q(\lambda)=Q^*(\lambda),\ \ R(\lambda)=R^*(\lambda)。$$

同理，可以證明左商與左除的存在與其唯一性[1]。

例

$$A(\lambda)=\left\|\begin{matrix}\lambda^3+\lambda & 2\lambda^3+\lambda^2\\ -\lambda^3-2\lambda^2+1 & 3\lambda^3+\lambda\end{matrix}\right\|=$$

$$=\overbrace{\left\|\begin{matrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{matrix}\right\|}^{A_0}\lambda^3+\left\|\begin{matrix}0 & 1\\ -2 & 0\end{matrix}\right\|\lambda^2+\left\|\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right\|\lambda+\left\|\begin{matrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{matrix}\right\|,$$

---

[1] 注意，以 $B(\lambda)$ 來左除 $A(\lambda)$ 的可能性與唯一性可以從轉置矩陣 $A'(\lambda)$ 與 $B'(\lambda)$ 的右除的可能性與唯一性來得出。(由 $B(\lambda)$ 的正則性可推出 $B'(\lambda)$ 的正則性。)事實上，由

$$A'(\lambda)=Q_1(\lambda)B'(\lambda)+R_1(\lambda)$$

得出(參考第一章，§3，3，4°)：

$$A(\lambda)=B(\lambda)Q_1'(\lambda)+R_1'(\lambda)。\tag{6'}$$

由於同樣的推理我們得出左除 $A(\lambda)$ 以 $B(\lambda)$ 的唯一性，因爲由左除 $A(\lambda)$ 以 $B(\lambda)$ 的非唯一性將推得右除 $A'(\lambda)$ 以 $B'(\lambda)$ 的非唯一性。

比較(6)與(6′)，我們得出：

$$\hat{Q}(\lambda)=Q_1'(\lambda),\ \hat{R}(\lambda)=R_1'(\lambda)。$$

$$B(\lambda)=\begin{Vmatrix}2\lambda^2+3 & -\lambda^2+1\\ -\lambda^2-1 & \lambda^2+2\end{Vmatrix}=\overbrace{\begin{Vmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{Vmatrix}}^{B_0}\lambda^2+\begin{Vmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{Vmatrix},$$

$$|B_0|=1,\ B_0^{-1}=\begin{Vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{Vmatrix},\quad A_0B_0^{-1}=\begin{Vmatrix}3 & 5\\ 2 & 5\end{Vmatrix},\quad A_0B_0^{-1}B(\lambda)=\begin{Vmatrix}\lambda^2+1 & 2\lambda^2+13\\ -\lambda^2+1 & 3\lambda^2+12\end{Vmatrix},$$

$$A^{(1)}(\lambda)=\begin{Vmatrix}\lambda^3+\lambda & 2\lambda^3+\lambda^2\\ -\lambda^3-2\lambda^2+1 & 3\lambda^3+\lambda\end{Vmatrix}-\begin{Vmatrix}\lambda^3+4\lambda & 2\lambda^3+13\lambda\\ -\lambda^3+\lambda & 3\lambda^3+12\lambda\end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix}-3\lambda & \lambda^2-13\lambda\\ -2\lambda^2-\lambda+1 & -11\lambda\end{Vmatrix},$$

$$A^{(1)}(\lambda)=\begin{Vmatrix}0 & 1\\ -2 & 0\end{Vmatrix}\lambda^2+\begin{Vmatrix}-3 & -13\\ -1 & -11\end{Vmatrix}\lambda+\begin{Vmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{Vmatrix},$$

$$A_0^{(1)}B_0^{-1}=\begin{Vmatrix}0 & 1\\ -2 & 0\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}1 & 2\\ -2 & -2\end{Vmatrix},$$

$$A_0^{(1)}B_0^{-1}B(\lambda)=\begin{Vmatrix}1 & 2\\ -2 & -2\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}2\lambda^2+3 & -\lambda^2-1\\ -\lambda^2-1 & \lambda^2+2\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}1 & \lambda^2+5\\ -2\lambda^2-4 & -6\end{Vmatrix},$$

$$R(\lambda)=A^{(1)}(\lambda)-A_0^{(1)}B_0^{-1}B(\lambda)=$$

$$=\begin{Vmatrix}-3\lambda & \lambda^2-13\lambda\\ -2\lambda^2-\lambda+1 & -11\lambda\end{Vmatrix}-\begin{Vmatrix}1 & \lambda^2+5\\ -2\lambda^2-4 & -6\end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix}-3\lambda-1 & -13\lambda-5\\ -\lambda+5 & -11\lambda+6\end{Vmatrix},$$

$$Q(\lambda)=A_0B_0^{-1}\lambda+A_0^{(1)}B_0^{-1}=\begin{Vmatrix}3 & 5\\ 2 & 5\end{Vmatrix}\lambda+\begin{Vmatrix}1 & 2\\ -2 & -2\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}3\lambda+1 & 5\lambda+2\\ 2\lambda-2 & 5\lambda-2\end{Vmatrix}。$$

讓讀者自已去驗證次式來作爲練習，

$$A(\lambda)=Q(\lambda)B(\lambda)+R(\lambda)。$$

§3. 廣義裴所定理

討論任何一個 n 級矩陣多項式

$$F(\lambda)=F_0\lambda^m+F_1\lambda^{m-1}+\cdots+F_m\quad(F_0\neq 0)。\tag{14}$$

這個多項式亦可以寫爲：

$$F(\lambda)=\lambda^mF_0+\lambda^{m-1}F_1+\cdots+F_m。\tag{15}$$

對於純量 λ，兩種寫法都給予同樣的結果。但是如果我們代純量 λ 以 n 級方陣，那末代進(14)與(15)中的結果，一般的是不相同的，因

爲矩陣 A 的冪次不一定與係數矩陣 $F_0, F_1, \cdots, F_{m-1}$ 可易。

我們設

$$F(A)=F_0A^m+F_1A^{m-1}+\cdots+F_m \tag{16}$$

與

$$\hat{F}(A)=A^mF_0+A^{m-1}F_1+\cdots+F_m \tag{17}$$

且稱 $F(A)$ 與 $\hat{F}(A)$ 各爲，代 λ 以矩陣 A 時，多項式 $F(\lambda)$ 的右與左值[1]。

除多項式 $F(\lambda)$ 以二項式 $\lambda E-A$。在此時右餘 R 與左餘 $\hat{R}$ 都同 λ 無關。爲了確定右餘，我們用平常的除法步驟：

$$\begin{aligned}F(\lambda)=F_0\lambda^m+F_1\lambda^{m-1}+\cdots+F_m&=F_0\lambda^{m-1}(\lambda E-A)+\\&+(F_0A+F_1)\lambda^{m-1}+F_2\lambda^{m-2}+\cdots=\\&=[F_0\lambda^{m-1}+(F_0A+F_1)\lambda^{m-2}](\lambda E-A)+\\&+(F_0A^2+F_1A+F_2)\lambda^{m-2}+F_3\lambda^{m-3}+\cdots=\\&=[F_0\lambda^{m-1}+(F_0A+F_1)\lambda^{m-2}+\cdots+F_0A^{m-1}+\\&+F_1A^{m-2}+\cdots+F_{m-1}](\lambda E-A)+F_0A^m+\\&+F_1A^{m-1}+\cdots+F_m。\end{aligned}$$

我們得出，

$$R=F_0A^m+F_1A^{m-1}+\cdots+F_m=F(A)。\tag{18}$$

同理得

$$\hat{R}=\hat{F}(A)。\tag{19}$$

我們證明了

定理 1.（廣義裴所定理） 當右（左）除矩陣多項式 $F(\lambda)$ 以二項式 $\lambda E-A$ 時，除得的餘式爲 $F(A)$ $[\hat{F}(A)]$。

由所證明的定理推知，右（左）除多項式 $F(\lambda)$ 以二項式 $\lambda E-A$ 能夠整除的充分必要條件是，$F(A)=0$ $[\hat{F}(A)=0]$。

---

[1] 在"右"值 $F(A)$ 中矩陣 A 的冪次位於係數的右邊而在"左"值 $\hat{F}(A)$ 中則位於左邊。

例 設 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 而 $f(\lambda)$ 爲 λ 的多項式。那末

$$F(\lambda)=f(\lambda)E-f(A)$$

可以被 $\lambda E-A$ 所整除(左或右)。這可以直接從廣義裴所定理來得出，因爲在此時

$$F(A)=\hat{F}(A)=0。$$

§4. 矩陣的特徵多項式．附加矩陣

1. 討論矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$。稱矩陣 $\lambda E-A$ 爲矩陣 A 的特徵矩陣。特徵矩陣的行列式

$$\Delta(\lambda)=|\lambda E-A|=|\lambda\delta_{ik}-a_{ik}|_1^n$$

是一個 λ 的純量多項式且稱爲矩陣 A 的特徵多項式(參考第三章§7)❶。

矩陣 $B(\lambda)=\|b_{ik}(\lambda)\|_1^n$，其中 $b_{ik}(\lambda)$ 爲元素 $\lambda\delta_{ik}-a_{ik}$ 在行列式 $\Delta(\lambda)$ 中的代數餘子式者，稱爲關於矩陣 A 的附加矩陣。

例如，對於矩陣

$$A=\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right\|$$

我們有：

$$\lambda E-A=\left\|\begin{matrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda-a_{33} \end{matrix}\right\|,$$

$$\Delta(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2+\cdots,$$

$$B(\lambda)=\left\|\begin{matrix} \lambda^2-(a_{22}+a_{33})\lambda+a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32} & * & * \\ a_{21}\lambda+a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33} & * & * \\ a_{31}\lambda+a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31} & * & * \end{matrix}\right\|。$$

由上述定義，我們得出關於 λ 的恆等式：

$$(\lambda E-A)B(\lambda)=\Delta(\lambda)E, \tag{20}$$

$$B(\lambda)(\lambda E-A)=\Delta(\lambda)E。 \tag{20'}$$

❶ 第三章§7中所引進的多項式與多項式 $\Delta(\lambda)$ 祇差一個因子 $(-1)^n$。

這些等式的右節可以視爲有矩陣係數的多項式(每一係數都等於一個純量與么矩陣 E 的乘積)。多項式矩陣 $B(\lambda)$,可以對 λ 的冪次展開,表爲多項式的形狀。等式(20)與(20′)證明了以 $\lambda E-A$ 左或右除 $\Delta(\lambda)E$ 都能除盡。由廣義裴所定理,這祇有在餘式 $\Delta(A)E=\Delta(A)$ 等於零時才能成立。我們證明了。

定理 2. (赫密登-凱萊) 每一個方陣 A 都適合他的特徵方程,亦即

$$\Delta(A)=0。\tag{21}$$

例

$$A=\left\|\begin{matrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{matrix}\right\|,$$

$$\Delta(\lambda)=\left\|\begin{matrix}\lambda-2 & -1\\ 1 & \lambda-3\end{matrix}\right\|=\lambda^2-5\lambda+7,$$

$$\Delta(A)=A^2-5A+7E=\left\|\begin{matrix}3 & 5\\ -5 & 8\end{matrix}\right\|-5\left\|\begin{matrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{matrix}\right\|+7\left\|\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\|=0。$$

2. 以 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 記矩陣 A 的所有特徵數,亦即特徵多項式 $\Delta(\lambda)$ 的所有的根(每一個數 λ_i 在這一序列中所重復出現的次數等於其作爲多項式 $\Delta(\lambda)$ 的根的重數)。那末

$$\Delta(\lambda)=|\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)。\tag{22}$$

設給予任一純量多項式 $g(\mu)$。求出矩陣 $g(A)$ 的特徵數。爲此可分解 $g(\mu)$ 爲線性因子的乘積

$$g(\mu)=a_0(\mu-\mu_1)(\mu-\mu_2)\cdots(\mu-\mu_l)。\tag{23}$$

在這一恆等式的兩節中,代 μ 以矩陣 A:

$$g(A)=a_0(A-\mu_1E)(A-\mu_2E)\cdots(A-\mu_lE)。\tag{24}$$

在等式(24)的兩節取行列式且應用等式(22)與(23),我們得出:

$$\begin{aligned}|g(A)|&=a_0^n|A-\mu_1E||A-\mu_2E|\cdots|A-\mu_lE|=\\&=(-1)^{nl}a_0^n\Delta(\mu_1)\Delta(\mu_2)\cdots\Delta(\mu_l)=\\&=(-1)^{nl}a_0^n\prod_{i=1}^{l}\prod_{k=1}^{n}(\mu_i-\lambda_k)=g(\lambda_1)g(\lambda_2)\cdots g(\lambda_n)。\end{aligned}$$

在等式

$$|g(A)|=g(\lambda_1)g(\lambda_2)\cdots g(\lambda_n) \tag{25}$$

中換 $g(\mu)$ 以 $\lambda-g(\mu)$，其中 λ 為一個參變數，我們得出：

$$|\lambda E-g(A)|=[\lambda-g(\lambda_1)][\lambda-g(\lambda_2)]\cdots[\lambda-g(\lambda_n)]。 \tag{26}$$

由這一個等式推得次之

定理 3. 如 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 為矩陣 A 所有的特徵數(多重根重復計入)，而 $g(\mu)$ 為某一純量多項式，那末 $g(\lambda_1), g(\lambda_2), \cdots, g(\lambda_n)$ 為矩陣 $g(A)$ 所有的特徵數。

特別的，如果矩陣 A 有特徵數 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，那末矩陣 A^k 有特徵數 $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k (k=0, 1, 2, 3, \cdots)$。

3. 我們來指出一個把附加矩陣 $B(\lambda)$ 經特徵多項式 $\Delta(\lambda)$ 來表出的有效公式。

設

$$\Delta(\lambda)=\lambda^n-p_1\lambda^{n-1}-p_2\lambda^{n-2}-\cdots-p_n。 \tag{27}$$

差 $\Delta(\lambda)-\Delta(\mu)$ 可以被 $\lambda-\mu$ 所整除。因此

$$\delta(\lambda, \mu)=\frac{\Delta(\lambda)-\Delta(\mu)}{\lambda-\mu}=\lambda^{n-1}+(\mu-p_1)\lambda^{n-2}+$$
$$+(\mu^2-p_1\mu-p_2)\lambda^{n-3}+\cdots \tag{28}$$

是 λ 與 μ 的多項式。

恆等式

$$\Delta(\lambda)-\Delta(\mu)=\delta(\lambda, \mu)(\lambda-\mu) \tag{29}$$

仍然成立，如果我們在他裏面代替 λ 與 μ 以彼此可易的矩陣 $\lambda E-A$。那末，因由赫密登-凱萊定理 $\Delta(A)=0$，故有

$$\Delta(\lambda)E=\delta(\lambda E, A)(\lambda E-A)。 \tag{30}$$

比較(20′)與(30)，由於商式的唯一性，我們得出所求的公式

$$B(\lambda)=\delta(\lambda E, A)。 \tag{31}$$

故由(28)，

$$B(\lambda)=\lambda^{n-1}+B_1\lambda^{n-2}+B_2\lambda^{n-3}+\cdots+B_{n-1}, \tag{32}$$

其中　$B_1=A-p_1E,\ B_2=A^2-p_1A-p_2E,\cdots,$

而一般的有

$$B_k=A^k-p_1A^{k-1}-p_2A^{k-2}-\cdots-p_kE\ (k=1,2,\cdots,n-1)。\quad(33)$$

矩陣 $B_1, B_2,\cdots, B_{n-1}$ 可以從次之循環關係中順次計算出來，

$$B_k=AB_{k-1}-p_kE\ (k=1,2,\cdots,n-1;\ B_0=E)。\quad(34)$$

此處有

$$AB_{n-1}-p_nE=0❶。\quad(35)$$

關係式(34)與(35)可以直接從恆等式(20)來得出，祇要我們在這一恆等式中使兩節中 λ 的相同冪次的係數相等。

如果 A 是滿秩矩陣，那末

$$p_n=(-1)^{n-1}|A|\neq0$$

且由(35)得出：

$$A^{-1}=\frac{1}{p_n}B_{n-1}。\quad(36)$$

設 λ_0 爲矩陣 A 的特徵數，亦卽 $\Delta(\lambda_0)=0$。在(20)中代入以 λ_0，我們得出：

$$(\lambda_0E-A)B(\lambda_0)=0。\quad(37)$$

我們設矩陣 $B(\lambda_0)\neq0$，且以 b 記這一矩陣的任何一個非零列。那末由(37)有 $(\lambda_0E-A)b=0$ 或

$$Ab=\lambda_0b。\quad(38)$$

故知矩陣 $B(\lambda_0)$ 的任何一個非零列定出一個對應於特徵數 λ_0 的特徵向量❷。

---

❶ 從(34)可以得出等式(33)。如果在(35)中代換 B_{n-1} 以其(33)中的表示式，那末我們就得出：$\Delta(A)=0$。這一個赫密登-凱萊的結果並沒有明顯的用到廣義裴所定理，但是暗中是含有這一定理的。

❷ 參考第三章§7。如果特徵數 λ_0 對應於 d_0 個線性無關的特徵向量（$n-d_0$ 爲矩陣 λ_0E-A 的秩），那末矩陣 $B(\lambda_0)$ 的秩不能超過 d_0。特別的，如果 λ_0 祇對應於一個特徵方向，那末在矩陣 $B(\lambda_0)$ 中任何兩列的元素都是成比例的。

這樣一來，如果已經知道特徵多項式的係數，那末可以由(31)式來求出附加矩陣。如果給予了滿秩矩陣 A，那末由(36)式可以求出逆矩陣 A^{-1}。如果 λ_0 是矩陣 A 的特徵數，那末矩陣 $B(\lambda_0)$ 的非零列都是矩陣 A 的對應於 $\lambda=\lambda_0$ 的特徵向量。

例

$$A=\left\|\begin{matrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix}\right\|,$$

$$\Delta(\lambda)=|\lambda E-A|=\left|\begin{matrix} \lambda-2 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda-1 \end{matrix}\right|=\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2,$$

$$\delta(\lambda,\mu)=\frac{\Delta(\lambda)-\Delta(\mu)}{\lambda-\mu}=\lambda^2+\lambda(\mu-4)+\mu^2-4\mu+5,$$

$$B(\lambda)=\delta(\lambda E, A)=\lambda^2E+\lambda\underbrace{(A-4E)}_{B_1}+\underbrace{A^2-4A+5E}_{B_2}。$$

但

$$B_1=A-4E=\left\|\begin{matrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{matrix}\right\|,\quad B_2=AB_1+5E=\left\|\begin{matrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{matrix}\right\|,$$

$$B(\lambda)=\left\|\begin{matrix} \lambda^2-2\lambda & -\lambda+2 & \lambda-2 \\ -1 & \lambda^2-3\lambda+3 & \lambda-2 \\ -\lambda+1 & \lambda-1 & \lambda^2-3\lambda+2 \end{matrix}\right\|,$$

$$|A|=2,\quad A^{-1}=\frac{1}{2}B_2=\left\|\begin{matrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{matrix}\right\|。$$

再者

$$\Delta(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)。$$

矩陣 $B(1)$ 的第一列給予了對應於特徵數 $\lambda=1$ 的特徵向量 $(1, 1, 0)$。

矩陣 $B(2)$ 的第一列給予了對應於特徵數 $\lambda=2$ 的特徵向量 $(0, 1, 1)$。

§5. 同時計算附加矩陣與特徵多項式的係數的德.克.法捷也夫方法

德.克.法捷也夫❶提供了同時定出特徵多項式

---

❶ 參考[28]，192 頁。

$$\Delta(\lambda)=\lambda^n-p_1\lambda^{n-1}-p_2\lambda^{n-2}-\cdots-p_n \tag{39}$$

的純係數 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 與附加矩陣 $B(\lambda)$ 的矩陣係數 $B_1, B_2, \cdots, B_{n-1}$ 的方法。

為了敍述德.克.法捷也夫❶的方法首先引進關於矩陣的追跡概念。

矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 的追跡(記為：$\mathrm{Sp}A$)是這個矩陣的對角線上諸元素的和：

$$\mathrm{Sp}\,A=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}\text{。} \tag{40}$$

不難看出，

$$\mathrm{Sp}\,A=p_1=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i, \tag{41}$$

如果 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是矩陣 A 的特徵數，亦即

$$\Delta(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)\text{。} \tag{42}$$

因為由定理 3，矩陣冪次 A^k 的特徵數為冪次 $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$，所以

$$\mathrm{Sp}\,A^k=s_k=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^k \quad (k=0, 1, 2, \cdots)\text{。} \tag{43}$$

多項式(39)諸根的冪次之和 $s_k(k=1, 2, \cdots, n)$ 與這一多項式的係數之間有牛頓公式❷

$$kp_k=s_k-p_1s_{k-1}-\cdots-p_{k-1}s_1 \quad (k=1, 2, \cdots, n)\text{。} \tag{44}$$

如果計算出矩陣 $A, A^2, \cdots, A^n$ 的追跡 $s_1, s_2, \cdots, s_n$，那末可以由方程(44)依次定出係數 $p_1, p_2, \cdots, p_n$。對此有達凡里方法由矩陣冪次的追跡來求出特徵多項式的係數。

德.克.法捷也夫代替冪次 $A, A^2, \cdots, A^n$ 的追跡來順次計算另一些矩陣 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的追跡且利用他們來定出 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 與 B_1,

❶ 另一個計算特徵多項式的係數的有效方法是阿.恩.克力洛夫的方法，我們將在第七章 §7 中告知讀者。

❷ 參考，例如，[17]，273 頁(柯召譯本，253 頁)。

$B_2, \cdots, B_n$，他提供了次之諸式：

$$\left.\begin{array}{lll} A_1=A, & p_1=\operatorname{Sp} A_1, & B_1=A_1-p_1E, \\ A_2=AB_1, & p_2=\frac{1}{2}\operatorname{Sp} A_2, & B_2=A_2-p_2E, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ A_{n-1}=AB_{n-2}, & p_{n-1}=\frac{1}{n-1}\operatorname{Sp} A_{n-1}, & B_{n-1}=A_{n-1}-p_{n-1}E, \\ A_n=AB_{n-1}, & p_n=\frac{1}{n}\operatorname{Sp} A_n, & B_n=A_n-p_nE=0。 \end{array}\right\} \quad (45)$$

最後的等式 $B_n=A_n-p_nE=0$ 可以作爲驗算之用。

爲了證明由(45)式所順次定出的數 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 與矩陣 $B_1, B_2, \cdots, B_{n-1}$ 是 $\Delta(\lambda)$ 與 $B(\lambda)$ 的係數，我們注意由(45)可推得關於 A_k 與 B_k $(k=1, 2, \cdots, n)$ 的次之諸式：

$$A_k=A^k-p_1A^{k-1}-\cdots-p_{k-1}A,$$
$$B_k=A^k-p_1A^{k-1}-\cdots-p_{k-1}A-p_kE。 \quad (46)$$

在其第一式中比較左右兩節的追跡；我們得出：

$$kp_k=s_k-p_1s_{k-1}-\cdots-p_{k-1}s_1。$$

但是這些式子與牛頓公式 (44) 相同，從他們可以順次定出特徵多項式 $\Delta(\lambda)$ 的係數。因此，由 (45) 式所定出的數 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是 $\Delta(\lambda)$ 的係數。又因(46)的第二式與(33)式一致，從他們可以順次定出附加矩陣 $B(\lambda)$ 的矩陣係數 $B_1, B_2, \cdots, B_{n-1}$，故 (45) 式確定了矩陣多項式 $B(\lambda)$ 的係數 $B_1, B_2, \cdots, B_{n-1}$。

例[1]

$$A=\left\|\begin{array}{rrrr} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ \mathit{2} & \mathit{2} & \mathit{4} & \mathit{3} \end{array}\right\|, \quad p_1=\operatorname{Sp}A=4, \quad B_1=A-4E=\left\|\begin{array}{rrrr} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{array}\right\|;$$

[1] 爲了驗算起見，我們在每一個矩陣 A_1, A_2, A_3 的下面都註上他們的諸行的和數。以乘積中第一個因子的諸行總和順次乘第二個因子的某一個列上元素後相加，必須得出乘積的同一列上諸行的和數。

$$A_2=AB_1=\begin{Vmatrix} -3 & 4 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -5 \\ -3 & -3 & -1 & 3 \end{Vmatrix}, \quad p_2=\frac{1}{2}\mathrm{Sp}A_2=-2,$$

$$-5 \quad -1 \quad -5 \quad -4$$

$$B_2=A_2+2E=\begin{Vmatrix} -1 & 4 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -5 \\ -3 & -3 & -1 & 3 \end{Vmatrix};$$

$$A_3=AB_2=\begin{Vmatrix} -5 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -4 \\ -1 & -7 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & -7 \end{Vmatrix}, \quad p_3=\frac{1}{3}\mathrm{Sp}A_3=-5,$$

$$-5 \quad -1 \quad -7 \quad -9$$

$$B_3=A_3+5E=\begin{Vmatrix} 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -2 & 4 \\ -1 & -7 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & -2 \end{Vmatrix};$$

$$A_4=AB_3=\begin{Vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{Vmatrix}, \quad p_4=-2。$$

$$\Delta(\lambda)=\lambda^4-4\lambda^3+2\lambda^2+5\lambda+2,$$

$$|A|=2, \quad A^{-1}=\frac{1}{p_4}B_3=\begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{Vmatrix}。$$

註　如果我們要定出 p_1, p_2, p_3, p_4 且祇要得出 B_1, B_2, B_3 的第一列，那末祇需要在 A_2 中算出其第一列的元素與其餘諸列在對角線上的元素，在 A_3 中第一列的元素與在 A_4 中第一列的第一與第三個元素。

§6. 矩陣的最小多項式

定義 1.　純量多項式 $f(\lambda)$ 稱爲方陣 A 的化零多項式，如其

$$f(A)=0。$$

首項係數等於 1 且其次數最小的化零多項式 $\psi(\lambda)$稱為矩陣 A 的最小多項式。

由赫密登-凱萊定理知矩陣 A 的特徵多項式$\Delta(\lambda)$是這一矩陣的化零多項式。但是，有如後面的敍述，在一般的情形他不一定是最小的。

除任一化零多項式 $f(\lambda)$以其最小多項式：

$$f(\lambda)=\psi(\lambda)q(\lambda)+r(\lambda),$$

其中 $r(\lambda)$如不為零則其次數小於 $\psi(\lambda)$的次數。故有：

$$f(A)=\psi(A)q(A)+r(A)。$$

因為 $f(A)=0$ 與 $\psi(A)=0$，所以得出 $r(A)=0$。但如 $r(\lambda)$有次數時，其次數將小於最小多項式 $\psi(\lambda)$的次數。故 $r(\lambda)\equiv 0$[1]。這樣一來，矩陣的任何化零多項式都被其最小多項式所整除。

設兩個多項式 $\psi(\lambda)$與 $\psi'(\lambda)$都是同一矩陣的最小多項式。那末每一個都可以被另一個所整除，亦卽這兩個多項式祇能有常數因子的差別。這個常數因子必須等於 1，因為 $\psi(\lambda)$ 與 $\psi'(\lambda)$ 的首項係數都等於 1。我們就證明了對於一個已予矩陣的最小多項式的唯一性。

求出最小多項式與特徵多項式間的關係式。

以 $D_{n-1}(\lambda)$記特徵矩陣 $\lambda E-A$ 中所有 $n-1$ 級子式的最大公因式，亦卽附加矩陣 $B(\lambda)=\|b_{ik}(\lambda)\|_1^n$ 中所有元素的最大公因式（參考上節）。那末

$$B(\lambda)=D_{n-1}(\lambda)C(\lambda), \tag{47}$$

其中 $C(\lambda)$為一個多項式矩陣，他是對於矩陣 $\lambda E-A$ 的“導出”附加矩陣。由(20)與(47)我們得出：

$$\Delta(\lambda)E=(\lambda E-A)C(\lambda)D_{n-1}(\lambda)。 \tag{48}$$

故知 $\Delta(\lambda)$為 $D_{n-1}(\lambda)$所整除[2]：

---

[1] 否則將有一個化零多項式存在，其次數小於最小多項式的次數。

[2] 這可以直接從特徵行列式 $\Delta(\lambda)$ 按照他的任一行展開來證明。

$$\frac{\Delta(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)}=\psi(\lambda), \tag{49}$$

其中 $\psi(\lambda)$為 λ 的一個多項式。在恆等式(48)的兩節中約去 $D_{n-1}(\lambda)$ ❶:

$$\psi(\lambda)E=(\lambda E-A)C(\lambda)。 \tag{50}$$

因 $\psi(\lambda)E$ 爲 $\lambda E-A$ 所左整除,所以由廣義裴所定理,

$$\psi(A)=0。$$

這樣一來,爲(49)式所確定的多項式 $\psi(\lambda)$ 是矩陣 A 的化零多項式。我們來證明,他就是 A 的最小多項式。

以 $\psi^*(\lambda)$記最小多項式。那末 $\psi(\lambda)$可被 $\psi^*(\lambda)$所整除:

$$\psi(\lambda)=\psi^*(\lambda)\chi(\lambda)。 \tag{51}$$

因爲 $\psi^*(A)=0$,所以由廣義裴所定理,矩陣多項式 $\psi^*(\lambda)E$ 爲 $\lambda E-A$ 所左整除:

$$\psi^*(\lambda)E=(\lambda E-A)C^*(\lambda)。 \tag{52}$$

由(51)與(52)得出:

$$\psi(\lambda)E=(\lambda E-A)C^*(\lambda)\chi(\lambda)。 \tag{53}$$

恆等式(50)與(53)說明 $C(\lambda)$與 $C^*(\lambda)\chi(\lambda)$都是以 $\lambda E-A$ 除 $\psi(\lambda)E$ 所得出的左商。由除法唯一性知

$$C(\lambda)=C^*(\lambda)\chi(\lambda)。$$

故知 $\chi(\lambda)$ 爲多項式矩陣 $C(\lambda)$ 的所有元素的公因式。但是另一方面,導出附加矩陣 $C(\lambda)$的所有元素的最大公因式等於 1,因爲這個矩陣是從 $B(\lambda)$除以 $D_{n-1}(\lambda)$所得出來的。故有 $\chi(\lambda)=$常數。因爲在 $\psi(\lambda)$與 $\psi^*(\lambda)$中,首項係數都等於 1,所以在(51)式中 $\chi(\lambda)=1$,亦卽 $\psi(\lambda)=$ $=\psi^*(\lambda)$,這就是所要證明的結果。

我們對於最小多項式已經建立了次之公式:

---

❶ 在所予的情形,與(48)相伴的有恆等式[參考(20')]

$$\psi(\lambda)E=C(\lambda)(\lambda E-A),$$

亦卽 $C(\lambda)$同時爲以 $\lambda E-A$ 除 $\psi(\lambda)E$ 所得出的左商與右商。

$$\psi(\lambda)=\frac{\Delta(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)}。\tag{54}$$

類似於(31)式(在§4, 3)，對於導出附加矩陣$C(\lambda)$,我們有公式:

$$C\lambda=\Psi(\lambda E,\ A),\tag{55}$$

其中$\Psi(\lambda,\mu)$爲次之等式所確定的多項式,

$$\Psi(\lambda,\ \mu)=\frac{\psi(\lambda)-\psi(\mu)}{\lambda-\mu}\text{❶}。\tag{56}$$

再者,

$$(\lambda E-A)C(\lambda)=\psi(\lambda)E。\tag{57}$$

在等式(57)的兩節取行列式,我們得出:

$$\Delta(\lambda)|C(\lambda)|=[\psi(\lambda)]^n。\tag{58}$$

這樣一來,$\Delta(\lambda)$可以爲$\psi(\lambda)$所整除,而$\psi(\lambda)$的某一個冪次又爲$\Delta(\lambda)$所整除，亦即在多項式$\Delta(\lambda)$與$\psi(\lambda)$中所有不相等的根是彼此一致的。換句話說,$\psi(\lambda)$的根給予了矩陣A的所有不相等的特徵數。

如果

$$\Delta(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s}\tag{59}$$

$$(\lambda_i\neq\lambda_j\text{ 如其 }i\neq j;\ n_i>0,\ i,\ j=1,\ 2,\cdots,\ s),$$

那末

$$\psi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{m_s},\tag{60}$$

其中

$$0<m_k\leqslant n_k\quad(k=1,\ 2,\cdots,\ s)。\tag{61}$$

還要注意矩陣$C(\lambda)$的一個性質。設λ_0爲矩陣$A=\|a_{ik}\|_1^n$的任一特徵數。那末$\psi(\lambda_0)=0$，故由(57)

$$(\lambda_0E-A)C(\lambda_0)=0。\tag{62}$$

我們注意,常有$C(\lambda_0)\neq0$。事實上,在相反的情形,導出附加矩陣$C(\lambda)$的所有元素都將爲$\lambda-\lambda_0$所整除,這是不可能的。

---

❶ (55)式可以完全與(31)式相類似的來得出。在恆等式$\psi(\lambda)-\psi(\mu)=(\lambda-\mu)\Psi(\lambda,\mu)$的兩節代$\lambda$與$\mu$以矩陣$\lambda E$與$A$，我們得出與(50)相同的矩陣等式。

以 c 記矩陣 $C(\lambda_0)$ 的任一非零列。那末由(62)

$$(\lambda_0 E - A)c = 0,$$

亦即

$$Ac = \lambda_0 c。\tag{63}$$

換句話說，矩陣 $C(\lambda_0)$ 的任一非零列(這種列常能存在)確定對於 $\lambda = \lambda_0$ 的一個特徵向量。

例

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 3 & -2 \\ 1 & \lambda-5 & 2 \\ 1 & -3 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 20\lambda - 16 = (\lambda-2)^2(\lambda-4),$$

$$\delta(\lambda, \mu) = \frac{\Delta(\mu) - \Delta(\lambda)}{\mu - \lambda} = \mu^2 + \mu(\lambda - 8) + \lambda^2 - 8\lambda + 20,$$

$$B(\lambda) = A^2 + (\lambda - 8)A + (\lambda^2 - 8\lambda + 20)E = \begin{Vmatrix} 10 & -18 & 12 \\ -6 & 22 & -12 \\ -6 & 18 & -8 \end{Vmatrix} +$$

$$+ (\lambda - 8)\begin{Vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{Vmatrix} + (\lambda^2 - 8\lambda + 20)\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \lambda^2 - 5\lambda + 6 & -3\lambda + 6 & 2\lambda - 4 \\ -\lambda + 2 & \lambda^2 - 3\lambda + 2 & -2\lambda + 4 \\ -\lambda + 2 & 3\lambda - 6 & \lambda^2 - 8\lambda + 12 \end{Vmatrix}。$$

矩陣 $B(\lambda)$ 中所有元素都爲 $D_2(\lambda) = \lambda - 2$ 所除盡。約去這個因子，我們得出：

$$C(\lambda) = \begin{Vmatrix} \lambda - 3 & -3 & 2 \\ -1 & \lambda - 1 & -2 \\ -1 & 3 & \lambda - 6 \end{Vmatrix}$$

與

$$\psi(\lambda) = \frac{\Delta(\lambda)}{\lambda - 2} = (\lambda - 2)(\lambda - 4)。$$

在 $C(\lambda)$ 中代 λ 以值 $\lambda_0 = 2$：

$$C(2) = \begin{Vmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -4 \end{Vmatrix}。$$

第一列給予對於 $\lambda_0=2$ 的特徵向量 $(1,1,1)$。第二列給予對於同一特徵數 $\lambda_0=2$ 的特徵向量 $(-3,1,3)$。第三列是前二列的線性組合。

同樣的，取 $\lambda=4$，由矩陣 $C(4)$ 的第一列得出對應於特徵數 $\lambda_0=4$ 的特徵向量 $(1,-1,-1)$。

我們還要提醒讀者，$\psi(\lambda)$ 與 $C(\lambda)$ 可以用另一方法來得出。

首先求出 $D_2(\lambda)$。$D_2(\lambda)$ 的根祇能是 2 與 4。在 $\lambda=4$ 時，$\Delta(\lambda)$ 的二級子式 $\begin{vmatrix} 1 & \lambda-5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-\lambda+2$ 不能化爲零。所以有 $D_2(4)\neq 0$。當 $\lambda=2$ 時，矩陣 $\lambda E-A$ 的諸列彼此成比例。故在 $\Delta(\lambda)$ 中，所有二級子式當 $\lambda=2$ 時都等於零：$D_2(2)=0$。因爲所計算出來的子式有一次的存在，所以 $D_2(\lambda)$ 不能爲 $(\lambda-2)^2$ 所除盡。故

$$D_2(\lambda)=\lambda-2。$$

因此

$$\psi(\lambda)=\frac{\Delta(\lambda)}{\lambda-2}=(\lambda-2)(\lambda-4)=\lambda^2-6\lambda+8,$$

$$\psi(\lambda,\mu)=\frac{\psi(\mu)-\psi(\lambda)}{\mu-\lambda}=\mu+\lambda-6,$$

$$C(\lambda)=\psi(\lambda E, A)=A+(\lambda-6)E=\begin{Vmatrix} \lambda-3 & -3 & 2 \\ -1 & \lambda-1 & -2 \\ -1 & 3 & \lambda-6 \end{Vmatrix}。$$

第五章　矩陣函數

§1. 矩陣函數的定義

設給予方陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 與純量變數 λ 的函數 $f(\lambda)$。需要定出 $f(A)$ 的意義，亦即要推廣函數 $f(\lambda)$ 到有矩陣值爲變數的意義。

對於簡單的特殊情形，即 $f(\lambda)=\gamma_0\lambda^l+\gamma_1\lambda^{l-1}+\cdots+\gamma_l$ 爲 λ 的多項式時，我們已經知道這個問題的解答。在此時 $f(A)=\gamma_0A^l+\gamma_1A^{l-1}+$ $+\cdots+\gamma_lE$。從這一特殊情形試圖得出一般情形的 $f(A)$。

以

$$\psi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{m_s} \tag{1}$$

記矩陣 A 的最小多項式❶（此處 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 爲矩陣 A 的所有不同的特徵數）。這個多項式的次數 $m=\sum_{k=1}^{s}m_k$。

設兩個多項式 $g(\lambda)$ 與 $h(\lambda)$ 有

$$g(A)=h(A)。 \tag{2}$$

那末差 $d(\lambda)=g(\lambda)-h(\lambda)$ 是矩陣 A 的化零多項式，可被 $\psi(\lambda)$ 所整除，我們寫之爲：

$$g(\lambda)\equiv h(\lambda)\quad(\bmod\ \psi(\lambda))。 \tag{3}$$

故由（1）

$$d(\lambda_k)=0,\ d'(\lambda_k)=0,\cdots,\ d^{(m_k-1)}(\lambda_k)=0\ \ (k=1,2,\cdots,s),$$

亦即

$$g(\lambda_k)=h(\lambda_k),\ g'(\lambda_k)=h'(\lambda_k),\cdots,\ g^{(m_k-1)}(\lambda_k)=$$
$$=h^{(m_k-1)}(\lambda_k)\ \ (k=1,2,\cdots,s)。 \tag{4}$$

m 個數

$$f(\lambda_k), f'(\lambda_k),\cdots, f^{(m_k-1)}(\lambda_k)\ \ (k=1,2,\cdots,s) \tag{5}$$

---

❶ 參考第四章，§6。

我們約定稱爲函數 $f(\lambda)$ 在矩陣 A 的影譜上的值且以符號寫法 $f(\Lambda_A)$ 記這些值的全部集合。如果對於函數 $f(\lambda)$，諸值(5)存在(亦卽有意義)，那末我們說，函數 $f(\lambda)$ 確定於矩陣 A 的影譜上。

等式(4)說明多項式 $g(\lambda)$ 與 $h(\lambda)$ 在矩陣 A 的影譜上有相同的值。在符號寫法爲

$$g(\Lambda_A)=h(\Lambda_A)。$$

倒轉我們的討論：由(4)推出(3)，因而得出(2)。

這樣一來，如果給予了矩陣 A，那末多項式 $g(\lambda)$ 在矩陣 A 的影譜上的值完全爲矩陣 $g(A)$ 所確定，亦卽所有多項式 $g(\lambda)$，如在矩陣 A 的影譜上有相同的值，那末就有相同的矩陣值 $g(A)$。

我們要使得在一般情形時 $f(A)$ 的定義服從這樣的原則：函數 $f(\lambda)$ 在矩陣 A 的影譜上的值必須完全確定 $f(A)$，亦卽所有的函數 $f(\lambda)$，如果在矩陣 A 的影譜上有相同的值，那就必須有相同的矩陣值 $f(A)$。

那末顯然，對於一般情形中 $f(A)$ 的定義祇要選取這樣的多項式 $g(\lambda)$，使其在矩陣 A 的影譜上與 $f(\lambda)$ 取相同的值❶，且令

$$f(A)=g(A),$$

卽已足夠。

這樣一來，我們得到次之定義：

定義 1. 如果函數 $f(\lambda)$ 確定於矩陣 A 的影譜上，那末

$$f(A)=g(A),$$

其中 $g(\lambda)$ 爲任一多項式，在矩陣 A 的影譜上與 $f(\lambda)$ 取相同的值：

$$f(\Lambda_A)=g(\Lambda_A)。$$

在係數爲複數的所有多項式中，在影譜上與 $f(\lambda)$ 取同值的祇有一個多項式 $r(\lambda)$，其次數 $<m$❷。這一多項式 $r(\lambda)$ 爲次諸內插條件所唯一確定：

---

❶ 在§2中我們將證明，這樣的內插多項式常能存在，且給予計算最小次數內插多項式的係數的演段。

❷ 這個多項式可從任何另一有相同影譜值的多項式，除以 $\psi(\lambda)$ 後的餘式來得出。

$$r(\lambda_k)=f(\lambda_k),\ r'(\lambda_k)=f'(\lambda_k),\ \cdots,\ r^{(m_k-1)}(\lambda_k)=f^{(m_k-1)}(\lambda_k)$$
$$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ s)。\qquad (6)$$

多項式 $r(\lambda)$ 稱爲在矩陣 A 的影譜上對於函數 $f(\lambda)$ 的拉格蘭日-辞爾凡斯透內插多項式。定義 1 還可以述爲：

定義 1′. 設 $f(\lambda)$ 爲確定於矩陣 A 的影譜上的函數，而 $r(\lambda)$ 爲其對應的拉格蘭日-辞爾凡斯透內插多項式。那末

$$f(A)=r(A)。$$

註　如果矩陣 A 的最小多項式 $\psi(\lambda)$ 沒有重根❶ [在(1)中 $m_1=m_2=\cdots=m_s=1;\ s=m$]，那末爲了使得 $f(A)$ 有意義，祇要函數 $f(\lambda)$ 確定於特徵點 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 上就已足夠。如果 $\psi(\lambda)$ 有多重根存在，那末在某些特徵點上，必須定出 $f(\lambda)$ 與其至已知次導式的值[參考(6)]。

例 1. 討論矩陣❷。

$$H=\overbrace{\left\|\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix}\right\|}^{n}。$$

他的最小多項式爲 λ^n。所以 $f(\lambda)$ 在 H 的影譜上的值爲數 $f(0),\ f'(0), \cdots, f^{(n-1)}(0)$，而且多項式 $r(\lambda)$ 有次之形狀：

$$r(\lambda)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}\lambda+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\lambda^{n-1}。$$

這樣一來，

$$f(H)=f(0)E+\frac{f'(0)}{1!}H+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}H^{n-1}=$$
$$=\left\|\begin{matrix} f(0) & \frac{f'(0)}{1!} & \cdots & \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \\ 0 & f(0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \frac{f'(0)}{1!} \\ 0 & 0 & \cdots & f(0) \end{matrix}\right\|。$$

❶ 在第六章中就會明白，在此時亦祇有在這一情形，矩陣 A 才是單構矩陣（參考第三章，§8）。

❷ 關於矩陣 H 的性質，見第一章，§3，1 的例子。

例2. 討論矩陣

$$J=\overbrace{\left\|\begin{matrix}\lambda_0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdot & & \ddots & \ddots & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_0\end{matrix}\right\|}^{n}。$$

注意，$J=\lambda_0E+H$，故有 $J-\lambda_0E=H$。矩陣 J 的最小多項式顯然是$(\lambda-\lambda_0)^n$。對於函數 $f(\lambda)$的內插多項式 $r(\lambda)$爲次之等式：

$$r(\lambda)=f(\lambda_0)+\frac{f'(\lambda_0)}{1!}(\lambda-\lambda_0)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(\lambda_0)}{(n-1)!}(\lambda-\lambda_0)^{n-1}。$$

故有

$$f(J)=r(J)=f(\lambda_0)E+\frac{f'(\lambda_0)}{1!}H+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(\lambda_0)}{(n-1)!}H^{n-1}=$$

$$=\left\|\begin{matrix}f(\lambda_0) & \frac{f'(\lambda_0)}{1!} & \cdots & \frac{f^{(n-1)}(\lambda_0)}{(n-1)!}\\ 0 & f(\lambda_0) & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \frac{f'(\lambda_0)}{1!}\\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_0)\end{matrix}\right\|。$$

注意矩陣函數的兩個性質。

$1°$ 如果兩個矩陣 A 與 B 相似（矩陣 T 演化 A 爲 B）

$$B=T^{-1}AT,$$

那末矩陣 $f(A)$與 $f(B)$相似而且同一矩陣 T 演化 $f(A)$爲 $f(B)$：

$$f(B)=T^{-1}f(A)T。$$

事實上，兩個相似矩陣有相同的最小多項式[1]，故知函數 $f(\lambda)$ 在矩陣 B 的影譜上與在矩陣 A 的影譜上都取同樣的值。因此有內插多項式 $r(\lambda)$存在，使得

$$f(A)=r(A),\ f(B)=r(B)。$$

---

[1] 從 $B=T^{-1}AT$ 得出 $B^k=T^{-1}A^kT$ $(k=0,1,2,\cdots)$。故對於任一多項式 $g(\lambda)$ 都有 $g(B)=T^{-1}g(A)T$。因此，由 $g(A)=0$ 推知 $g(B)=0$，反之亦然。

但是由等式❶ $r(B)=T^{-1}r(A)T$，得知：

$$f(B)=T^{-1}f(A)T。$$

2° 如果 A 爲準對角形矩陣

$$A=\{A_1, A_2, \cdots, A_u\},$$

那末

$$f(A)=\{f(A_1), f(A_2), \cdots, f(A_u)\}。$$

以 $r(\lambda)$ 記對於在矩陣 A 的影譜上的函數 $f(\lambda)$ 的拉格蘭日-薛爾凡斯透內插多項式。那末易知

$$f(A)=r(A)=\{r(A_1), r(A_2), \cdots, r(A_u)\}。\tag{7}$$

另一方面，A 的最小多項式是每一個矩陣 $A_1, A_2, \cdots, A_u$ 的化零多項式。故由等式

$$f(\Lambda_A)=r(\Lambda_A)$$

得出：

$$f(\Lambda_{A_1})=r(\Lambda_{A_1}), \cdots, f(\Lambda_{A_u})=r(\Lambda_{A_u})。$$

因此

$$f(A_1)=r(A_1), \cdots, f(A_u)=r(A_u),$$

且等式(7)可以寫爲：

$$f(A)=\{f(A_1), f(A_2), \cdots, f(A_u)\}。\tag{8}$$

例 1. 如果單構矩陣爲

$$A=T\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}T^{-1},$$

那末

$$f(A)=T\{f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)\}T^{-1}。$$

$f(A)$ 是有意義的，如果函數 $f(\lambda)$ 在點 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 上是確定的。

2. 矩陣 J 有次之準對角形：

$$J=\left\|\begin{matrix} \overbrace{\begin{matrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 \end{matrix}}^{v_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overbrace{\begin{matrix} \lambda_u & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_u & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_u \end{matrix}}^{v_u} \end{matrix}\right\|。$$

❶ 同上註。

不在對角線上的諸子塊中所有元素都等於零。由公式(8)(參考第一章,§3,1的例子),

$$f(J)=\left\|\begin{matrix}\begin{matrix} f(\lambda_1) & \frac{f'(\lambda_1)}{1!} & \cdots & \frac{f^{(v_1-1)}(\lambda_1)}{(v_1-1)!} \\ 0 & f(\lambda_1) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \frac{f'(\lambda_1)}{1!} \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_1) \end{matrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{matrix} f(\lambda_u) & \frac{f'(\lambda_u)}{1!} & \cdots & \frac{f^{(v_u-1)}(\lambda_u)}{(v_u-1)!} \\ 0 & f(\lambda_u) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \frac{f'(\lambda_u)}{1!} \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_u) \end{matrix}\end{matrix}\right\|,$$

此處,與在矩陣 J 中一樣,不在對角線上諸子塊中的元素全等於零❶。

§2. 拉格朗日-薛爾凡斯透內插多項式

1. 首先討論特徵方程 $|\lambda E-A|=0$ 沒有多重根的情形。記這一個方程的根——矩陣 A 的特徵數——以 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$。那末

$$\psi(\lambda)=|\lambda E-A|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

且條件(6)可寫爲:

$$r(\lambda_k)=f(\lambda_k) \quad (k=1, 2, \cdots, n)。$$

在這一個情形 $r(\lambda)$ 是函數 $f(\lambda)$ 在點 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 上平常的拉格蘭日內插多項式:

$$r(\lambda)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_{k-1})(\lambda-\lambda_{k+1})\cdots(\lambda-\lambda_n)}{(\lambda_k-\lambda_1)\cdots(\lambda_k-\lambda_{k-1})(\lambda_k-\lambda_{k+1})\cdots(\lambda_k-\lambda_n)}f(\lambda_k)。$$

由定義 1′

---

❶ 以後(在第六章的§6或第七章的§7)將證明,任一矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 都常能與某一個 J 形矩陣相似:$A=TJT^{-1}$。故(參考本節末尾的 1°)常有 $f(A)=Tf(J)T^{-1}$。

$$f(A)=r(A)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(A-\lambda_1E)\cdots(A-\lambda_{k-1}E)(A-\lambda_{k+1}E)\cdots(A-\lambda_nE)}{(\lambda_k-\lambda_1)\cdots(\lambda_k-\lambda_{k-1})(\lambda_k-\lambda_{k+1})\cdots(\lambda_k-\lambda_n)}f(\lambda_k)。$$

2. 現在假設，特徵多項式有多重根，但是除盡特徵多項式的最小多項式則祇有單重根存在❶：

$$\psi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_m)。$$

在這一情形(同上面的一樣)式(1)中所有的指數 m_k 都等於 1，且等式(6)化爲

$$r(\lambda_k)=f(\lambda_k)\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ m)。$$

$r(\lambda)$仍然是平常的拉格蘭日內插多項式且有

$$f(A)=\sum_{k=1}^{m}\frac{(A-\lambda_1E)\cdots(A-\lambda_{k-1}E)(A-\lambda_{k+1}E)\cdots(A-\lambda_mE)}{(\lambda_k-\lambda_1)\cdots(\lambda_k-\lambda_{k-1})(\lambda_k-\lambda_{k+1})\cdots(\lambda_k-\lambda_m)}f(\lambda_k)。$$

3. 討論一般的情形

$$\psi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}\quad(m_1+m_2+\cdots+m_s=m)。$$

表分式函數 $\frac{r(\lambda)}{\psi(\lambda)}$ 爲簡分式的和：

$$\frac{r(\lambda)}{\psi(\lambda)}=\sum_{k=1}^{s}\left[\frac{\alpha_{k1}}{(\lambda-\lambda_k)^{m_k}}+\frac{\alpha_{k2}}{(\lambda-\lambda_k)^{m_k-1}}+\cdots+\frac{\alpha_{k,m_k}}{\lambda-\lambda_k}\right],\tag{9}$$

其中 $\alpha_{kj}(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m_k;\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$爲某一些數。

爲了定出簡分式的分子 α_{kj}，乘這一等式的兩節以 $(\lambda-\lambda_k)^{m_k}$ 且以 $\psi^k(\lambda)$記多項式 $\frac{\psi(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)^{m_k}}$。我們得出：

$$\frac{r(\lambda)}{\psi^k(\lambda)}=\alpha_{k1}+\alpha_{k2}(\lambda-\lambda_k)+\cdots+\alpha_km_k(\lambda-\lambda_k)^{m_k-1}+(\lambda-\lambda_k)^{m_k}\rho(\lambda)$$

$$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ s),\tag{10}$$

其中 $\rho(\lambda)$是一個有理函數，當 $\lambda=\lambda_k$ 時是正則的❷。

❶ 參考上節註的足註。

❷ 是即當 $\lambda=\lambda_k$ 時不會變爲 ∞。

故

$$
\left.\begin{aligned}
\alpha_{k1}&=\left[\frac{r(\lambda)}{\psi^k(\lambda)}\right]_{\lambda=\lambda_k},\\
\alpha_{k2}&=\left[\frac{r(\lambda)}{\psi^k(\lambda)}\right]'_{\lambda=\lambda_k}=r(\lambda_k)\left[\frac{1}{\psi^k(\lambda)}\right]'_{\lambda=\lambda_k}+\\
&+r'(\lambda_k)\frac{1}{\psi^k(\lambda_k)},\cdots(k=1,2,\cdots,s)。
\end{aligned}\right\}\qquad(11)
$$

(11)式證明了,在等式(9)的右節中諸分子 α_{kj} 可以經多項式 $r(\lambda)$ 在矩陣 A 的影譜上諸值來表出,而這些值都是已知的:他們等於函數 $f(\lambda)$ 與其導式的對應值。所以

$$
\alpha_{k1}=\frac{f(\lambda_k)}{\psi^k(\lambda_k)},\ \alpha_{k2}=f(\lambda_k)\left[\frac{1}{\psi^k(\lambda)}\right]'_{\lambda=\lambda_k}+f'(\lambda_k)\frac{1}{\psi^k(\lambda_k)},\cdots
$$
$$
(k=1,2,\cdots,s)。\qquad(12)
$$

(12)式還可以縮寫爲:

$$
\alpha_{kj}=\frac{1}{(j-1)!}\left[\frac{f(\lambda)}{\psi^k(\lambda)}\right]^{(j-1)}_{\lambda=\lambda_k}
$$
$$
(j=1,2,\cdots,m_k;\ k=1,2,\cdots,s)。\qquad(13)
$$

在求出所有的 α_{kj} 以後,我們可以從次式來定出 $r(\lambda)$,這是用 $\psi(\lambda)$ 來乘等式(9)的兩節所得出的:

$$
r(\lambda)=\sum_{k=1}^{s}[\alpha_{k1}+\alpha_{k2}(\lambda-\lambda_k)+\cdots+\alpha_{k,m_k}(\lambda-\lambda_k)^{m_k-1}]\psi^k(\lambda)。\qquad(14)
$$

在這個式子中,位於 $\psi^k(\lambda)$ 前面的因式,即在方括號中的表示式,由(13)知其等於函數 $f(\lambda)$ 照 $(\lambda-\lambda_k)$ 的冪次展開的戴勞展開式中前 m_k 個項的和。

註 拉格蘭日-薛爾凡斯透內插多項式亦可以由拉格蘭日內插多項式取極限來得出。

設 $\psi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}\ (m=\sum_{k=1}^{s}m_k)$。

記由 m 點

$$
\lambda_1^{(1)},\lambda_1^{(2)},\cdots,\lambda_1^{(m_1)};\ \lambda_2^{(1)},\lambda_2^{(2)},\cdots,\lambda_2^{(m_2)};\cdots;\ \lambda_s^{(1)},\lambda_s^{(2)},\cdots,\lambda_s^{(m_s)},
$$

所構成的拉格蘭日內插多項式爲

$$L(\lambda)=L\begin{pmatrix} \lambda_1^{(1)},\cdots,\lambda_1^{(m_1)};\cdots;\lambda_s^{(1)},\cdots,\lambda_s^{(m_s)}; \\ f(\lambda_1^{(1)}),\cdots,f(\lambda_1^{(m_1)});\cdots;f(\lambda_s^{(1)}),\cdots,f(\lambda_s^{(m_s)}); \end{pmatrix}\lambda\Big)。$$

那末不難證明，所要求出的拉格蘭日-薛爾凡斯透內插多項式爲次式所確定

$$r(\lambda)=\lim_{\substack{\lambda_1^{(1)},\cdots,\lambda_1^{(m_1)}\to\lambda_1\\ \cdots\cdots\\ \lambda_s^{(1)},\cdots,\lambda_s^{(m_s)}\to\lambda_s}} L(\lambda)。$$

例

$$\psi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^2(\lambda-\lambda_2)^3\quad(m=5)。$$

那末
$$\frac{r(\lambda)}{\psi(\lambda)}=\frac{\alpha}{(\lambda-\lambda_1)^2}+\frac{\beta}{\lambda-\lambda_1}+\frac{\gamma}{(\lambda-\lambda_2)^3}+\frac{\delta}{(\lambda-\lambda_2)^2}+\frac{\varepsilon}{\lambda-\lambda_2}。$$

故
$$r(\lambda)=[\alpha+\beta(\lambda-\lambda_1)](\lambda-\lambda_2)^3+[\gamma+\delta(\lambda-\lambda_2)+\varepsilon(\lambda-\lambda_2)^2](\lambda-\lambda_1)^2$$

因而

$$r(A)=[\alpha E+\beta(A-\lambda_1E)](A-\lambda_2E)^3+[\gamma E+\delta(A-\lambda_2E)+\varepsilon(A-\lambda_2E)^2](A-\lambda_1E)^2。$$

$\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$ 可由次之諸式來求出：

$$\alpha=\frac{f(\lambda_1)}{(\lambda_1-\lambda_2)^3},\quad \beta=-\frac{3}{(\lambda_1-\lambda_2)^4}f(\lambda_1)+\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)^3}f'(\lambda_1),$$

$$\gamma=\frac{f(\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)^2},\quad \delta=-\frac{2}{(\lambda_2-\lambda_1)^3}f(\lambda_2)+\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}f'(\lambda_2),$$

$$\varepsilon=\frac{3}{(\lambda_2-\lambda_1)^4}f(\lambda_2)-\frac{2}{(\lambda_2-\lambda_1)^3}f'(\lambda_2)+\frac{1}{2}\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}f''(\lambda_2)。$$

§3. $f(A)$的定義的其他形式．矩陣 A 的分量

我們回到 $r(\lambda)$ 的公式(14)。把諸係數 α 的表示式(12)代到這一公式中，且將含有相同的 $f(\lambda)$的值或其導式的值的諸項合併在一起，我們表 $r(\lambda)$爲次之形狀：

$$r(\lambda)=\sum_{k=1}^{s}[f(\lambda_k)\varphi_{k1}(\lambda)+f'(\lambda_k)\varphi_{k2}(\lambda)+\cdots+ \\ +f^{(m_k-1)}(\lambda_k)\varphi_{k,m_k}(\lambda)]。\qquad(15)$$

此處的 $\varphi_{kj}(\lambda)$($j=1,2,\cdots,m_k$; $k=1,2,\cdots,s$)容易計算出來，爲次數

$<m$ 的 λ 的多項式。這些多項式完全爲所予的 $\psi(\lambda)$ 所確定而與所選取的函數 $f(\lambda)$ 無關。這些多項式的個數等於函數 $f(\lambda)$ 在矩陣 A 的影譜上諸值的個數，亦卽等於 m [m 爲最小多項式 $\psi(\lambda)$ 的次數]。函數 $\varphi_{kj}(\lambda)$ 表示對於這樣的一種函數的拉格蘭日-薛爾凡斯透內插多項式，這種函數在矩陣 A 的影譜上除開有一個 $f^{(j-1)}(\lambda_k)$ 等於 1 外其餘諸值都等於零。

全部多項式 $\varphi_{kj}(\lambda)(j=1, 2, \cdots, m_k; k=1, 2, \cdots, s)$ 是線性無關的。事實上，設

$$\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_k} c_{kj}\varphi_{kj}(\lambda)=0 。$$

從 m 個條件

$$r^{(j-1)}(\lambda_k)=c_{kj} \quad (j=1, 2, \cdots, m_k; k=1, 2, \cdots, s) \tag{16}$$

來定出內插多項式 $r(\lambda)$。那末由(15)與(16)

$$r(\lambda)=\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_k} c_{kj}\varphi_{kj}(\lambda)=0,$$

因而由(16)知所有的

$$c_{kj}=0 \quad (j=1, 2, \cdots, m_k; k=1, 2, \cdots, s)。$$

從公式(15)得出 $f(A)$ 的基本公式：

$$f(A)=\sum_{k=1}^{s}[f(\lambda_k)Z_{k1}+f'(\lambda_k)Z_{k2}+\cdots+ \\ +f^{(m_k-1)}(\lambda_k)Z_{k,m_k}], \tag{17}$$

其中

$$Z_{kj}=\varphi_{kj}(A) \quad (j=1, 2, \cdots, m_k; k=1, 2, \cdots, s)。 \tag{18}$$

矩陣 Z_{kj} 完全爲所予的矩陣 A 所確定而與函數 $f(\lambda)$ 的選取無關。在(17)式的右節中函數 $f(\lambda)$ 祇是表出其在矩陣 A 的影譜上的諸值。

矩陣 $Z_{kj}(j=1, 2, \cdots, m_k; k=1, 2, \cdots, s)$ 稱爲所予矩陣 A 的組成矩陣或分量。

分量 $Z_{kj}(j=1, 2, \cdots, m_k; k=1, 2, \cdots, s)$ 線性無關。

事實上，設
$$\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_k} c_{kj} Z_{kj}=0。$$
那末由(18)
$$\chi(A)=0, \tag{19}$$
其中
$$\chi(\lambda)=\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_k} c_{kj}\varphi_{kj}(\lambda)。 \tag{20}$$
因爲由(20)，多項式 $\chi(\lambda)$ 的次數小於 m，亦卽小於最小多項式 $\psi(\lambda)$ 的次數，所以由(19)得出：
$$\chi(\lambda)=0。$$
但由(20)，因爲 m 個函數 $\varphi_{kj}(\lambda)$ 線性無關，我們推知
$$c_{kj}=0 \quad (j=1,2,\cdots,m_k;\ k=1,2,\cdots,s),$$
這就是所要證明的結果。

由組成矩陣 Z_{kj} 的線性無關性知道在這些矩陣中沒有一個能等於零。還要注意，分量 Z_{kj} 中任何兩個都是可易的且都與矩陣 A 可易，因爲他們都是 A 的純量多項式。

對於 $f(A)$ 的公式(17)特別便於用來處理同一矩陣 A 的若干函數，或者用來處理函數 $f(\lambda)$，他不僅與 λ 有關且與某一參數 t 有關。在後一情形公式(17)的右節中諸分量 Z_{kj} 與 t 無關而參數 t 祇是在這些矩陣的純量係數中出現。

在上節末尾的例中，$\psi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^2(\lambda-\lambda_2)^3$，我們可以建立 $r(\lambda)$ 爲次之形狀
$$r(\lambda)=f(\lambda_1)\varphi_{11}(\lambda)+f'(\lambda_1)\varphi_{12}(\lambda)+f(\lambda_2)\varphi_{21}(\lambda)+f'(\lambda_2)\varphi_{22}(\lambda)+f''(\lambda_2)\varphi_{23}(\lambda),$$
其中
$$\varphi_{11}(\lambda)=\left(\frac{\lambda-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\right)^3\left[1-\frac{3(\lambda-\lambda_1)}{\lambda_1-\lambda_2}\right],$$
$$\varphi_{12}(\lambda)=\frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)^3}{(\lambda_1-\lambda_2)^3},$$
$$\varphi_{21}(\lambda)=\left(\frac{\lambda-\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}\right)^2\left[1-\frac{2(\lambda-\lambda_2)}{\lambda_2-\lambda_1}+\frac{3(\lambda-\lambda_2)^2}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}\right],$$
$$\varphi_{22}(\lambda)=\frac{(\lambda-\lambda_1)^2(\lambda-\lambda_2)}{(\lambda_2-\lambda_1)^2}\left[1-\frac{2(\lambda-\lambda_2)}{\lambda_2-\lambda_1}\right],$$
$$\varphi_{23}(\lambda)=\frac{(\lambda-\lambda_1)^2(\lambda-\lambda_2)^2}{2(\lambda_2-\lambda_1)^2}。$$

故有 $f(A)=f(\lambda_1)Z_{11}+f'(\lambda_1)Z_{12}+f(\lambda_2)Z_{21}+f'(\lambda_2)Z_{22}+f''(\lambda_2)Z_{23}$,

其中 $Z_{11}=\varphi_{11}(A)=\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)^3}(A-\lambda_2E)^3\left[E-\frac{3}{\lambda_1-\lambda_2}(A-\lambda_1E)\right]$,

$Z_{12}=\varphi_{12}(A)=\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)^3}(A-\lambda_1E)(A-\lambda_2E)^3$, 諸如此類。

如果給予了矩陣 A，那末爲了具體的找出這個矩陣的分量可以在基本公式(17)中取 $f(\mu)=\frac{1}{\lambda-\mu}$，其中 λ 爲一參數。這樣我們得出：

$$(\lambda E-A)^{-1}=\frac{C(\lambda)}{\psi(\lambda)}=\sum_{k=1}^{s}\left[\frac{Z_{k1}}{\lambda-\lambda_k}+\frac{1!Z_{k2}}{(\lambda-\lambda_k)^2}+\right.$$
$$\left.+\cdots+\frac{(m_k-1)!Z_{km_k}}{(\lambda-\lambda_k)^{m_k}}\right], \tag{21}$$

其中 $C(\lambda)$ 爲 $\lambda E-A$ 的導出附加矩陣(第四章，§ 6)❶。

矩陣 $(j-1)!Z_{kj}$ 是在展開式(21)中簡分式的分子，故與展開式(9)一樣這些分子可以經 $C(\lambda)$ 在矩陣 A 的影譜上諸值用與(11)相似的公式來表出：

$$(m_k-1)!Z_{km_k}=\frac{C(\lambda_k)}{\psi^k(\lambda_k)}, \quad (m_k-2)!Z_{k,m_k-1}=\left[\frac{C(\lambda)}{\psi^k(\lambda)}\right]'_{\lambda=\lambda_k}, \cdots$$

因此，

$$Z_{kj}=\frac{1}{(j-1)!(m_k-j)!}\left[\frac{C(\lambda)}{\varphi^k(\lambda)}\right]^{(m_k-j)}_{\lambda=\lambda_k}$$
$$(j=1, 2, \cdots, m_k;\ k=1, 2, \cdots, s)。\tag{22}$$

以這些組成矩陣的表示式(22)代入(17)式，我們可以表基本公式(17)爲次之形狀：

$$f(A)=\sum_{k=1}^{s}\frac{1}{(m_k-1)!}\left[\frac{C(\lambda)}{\psi^k(\lambda)}f(\lambda)\right]^{(m_k-1)}_{\lambda=\lambda_k}。\tag{23}$$

---

❶ 當 $f(\mu)=\frac{1}{\lambda-\mu}$ 時有 $f(A)=(\lambda E-A)^{-1}$。事實上，$f(A)=r(A)$，其中 $r(\mu)$ 爲拉格蘭日-薛爾凡斯透內插多項式。因此，$f(\mu)$ 與 $r(\mu)$ 在矩陣 A 的影譜上重合，故在這一影譜上 $(\lambda-\mu)r(\mu)$ 與 $(\lambda-\mu)f(\mu)=1$ 一致。所以 $(\lambda E-A)r(A)=(\lambda E-A)f(A)=E$。

例 1.

$$A=\left\|\begin{matrix}2&-1&1\\0&1&1\\-1&1&1\end{matrix}\right\|\begin{matrix}\mathit{2}\\\mathit{2}\\\mathit{1}\end{matrix}\text{[1]},\quad \lambda E-A=\left\|\begin{matrix}\lambda-2&1&-1\\0&\lambda-1&-1\\1&-1&\lambda-1\end{matrix}\right\|。$$

在所予的情形，$\Delta(\lambda)=|\lambda E-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$。因為元素[1, 2]在 $\lambda E-A$ 中的子式等於 1，所以 $D_2(\lambda)=1$，故有

$$\psi(\lambda)=\Delta(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)=\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2,$$

$$\Psi(\lambda,\mu)=\frac{\psi(\mu)-\psi(\lambda)}{\mu-\lambda}=\mu^2+(\lambda-4)\mu+\lambda^2-4\lambda+5$$

且有

$$C(\lambda)=\Psi(\lambda E,A)=A^2+(\lambda-4)A+(\lambda^2-4\lambda+5)E=$$

$$=\left\|\begin{matrix}3&-2&2\\-1&2&2\\-3&3&1\end{matrix}\right\|\begin{matrix}\mathit{3}\\\mathit{3}\\\mathit{1}\end{matrix}+(\lambda-4)\left\|\begin{matrix}2&-1&1\\0&1&1\\-1&1&1\end{matrix}\right\|+(\lambda^2-4\lambda+5)\left\|\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\right\|。$$

此時基本公式有次之形狀：

$$f(A)=f(1)Z_{11}+f'(1)Z_{12}+f(2)Z_{22}。\tag{24}$$

現在取 $f(\mu)=\dfrac{1}{\lambda-\mu}$，求得：

$$(\lambda E-A)^{-1}=\frac{C(\lambda)}{\psi(\lambda)}=\frac{Z_{11}}{\lambda-1}+\frac{Z_{12}}{(\lambda-1)^2}+\frac{Z_{22}}{\lambda-2},$$

故有　　$Z_{11}=-C(1)-C'(1),\quad Z_{12}=-C(1),\quad Z_{22}=C(2)$。

應用上面所得出的 $C(\lambda)$ 的表示式來計算 Z_{11}，Z_{12}，Z_{22} 且將其結果代入(24)式：

$$f(A)=f(1)\left\|\begin{matrix}1&0&0\\1&0&0\\1&-1&1\end{matrix}\right\|+f'(1)\left\|\begin{matrix}1&-1&1\\1&-1&1\\0&0&0\end{matrix}\right\|+f(2)\left\|\begin{matrix}0&0&0\\-1&1&0\\-1&1&0\end{matrix}\right\|=$$

$$=\left\|\begin{matrix}f(1)+f'(1)&-f'(1)&f'(1)\\f(1)+f'(1)-f(2)&-f'(1)+f(2)&f'(1)\\f(1)-f(2)&-f\,(1)+f(2)&f(1)\end{matrix}\right\|。\tag{25}$$

例 2. 我們指出可以僅由基本公式出發來定出 $f(A)$。仍設

$$A=\left\|\begin{matrix}2&-1&1\\0&1&1\\-1&1&1\end{matrix}\right\|,\quad \psi(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)。$$

那末

$$f(A)=f(1)Z_1+f'(1)Z_2+f(2)Z_3。$$

---

[1] 旁邊的斜體字管理列的元素總和。乘矩陣 A 的行以矩陣 B 的列的總和，我們得乘積 AB 的列的元素總和。

順次代(24′)中的 $f(\lambda)$ 以 $1,\ \lambda-1,\ (\lambda-1)^2$:

$$Z_1+Z_3=E=\left\|\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\right\|,$$

$$Z_2+Z_3=A-E=\left\|\begin{matrix}1&-1&1\\0&0&1\\-1&1&0\end{matrix}\right\|,$$

$$Z_3=(A-E)^2=\left\|\begin{matrix}0&0&0\\-1&1&0\\-1&1&0\end{matrix}\right\|。$$

從前兩個等式減去第三個等式,我們定出了所有 Z。代入(24′),我們就得出 $f(A)$ 的表示式。

上述例子說明有三種方法可以實際的求出 $f(A)$,在第一種方法中,我們求出內插多項式 $r(\lambda)$ 而取 $f(A)=r(A)$。在第二種方法中,我們應用展開式(21),把(17)式中的分量 Z_{kj} 經導出附加矩陣 $C(\lambda)$ 在矩陣 A 的影譜上諸值來表出。在第三種方法中,我們從基本公式(17)出發,順次代其 $f(\lambda)$ 以某些簡單的多項式;從之得出線方程組來決定組成矩陣 Z_{kj}。

第三種方法可能是實際上最方便的。他的一般形狀可述說如次:

在(17)中順次代 $f(\lambda)$ 以某些多項式 $g_1(\lambda),\ g_2(\lambda),\ \cdots,\ g_m(\lambda)$:

$$g_i(A)=\sum_{k=1}^{s}\left[g_i(\lambda_k)Z_{k1}+g_i'(\lambda_k)Z_{k2}+\cdots+g_i^{(m_k-1)}(\lambda_k)Z_{k,m_k}\right]$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)。\tag{26}$$

從 m 個方程(26)定出 m 個矩陣 Z_{kj} 且以所得出的表示式代進(17)式中。

從 $m+1$ 個等式(26)與(17)消去 Z_{kj} 的結果可以寫爲次之形狀:

$$\begin{vmatrix}f(A)&f(\lambda_1)\cdots f^{(m_1-1)}(\lambda_1)\cdots f(\lambda_s)\cdots f^{(m_s-1)}(\lambda_s)\\g_1(A)&g_1(\lambda_1)\cdots g_1^{(m_1-1)}(\lambda_1)\cdots g_1(\lambda_s)\cdots g_1^{(m_s-1)}(\lambda_s)\\\vdots&\vdots\\g_m(A)&g_m(\lambda_1)\cdots g_m^{(m_1-1)}(\lambda_1)\cdots g_m(\lambda_s)\cdots g_m^{(m_s-1)}(\lambda_s)\end{vmatrix}=0。$$

按照第一列展開這一個行列式，我們得出所需要的 $f(A)$ 的表示式。此時與 $f(A)$ 相乘的因子爲行列式 $\Delta=|g_i^{(j)}(\lambda_k)|$（位於行列式 Δ 的第 i 行爲多項式 $g_i(\lambda)$ 在矩陣 A 的影譜上諸值；$i=1, 2, \cdots, m$）。爲了可以定出 $f(A)$，必須有 $\Delta\neq 0$。這是成立的，如果沒有一個多項式 $g_1(\lambda)$，$g_2(\lambda)$，$\cdots$，$g_m(\lambda)$ 的線性組合❶在矩陣 A 的影譜上全變爲零，亦卽不能被 $\psi(\lambda)$ 所整除。

條件 $\Delta\neq 0$ 常能適合，如果多項式 $g_1(\lambda)$，$g_2(\lambda)$，$\cdots$，$g_m(\lambda)$ 的次數各等於 $0, 1, 2, \cdots, m-1$❷。

在結束時，我們注意對於高冪 A^n，用基本公式(17)代其 $f(\lambda)$ 以 λ^n 來計算比較方便❸。

例　給予矩陣 $A=\begin{Vmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{Vmatrix}$。要計算冪次 A^{100} 的元素。所予矩陣的最小多項式爲 $\psi(\lambda)=(\lambda-1)^2$。

基本公式在此時爲

$$f(A)=f(1)Z_1+f'(1)Z_2。$$

順次代 $f(\lambda)$ 以 1 與 $\lambda-1$，我們得出：

$$Z_1=E,\quad Z_2=A-E。$$

故有

$$f(A)=f(1)E+f'(1)(A-E)。$$

取 $f(\lambda)=\lambda^{100}$，我們求得：

$$A^{100}=E+100(A-E)=\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}+100\begin{Vmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 401 & -400 \\ 400 & -399 \end{Vmatrix}。$$

§4. 矩陣函數的級數表示

設給予有最小多項式 $\psi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}$ $(m=\sum_{k=1}^{s} m_k)$ 的矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$。再設函數 $f(\lambda)$ 與函數序列 $f_1(\lambda)$，$f_2(\lambda)$，$\cdots$，$f_p(\lambda)$，$\cdots$ 確定於矩陣 A 的影譜上。

❶ 係數不全等於零。

❷ 在上面最後一例中，$m=3$，$g_1(\lambda)=1$，$g_2(\lambda)=\lambda-1$，$g_3(\lambda)=(\lambda-1)^2$。

❸ 公式(17)可以用來計算逆矩陣 A^{-1}，如果我們取 $f(\lambda)=\frac{1}{\lambda}$，又在 (21) 式中取 $\lambda=0$ 亦可得出 A^{-1}。

我們說,當 $p\to\infty$ 時,函數序列 $f_p(\lambda)$ 在矩陣 A 的影譜上趨於某一極限,如果有次諸極限存在:

$$\lim_{p\to\infty} f_p(\lambda_k),\ \lim_{p\to\infty} f'_p(\lambda_k),\cdots,\ \lim_{p\to\infty} f_p^{(m_k-1)}(\lambda_k)\quad (k=1,2,\cdots,s)。$$

我們說,當 $p\to\infty$ 時,函數序列 $f_p(\lambda)$ 在矩陣 A 的影譜上趨於函數 $f(\lambda)$,且寫爲:

$$\lim_{p\to\infty} f_p(\Lambda_A)=f(\Lambda_A),$$

如果

$$\lim_{p\to\infty} f_p(\lambda_k)=f(\lambda_k),\ \lim_{p\to\infty} f'_p(\lambda_k)=f'(\lambda_k),\cdots,$$
$$\lim_{p\to\infty} f_p^{(m_k-1)}(\lambda_k)=f^{(m_k-1)}(\lambda_k)\quad (k=1,2,\cdots,s)。$$

基本公式

$$f(A)=\sum_{k=1}^{s}\left[f(\lambda_k)Z_{k1}+f'(\lambda_k)Z_{k2}+\cdots+f^{(m_k-1)}(\lambda_k)Z_{k,m_k}\right]$$

經由 $f(\lambda)$ 在矩陣 A 的影譜上諸值表出 $f(A)$。如果視矩陣爲 n^2 維空間 $\boldsymbol{R}_{n^2}$ 的向量,那末由基本公式與矩陣 Z_{kj} 的線性無關性,知道(對於已予的 A)所有 $f(A)$ 構成 $\boldsymbol{R}_{n^2}$ 中的 m 維子空間,有一基底爲 $Z_{kj}(j=1,2,\cdots,m_k;\ k=1,2,\cdots,s)$。在這一個基底中,"向量" $f(A)$ 的坐標就是函數 $f(\lambda)$ 在矩陣 A 的影譜上的諸值。

這些探究給予了次之非常明顯的定理:

定理 1. 爲了使矩陣 $f_p(A)$ 當 $p\to\infty$ 時趨於某一極限的充分必要條件是:當 $p\to\infty$ 時序列 $f_p(\lambda)$ 在矩陣 A 的影譜上趨於某一極限,是卽極限

$$\lim_{p\to\infty} f_p(A),\ \lim_{p\to\infty} f_p(\Lambda_A)$$

常能同時存在。這樣,等式

$$\lim_{p\to\infty} f_p(\Lambda_A)=f(\Lambda_A)\tag{27}$$

推出等式

$$\lim_{p\to\infty} f_p(A)=f(A)\tag{28}$$

反之亦然。

證明　1. 如果 $f_p(\lambda)$ 在矩陣 A 的影譜上諸值當 $p\to\infty$ 時有極限值，那末由公式

$$f_p(A)=\sum_{k=1}^{s}[f_p(\lambda_k)Z_{k1}+f'_p(\lambda_k)Z_{k2}+\cdots+f_p^{(m_k-1)}(\lambda_k)Z_{k,m_k}] \quad (29)$$

知有極限 $\lim\limits_{p\to\infty}f_p(A)$ 存在。從這一個式子與公式(17)由(27)推得(28)式。

2. 反之，設 $\lim\limits_{p\to\infty}f_p(A)$ 存在。因爲 m 個組成矩陣 Z 線性無關，所以我們可以由(29)把 $f_p(\lambda)$ 在矩陣 A 的影譜上的 m 個值經矩陣 $f_p(A)$ 的 m 個元素來表出(爲線性型)。故知極限 $\lim\limits_{p\to\infty}f_p(\Lambda_A)$ 存在，且由等式(28)的成立得出等式(27)。

按照所建立的定理，如果多項式序列 $g_p(\lambda)(p=1,2,\cdots)$ 在矩陣 A 的影譜上趨於函數 $f(\lambda)$，那末

$$\lim_{p\to\infty}g_p(A)=f(A)。$$

這一公式着重的提出我們所給予的 $f(A)$ 的定義的自然性與普遍性。$f(A)$ 常可從 $g_p(A)$ 當 $A\to\infty$ 時的極限來得出，如果多項式序列 $g_p(\lambda)$ 在矩陣 A 的影譜上收斂於 $f(\lambda)$。這一個條件是當 $p\to\infty$ 時極限 $\lim\limits_{p\to\infty}g_p(A)$ 存在的必要條件。

我們約定說，級數 $\sum\limits_{p=0}^{\infty}u_p(\lambda)$ 在矩陣 A 的影譜上收斂於函數 $f(\lambda)$，且寫爲：

$$f(\Lambda_A)=\sum_{p=0}^{\infty}u_p(\Lambda_A), \quad (30)$$

如果所有在此處出現的函數都確定於矩陣 A 的影譜上，且有等式

$$f(\lambda_k)=\sum_{p=0}^{\infty}u_p(\lambda_k),\quad f'(\lambda_k)=\sum_{p=0}^{\infty}u'_p(\lambda_k),\cdots,$$

$$f^{m_k-1}(\lambda_k)=\sum_{p=0}^{\infty}u_p^{(m_k-1)}(\lambda_k),\quad (k=1,2,\cdots,s),$$

而且位於這些等式的右節都是收斂級數。換句話說，如果令

$$s_p(\lambda)=\sum_{q=0}^{p}u_q(\lambda)\quad (p=0,1,2,\cdots),$$

那末等式(30)相當於等式

$$f(A_A)=\lim_{p\to\infty}s_p(A_A)。\tag{31}$$

顯然,對於上面所證明的定理可以給予次之等價的說法:

定理 1′. 為了使級數 $\sum_{p=0}^{\infty}u_p(A)$ 收斂於某一矩陣的充分必要條件為:級數 $\sum_{p=0}^{\infty}u_p(\lambda)$ 在矩陣 A 的影譜上是收斂的。此時由等式

$$f(A_A)=\sum_{p=0}^{\infty}u_p(A_A)$$

得出等式

$$f(A)=\sum_{p=0}^{\infty}u_p(A),$$

反之亦然。

設給予一個有收斂圓 $|\lambda-\lambda_0|<R$ 的冪級數且其和為 $f(\lambda)$:

$$f(\lambda)=\sum_{p=0}^{\infty}\alpha_p(\lambda-\lambda_0)^p\quad (|\lambda-\lambda_0|<R)。\tag{32}$$

因為對於冪級數可以在其收斂圓內逐項微分到任何多次,所以級數(32)在任一矩陣的影譜上都是收斂的,祇要這個矩陣的特徵數都在收斂圓中。

這樣一來,就得出

定理 2. 如果函數 $f(\lambda)$ 在收斂圓 $|\lambda-\lambda_0|<r$ 中展開為冪級數

$$f(\lambda)=\sum_{p=0}^{\infty}\alpha_p(\lambda-\lambda_0)^p,\tag{33}$$

那末這一展開式是成立的,如果以任一矩陣 A 代替純量 λ,祇要這個矩陣的特徵數都位於收斂圓中。

註 在這一定理中可以假設矩陣 A 的特徵數落在收斂圓的圓周上,但此時要補充一個條件,就是級數(33)的 m_k-1 次逐項微分出來的級數在點 $\lambda=\lambda_k$ 上收斂。因而,如所熟知,級數(33)的 j 次微分出來的級數在點 λ_k 收斂於 $f^{(j)}(\lambda_k)$, $j=0,1,2,\cdots,m_k-1$。

由所證明的定理可以推得，例如，次諸展開式❶：

$$e^A=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{A^p}{p!},\ \cos A=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2p)!}A^{2p},$$

$$\sin A=\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{A^{2p+1}}{(2p+1)!},$$

$$\operatorname{ch} A=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{A^{2p}}{(2p)!},\ \operatorname{sh} A=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{A^{2p+1}}{(2p+1)!},$$

$$(E-A)^{-1}=\sum_{p=0}^{\infty}A^p\quad(|\lambda_k|<1;\ k=1,\ 2,\cdots,\ s),$$

$$\ln A=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{p}(A-E)^p\quad(|\lambda_k-1|<1;\ k=1,\ 2,\cdots,\ s)$$

(此處 $\ln\lambda$ 是了解爲多值函數 $\operatorname{Ln}\lambda$ 的主值，亦卽對於 $\operatorname{Ln}1=0$ 的這一支)。

設 $G(u_1,\ u_2,\cdots,\ u_l)$ 爲 $u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_l$ 的多項式；$f_1(\lambda),\ f_2(\lambda),\ \cdots,\ f_l(\lambda)$ 爲 λ 的函數，確定於矩陣 A 的影譜上，且有

$$g(\lambda)\equiv G[f_1(\lambda),\ f_2(\lambda),\ \cdots,\ f_l(\lambda)]。$$

那末由

$$g(\Lambda_A)=0 \tag{34}$$

得出：

$$G[f_1(A),\ f_2(A),\ \cdots,\ f_l(A)]=0。 \tag{35}$$

事實上，以 $r_1(\lambda),\ r_2(\lambda),\cdots,\ r_l(\lambda)$ 記 $f_1(\lambda),\ f_2(\lambda),\ \cdots,\ f_l(\lambda)$ 的拉格蘭日-薛爾凡斯透內插多項式且設

$$h(\lambda)=G[r_1(\lambda),\ r_2(\lambda),\ \cdots,\ r_l(\lambda)]。$$

那末由(34)推得：

$$h(\Lambda_A)=0。 \tag{36}$$

故知

$$G[f_1(A),\ f_2(A),\cdots,\ f_l(A)]=G[r_1(A),\ r_2(A),\ \cdots,\ r_l(A)]$$
$$=h(A)=0。$$

❶ 前兩行的展開式對於任何矩陣 A 都能成立。

這就是所要證明的結果。

這一個已經證明的論斷，可以把結合純量變數的恆等式，推廣到有矩陣值變量的情形。

例如，由

$$\cos^2\lambda+\sin^2\lambda=1$$

得出對於任何矩陣 A 都有

$$\cos^2 A+\sin^2 A=E$$

（在此時：$G(u_1, u_2)=u_1^2+u_2^2-1$，$f_1(\lambda)=\cos\lambda$，$f_2(\lambda)=\sin\lambda$）。

同樣的對於任何矩陣 A 都有

$$e^A e^{-A}=E,$$

亦卽

$$e^{-A}=(e^A)^{-1}。$$

再者，對於任何矩陣 A 都有

$$e^{iA}=\cos A+i\sin A。$$

設予滿秩矩陣 $A(|A|\neq 0)$。以 $\sqrt{\lambda}$ 記多值函數的單值支，確定於一個不含零而含有矩陣 A 的所有特徵數的區域中。那末 $\sqrt{A}$ 是有意義的。此時由 $(\sqrt{\lambda})^2-\lambda=0$ 得出：

$$(\sqrt{A})^2=A。$$

設 $f(\lambda)=\frac{1}{\lambda}$，而 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 爲一滿秩矩陣，那末函數 $f(\lambda)$ 確定於矩陣 A 的影譜上，故在等式

$$\lambda f(\lambda)=1$$

中可以 A 代替 λ：

$$Af(A)=E,$$

亦卽

$$f(A)=A^{-1}❶。$$

以 $r(\lambda)$ 記函數 $\frac{1}{\lambda}$ 的內插多項式，我們可以表逆矩陣 A^{-1} 爲所予矩陣 A 的多項式：

$$A^{-1}=r(A)。$$

❶ 這一情形我們已經在本章第三節中用到。參考該節的第一個足註。

討論有理函數 $\rho(\lambda)=\frac{g(\lambda)}{h(\lambda)}$，其中 $g(\lambda)$ 與 $h(\lambda)$ 為 λ 的互質多項式。這一函數確定於矩陣 A 的影譜上的充分必要條件為：矩陣 A 的特徵數不是多項式 $h(\lambda)$ 的根，亦即❶ $|h(A)|\neq 0$。

在這一條件適合時，我們可以在恆等式

$$\rho(\lambda)h(\lambda)=g(\lambda)$$

中以 A 代替 λ：

$$\rho(A)h(A)=g(A)。$$

故有

$$\rho(A)=g(A)[h(A)]^{-1}=[h(A)]^{-1}g(A)。\tag{37}$$

註1. 如果 A 是 n 維空間 R 的線性運算子，那末有如 $f(A)$，$f(A)$ 完全確定為：

$$f(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}),$$

其中 $r(\lambda)$ 為 $f(\lambda)$ 在運算子 $\boldsymbol{A}$ 的影譜上的拉格蘭日-薩爾凡斯透內插多項式（運算子 $\boldsymbol{A}$ 的影譜為運算子 $\boldsymbol{A}$ 的最小化零多項式 $\psi(\lambda)$ 所確定）。

按照這一定義，如果運算子 $\boldsymbol{A}$ 在空間的某一基底中對應於矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$，那末運算子 $f(\boldsymbol{A})$ 在同一基底中對應於矩陣 $f(A)$。這一章中在有矩陣 A 出現的所有論斷與公式中，代矩陣 A 以運算子 $\boldsymbol{A}$ 後仍然真確。

註2. 可以不從最小多項式 $\psi(\lambda)=\prod_{k=1}^{s}(\lambda-\lambda_k)^{m_k}$ 而從特徵多項式

$$\Delta(\lambda)=\prod_{k=1}^{s}(\lambda-\lambda_k)^{n_k}$$

出發來確定❷矩陣函數 $f(A)$。此時令 $f(A)=g(A)$，其中 $g(\lambda)$ 為函數 $f(\lambda)\bmod\Delta(\lambda)$ 次數 $<n$ 的內插多項式❸。公式(17)，(21)與(23)換為公式

$$f(A)=\sum_{k=1}^{s}[f(\lambda_k)\hat{Z}_{k1}+f'(\lambda_k)\hat{Z}_{k2}+\cdots+f^{(n_k-1)}(\lambda_k)\hat{Z}_{kn_k}],\tag{17'}$$

$$(\lambda E-A)^{-1}=\frac{B(\lambda)}{\Delta(\lambda)}=\sum_{k=1}^{s}\left[\frac{\hat{Z}_{k1}}{\lambda-\lambda_k}+\frac{1!\,\hat{Z}_{k2}}{(\lambda-\lambda_k)^2}+\cdots+\frac{(n_k-1)!\,\hat{Z}_{kn_k}}{(\lambda-\lambda_k)^{n_k-1}}\right],\tag{21'}$$

$$f(A)=\sum_{k=1}^{s}\frac{1}{(n_k-1)!}\left[\frac{B(\lambda)}{\Delta_k(\lambda)}f(\lambda)\right]_{\lambda=\lambda_k}^{(n_k-1)}❹,\tag{23'}$$

其中

$$\Delta_k(\lambda)=\frac{\Delta(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)^{n_k}}\quad(k=1,2,\cdots,s)。$$

但在(17′)式中，$f^{(m_k)}(\lambda_k)$，$f^{(m_k+1)}(\lambda_k)$，…，$f^{(n_k-1)}(\lambda_k)$ 諸值祇是一種假想的引進，因

❶ 參考第四章 § 4，2 的(25)式。

❷ 例如，參考維.達.麥克米倫，剛體動力學，403 及以後諸頁（1951 年俄文版）。

❸ 多項式 $g(\lambda)$ 並不為等式 $f(A)=g(A)$ 與條件"次數 $<n$"所唯一確定。

❹ 公式(23′)的特殊情形，當 $f(\lambda)=\lambda^h$ 時，有時稱為配朗公式[參考[22]，19—22 頁]。

爲比較(21)與(21′)得出:

$$\hat{z}_{k1}=z_{k1},\ \cdots,\ \hat{z}_{km_k}=z_{km_k},\ \hat{z}_{km_k+1}=\cdots=\hat{z}_{kn_k}=0。$$

§5. 矩陣函數對於常係數線性微分方程組的積分的應用

1. 首先討論一級常係數齊次線性微分方程組:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n,\\ \frac{dx_2}{dt}&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{dx_n}{dt}&=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n,\end{aligned}\right\}\tag{38}$$

此處 t 爲獨立變數, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 爲 t 的未知函數,而 $a_{ik}(i, k=1, 2, \cdots, n)$爲複數。

在探究中引進由其係數所構成的方陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 與單列矩陣 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。那末方程組(38)可以寫爲一個矩陣微分方程

$$\frac{dx}{dt}=Ax。\tag{39}$$

此處及以後,我們了解矩陣的導式是代換所予矩陣中每一個元素以其導式所得出的矩陣。故 $\frac{dx}{dt}$ 是元素爲 $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \cdots, \frac{dx_n}{dt}$ 的單列矩陣。

我們要找出適合原始條件:

$$x_1|_{t=0}=x_{10},\ x_2|_{t=0}=x_{20},\ \cdots,\ x_n|_{t=0}=x_{n0},$$

或縮寫爲:

$$x|_{t=0}=x_0\tag{40}$$

的微分方程組的解。

照 t 的冪次把列 x 展成麥克勞倫級數:

$$x=x_0+\dot{x}_0t+\ddot{x}_0\frac{t^2}{2!}+\cdots\left(\dot{x}_0=\frac{dx}{dt}\Big|_{t=0},\ \ddot{x}_0=\frac{d^2x}{dt^2}\Big|_{t=0}\text{依此類推}\right)。\tag{41}$$

但由逐項微分(39)我們得出：

$$\frac{d^2x}{dt^2}=A\frac{dx}{dt}=A^2x,\quad \frac{d^3x}{dt^3}=A\frac{d^2x}{dt^2}=A^3x,\cdots \tag{42}$$

以值 $t=0$ 代進(39)與(42)，我們得出：

$$\dot{x}_0=Ax_0,\quad \ddot{x}_0=A^2x_0,\cdots$$

現在級數(41)可以寫爲：

$$x=x_0+tAx_0+\frac{t^2}{2!}A^2x_0+\cdots=e^{At}x_0\text{。} \tag{43}$$

直接代進(39)式，可以證明(43)是微分方程(39)的解[1]。在(43)中，取 $t=0$，我們得出：$x|_{t=0}=x_0$。

這樣一來，公式(43)給予我們適合原始條件(40)的，所予微分方程組的解。

在(17)中取 $f(\lambda)=e^{\lambda t}$。那末

$$e^{At}=\|q_{ik}(t)\|_1^n=\sum_{k=1}^{s}(Z_{k1}+Z_{k2}t+\cdots+Z_{km_k}t^{m_k-1})e^{\lambda_k t}\text{。} \tag{44}$$

因而我們的解(43)可以寫爲次之形狀：

$$\left.\begin{aligned} x_1&=q_{11}(t)x_{10}+q_{12}(t)x_{20}+\cdots+q_{1n}(t)x_{n0},\\ x_2&=q_{21}(t)x_{10}+q_{22}(t)x_{20}+\cdots+q_{2n}(t)x_{n0},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_n&=q_{n1}(t)x_{10}+q_{n2}(t)x_{20}+\cdots+q_{nn}(t)x_{n0}; \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

其中 $x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{n0}$ 爲等於未知函數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的原始值的任意常數。

這樣一來，所予微分方程組的積分化爲矩陣 e^{At} 的元素的計算。

如果取值 $t=t_0$ 來作爲變數的原始值，那末(43)式須換爲公式

$$x=e^{A(t-t_0)}x_0\text{。} \tag{46}$$

例

$$\frac{dx_1}{dt}=3x_1-x_2+x_3,$$

[1] $\frac{d}{dt}(e^{At})=\frac{d}{dt}\left(E+At+\frac{A^2t^2}{2!}+\cdots\right)=A+A^2t+\frac{A^3t^2}{2!}+\cdots=Ae^{At}$。

$$\frac{dx_2}{dt}=2x_1\quad -x_3,$$

$$\frac{dx_3}{dt}=x_1-x_2+2x_3\text{。}$$

係數矩陣爲

$$A=\begin{Vmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{Vmatrix}\text{。}$$

建立特徵行列式

$$\Delta(\lambda)=-\begin{Vmatrix}3-\lambda & 1 & 1\\ 2 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & 2-\lambda\end{Vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)^2\text{。}$$

這一行列式的二級子式的最大公因式 $D_2(\lambda)=1$。故有

$$\psi(\lambda)=\Delta(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2\text{。}$$

基本公式在此時爲

$$f(A)=f(1)Z_1+f(2)Z_2+f'(2)Z_3\text{。}$$

順次取 $f(\lambda)$爲 $1,\ \lambda-2,\ (\lambda-2)^2$，我們得出：

$$Z_1+Z_2=E=\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix},$$

$$-Z_1+Z_3=A-2E=\begin{Vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{Vmatrix},$$

$$Z_1=(A-2E)^2=\begin{Vmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{Vmatrix}\text{。}$$

求出 Z_1, Z_2 與 Z_3 且代進基本公式，得：

$$f(A)=f(1)\begin{Vmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{Vmatrix}+f(2)\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{Vmatrix}+f'(2)\begin{Vmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{Vmatrix}\text{。}$$

換 $f(\lambda)$以 $e^{\lambda t}$，卽有

$$e^{At}=e^t\begin{Vmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{Vmatrix}+e^{2t}\begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{Vmatrix}+te^{2t}\begin{Vmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix}(1+t)e^{2t} & -te^{2t} & te^{2t}\\ -e^t+(1+t)e^{2t} & e^t-te^{2t} & te^{2t}\\ -e^t+e^{2t} & e^t-e^{2t} & e^{2t}\end{Vmatrix}\text{。}$$

這樣一來，

$$x_1=C_1(1+t)e^{2t}-C_2te^{2t}+C_3te^{2t},$$
$$x_2=C_1[-e^t+(1+t)e^{2t}]+C_2(e^t-te^{2t})+C_3te^{2t},$$
$$x_3=C_1(-e^t+e^{2t})+C_2(e^t-e^{2t})+C_3e^{2t},$$

其中 $$C_1=x_{10},\ C_2=x_{20},\ C_3=x_{30}。$$

2．現在來討論常係數非齊次線性微分方程組：

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+f_1(t),\\ \frac{dx_2}{dt}&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+f_2(t),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{dx_n}{dt}&=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n+f_n(t),\end{aligned}\right\}\tag{47}$$

其中 $f_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$爲在隔間 $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ 中連續函數。以 $f(t)$記元素爲 $f_1(t),f_2(t),\cdots,f_n(t)$的單列矩陣且仍設 $A=\|a_{ik}\|_1^n$，我們可以寫方程組爲：

$$\frac{dx}{dt}=Ax+f(t)。\tag{48}$$

引進新的單列未知函數 z 來代替 x，z 與 x 之間有關係式

$$x=e^{At}z。\tag{49}$$

逐項微分(49)且在所得出的結果中換 $\frac{dx}{dt}$ 以其表示式(48)，我們得出❶：

$$e^{At}\frac{dz}{dt}=f(t)。\tag{50}$$

故

$$z(t)=c+\int_{t_0}^{t}e^{-A\tau}f(\tau)d\tau\ ❷\tag{51}$$

❶ 參考本節1的足註。

❷ 如果給予了純量變數的矩陣函數 $B(\tau)=\|b_{ik}(\tau)\|(i=1,2,\cdots,m;\ k=1,2,\cdots,n;\ t_1\leqslant\tau\leqslant t_2)$那末積分$\int_{t_1}^{t_2}B(\tau)d\tau$ 自然的界說爲：

$$\int_{t_1}^{t_2}B(\tau)d\tau=\left\|\int_{t_1}^{t_2}b_{ik}(\tau)d\tau\right\|\ (i=1,2,\cdots,m;\ k=1,2,\cdots,n)。$$

且因而由(49)得：

$$x=e^{At}\left[c+\int_{t_0}^{t}e^{-A\tau}f(\tau)d\tau\right]=e^{At}c+\int_{t_0}^{t}e^{(At-\tau)}f(\tau)d\tau;\tag{52}$$

此處 c 為任一有常數元素的單列矩陣。

在(52)中給予變數 t 以值 t_0，我們求得：

$$c=e^{-At_0}x_0,$$

因而解(52)可以寫為：

$$x=e^{A(t-t_0)}x_0+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}f(\tau)d\tau。\tag{53}$$

設 $e^{At}=\|q_{ij}(t)\|_1^n$，我們可以寫解(53)為展開式：

$$\left.\begin{aligned}x_1&=q_{11}(t-t_0)x_{10}+\cdots+q_{1n}(t-t_0)x_{n0}+\\&\quad+\int_{t_0}^{t}[q_{11}(t-\tau)f_1(\tau)+\cdots+q_{1n}(t-\tau)f_n(\tau)]d\tau\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\x_n&=q_{n1}(t-t_0)x_{10}+\cdots+q_{nn}(t-t_0)x_{n0}+\\&\quad+\int_{t_0}^{t}[q_{n1}(t-\tau)f_1(\tau)+\cdots+q_{nn}(t-\tau)f_n(\tau)]d\tau\end{aligned}\right\}\tag{54}$$

3．作為一個例子，我們來討論，考慮到地球運動的在地球表面鄰近的真空裏面有重量質點的運動。在這一情形，如所熟知，質點對於地球的加速度為重力常數 mg 與科賴奧來慣性力 $2m\omega\times v$❶ 所確定(v 是質點對於地球的速度，ω 是地球的角速度常量)。故質點運動的微分方程有次之形狀❷。

$$\frac{dv}{dt}=g-2\omega\times v。\tag{55}$$

以等式

$$Ax=-2\omega\times x\tag{56}$$

來確定一個三維歐幾里得空間中線性運算子 A 且寫(55)為

$$\frac{dv}{dt}=Av+g。\tag{57}$$

比較(57)與(48)，由(53)式易知：

$$v=e^{At}v_0+\int_0^t e^{At}dt\cdot g\quad(v_0=v_{t=0})。$$

❶ 例如，參考格．克、蘇斯洛夫，理論力學，141 節(俄文，1944 年版)。

❷ 此處的符號“×”表示向量乘積。

逐項積分，定出動點的動徑：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\int_0^t e^{At}dt\cdot\boldsymbol{v}_0+\int_0^t dt\int_0^t e^{At}dt\cdot\boldsymbol{g}, \tag{58}$$

其中 $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{r}_{t=0},\quad \boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{v}_{t=0}$。

代 e^{At} 以級數 $$\boldsymbol{E}+A\frac{t}{1!}+A^2\frac{t^2}{2!}+\cdots$$

且換運算子 A 以其表示式(56)，我們有

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{v}_0t+\frac{1}{2}\boldsymbol{g}t^2-\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{v}_0t^2+\frac{1}{3}\boldsymbol{g}t^3\right)+\boldsymbol{\omega}\times$$
$$\times\left[\boldsymbol{\omega}\times\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{v}_0t^3+\frac{1}{6}\boldsymbol{g}t^4\right)\right]+\cdots$$

對於數值很小的角速度 ω(對於地球 $\omega\approx7.3\times10^{-5}$ 1/秒)可以不計含有 ω 的二次與高次冪，關於補足由地球轉動所引起的點的偏差，我們得出近似公式

$$\boldsymbol{d}=-\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{v}_0t^2+\frac{1}{3}\boldsymbol{g}t^3\right)。$$

回到(58)的真確解，我們要計算 e^{At}。首先確定運算子 A 的最小多項式有次之形狀。

$$\psi(\lambda)=\lambda(\lambda^2+4\omega^2)。$$

事實上，由(56)求得：

$$A^2\boldsymbol{x}=4\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x})=4(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{x})\boldsymbol{\omega}-4\omega^2\boldsymbol{x},$$
$$A^3\boldsymbol{x}=-2\boldsymbol{\omega}\times A^2\boldsymbol{x}=8\omega^2(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{x})。$$

故由(56)知運算子 $\boldsymbol{E}$, A, A^2 線性無關，而

$$A^3+4\omega^2A=0。$$

最小多項式祇有單根 $0,\ 2\omega i,\ -2\omega i$。對於 e^{At} 的拉格蘭日內插多項式有次之形狀：

$$1+\frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\lambda+\frac{1-\cos 2\omega t}{4\omega^2}\lambda^2。$$

故有 $$e^{At}=\boldsymbol{E}+\frac{\sin 2\omega t}{2\omega}A+\frac{1-\cos 2\omega t}{4\omega^2}A^2。$$

在(58)式中代 e^{At} 以這一個表示式且換運算子 A 以其表示式(56)，我們得出：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{v}_0t+\boldsymbol{g}\frac{t^2}{2}-\boldsymbol{\omega}\times\left(\frac{1-\cos 2\omega t}{2\omega^2}\boldsymbol{v}_0+\frac{2\omega t-\sin 2\omega t}{4\omega^3}\boldsymbol{g}\right)+$$
$$+\boldsymbol{\omega}\times\left[\boldsymbol{\omega}\times\left(\frac{2\omega t-\sin 2\omega t}{2\omega^3}\boldsymbol{v}_0+\frac{-1+2\omega^2t^2+\cos 2\omega t}{4\omega^4}\boldsymbol{g}\right)\right]。 \tag{59}$$

討論特殊情形 $\boldsymbol{v}_0=0$。此時，展開三重向量乘積，我們得出：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{g}\frac{t^2}{2}+\frac{2\omega t-\sin 2\omega t}{4\omega^3}(\boldsymbol{g}\times\boldsymbol{\omega})+\frac{\cos 2\omega t-1+2\omega^2t^2}{4\omega^3}(g\sin\varphi\,\boldsymbol{\omega}-\omega\boldsymbol{g}),$$

其中 φ 為地球上所予點的緯度。項

$$\frac{2\omega t-\sin 2\omega t}{4\omega^3}(\boldsymbol{g}\times\boldsymbol{\omega})$$

表示向東垂直於子午線平面方向的偏差,而上式右節的最後一項給予在子午線平面上離開地軸方向(垂直於地軸)的偏差。

4. 現在設給予次之二級線性微分方程組:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x_1}{dt^2}+a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ \frac{d^2x_2}{dt^2}+a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{d^2x_n}{dt^2}+a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0,\end{aligned}\right\} \tag{60}$$

其中 $a_{ik}(i, k=1, 2, \cdots, n)$ 爲常係數。仍然引進列 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 與方陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$, 我們化方程組(60)爲矩陣形狀:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+Ax=0。\tag{60'}$$

首先討論 $|A|\neq 0$ 的情形。如果 $n=1$, 亦卽 x 與 A 都是純量而 $A\neq 0$, 那末方程(60)的一般解可以寫爲:

$$x=\cos(\sqrt{A}t)\,x_0+(\sqrt{A})^{-1}\sin(\sqrt{A}t)\dot{x}_0, \tag{61}$$

其中 $x_0=x_{t=0}$, $\dot{x}_0=\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0}$。

直接驗算,證明(61)是對於任何 n, x 爲單列矩陣而 A 爲滿秩方陣❶時,方程(60)的解。此處我們用及公式

$$\left.\begin{aligned}\cos(\sqrt{A}\,t)=E-\frac{1}{2!}At^2+\frac{1}{4!}A^2t^4-\cdots,\\ (\sqrt{A})^{-1}\sin(\sqrt{A}\,t)=Et-\frac{1}{3!}At^3+\frac{1}{5!}A^2t^5-\cdots。\end{aligned}\right\} \tag{62}$$

公式(61)包含了方程組(60)或(60′)的全部解,因爲原始値 x_0 與 $\dot{x}_0$ 是可以任意選取的。

公式(62)的右節在 $|A|=0$ 時亦有意義。因此如果函數 $\cos(\sqrt{A}t)$

❶ 我們了解 $\sqrt{A}$ 是一個矩陣其平方等於 A。當 $|A|\neq 0$ 時, $\sqrt{A}$ 顯然存在(參考本章§4)。

與函數$(\sqrt{A})^{-1}\sin(\sqrt{A}t)$祇是了解爲(62)式右節所構成的表示式，那末即使$|A|=0$時(61)式都是所予微分方程組的一般解。

讓讀者驗證，適合原始條件$x_{t=0}=x_0$與$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0}=\dot{x}_0$的非齊次組

$$\frac{d^2x}{dt^2}+Ax=f(t) \tag{63}$$

的一般解可以寫爲

$$x=\cos(\sqrt{A}t)x_0+(\sqrt{A})^{-1}\sin(\sqrt{A}t)\dot{x}_0+$$
$$+(\sqrt{A})^{-1}\int_0^t \sin[\sqrt{A}(t-\tau)]f(\tau)d\tau。 \tag{64}$$

如果取$t=t_0$作爲開始時間，那末在(61)與(64)式中要換$\cos(\sqrt{A}t)$與$\sin(\sqrt{A}t)$爲$\cos\sqrt{A}(t-t_0)$與$\sin\sqrt{A}(t-t_0)$，而且要換$\int_0^t$爲$\int_{t_0}^t$。

在特殊情形

$$f(t)=h\sin(pt+\alpha)$$

時(h爲常數列，而p, α爲常數)，(64)可換寫爲：

$$x=\cos(\sqrt{A}t)c+(\sqrt{A})^{-1}\sin(\sqrt{A}t)d+$$
$$+(A-p^2E)^{-1}h\sin(pt+\alpha),$$

其中c, d爲有任何常數元素的單列矩陣。如果p^2不是矩陣A的特徵數($|A-p^2E|\neq 0$)，那末這一個公式是有意義的。

§6. 在線性系統情形運動的穩定性

設$x_1, x_2, \cdots, x_n$爲參數，刻劃所在研究的運動的已予力學系統中"擾動"運動的偏差❶，且設這些參數適合一級微分方程組：

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, t) \quad (i=1, 2, \cdots, n); \tag{65}$$

❶ 在這些參數中，所研究的運動的性質爲常數零值$x_1=0$, $x_2=0$, $\cdots$, $x_n=0$所描出，故在這一問題的數學處理時，述及微分方程(65)的零解的穩定性。

此處的獨立變數 t 表示時間，而右節 $f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, t)$ 爲量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 在某一區域（含有點 $x_1=0, x_2=0, \cdots, x_n=0$）內對於所有 $t>t_0$（t_0 爲開始時間）的連續函數。

引進略普諾夫的運動穩定性的定義❶。

所研究的運動稱爲穩定的，如果對於任何數 $\varepsilon>0$，可以找出這樣的數 $\delta>0$，使得對於任何參數的原始值（$t=t_0$ 時）$x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{n0}$，的模都小於數 δ 時，參數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 在所有運動時間（$t\geqslant t_0$）中，其模都小於數 ε，亦卽對於任何 $\varepsilon>0$，都可以得出這樣的 $\delta>0$，使得在

$$|x_{i0}|<\delta \quad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{66}$$

時得出：

$$|x_i(t)|<\varepsilon \quad (t\geqslant t_0)。\tag{67}$$

如果我們增加條件，說對於某一個 $\delta>0$，常有 $\lim\limits_{t\to+\infty} x_i(t)=0\ (i=1, 2,\cdots, n)$，祇要 $|x_{i0}|<\delta \quad (i=1, 2,\cdots, n)$，那末所研究的運動稱爲漸近穩定的。

現在來討論線性組，亦卽這樣的特殊情形，方程組(65)是一個齊次線性微分方程組

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t)x_k, \tag{68}$$

其中 $p_{ik}(t)$ 爲 $t\geqslant t_0$ 時的連續函數（$i, k=1, 2,\cdots, n$）。

對於矩陣的寫法，(68)可以寫爲：

$$\frac{dx}{dt}=P(t)x。\tag{68'}$$

此處 x 是元素爲 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的單列矩陣，而 $P(t)=\|p_{ik}(t)\|_1^n$ 爲係數矩陣。

以

$$q_{1j}(t), q_{2j}(t), \cdots, q_{nj}(t) \quad (j=1, 2,\cdots, n) \tag{69}$$

❶ 參考[19]，4 頁；[33]，I 頁或[20]，1—3 頁。

爲方程組(68)的 n 個線性無關解❶。以此諸解爲列的矩陣 $Q(t)=\|q_{ij}\|_1^n$ 稱爲方程組(68)的積分矩陣。

齊次線性微分方程組的任何解都可以從 n 個線性無關解以常數爲係數的線性組合來得出：

$$x_i=\sum_{j=1}^{n}c_jq_{ij}(t)\quad(i=1,\ 2,\cdots,\ n),$$

或用矩陣的寫法：

$$x=Q(t)c,\tag{70}$$

其中 c 爲元素是任意常數 $c_1,\ c_2,\cdots,\ c_n$ 的單列矩陣。

現在選取特殊的積分矩陣，對於他有

$$Q(t_0)=E;\tag{71}$$

換句話說，在選取 n 個線性無關解(69)時，由次之特殊的原始條件出發❷：

$$q_{ij}(t_0)=\delta_{ij}=\begin{cases}0 & (i\neq j),\\ 1 & (i=j)\end{cases}\quad(i,\ j=1,\ 2,\cdots,\ n)。$$

那末在(70)式中取 $t=t_0$，由(71)求得：

$$x_0=c,$$

所以(70)式有次之形狀：

$$x=Q(t)x_0\tag{72}$$

或者寫爲展開式

$$x_i=\sum_{j=1}^{n}q_{ij}(t)x_{j0}\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)。\tag{72'}$$

討論三種情形：

1．$Q(t)$是在區間 $(t_0,+\infty)$ 中有界限的矩陣，亦卽有這樣的數 M 存在，使得

$$|q_{ij}(t)|\leqslant M\quad(t\geqslant t_0;\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

---

❶ 此處第二個足數是指解的序數。

❷ 任何原始條件確定了而且是唯一的確定了所予方程組的某一個解。

在這一情形，由(72′)得出：

$$|x_i(t)| \leqslant nM \max|x_{j0}|。$$

穩定性條件能夠適合。(祇要在(66)，(67)中取 $\delta < \frac{\varepsilon}{nM}$。)性質為零解 $x_1=0, x_2=0, \cdots, x_n=0$ 所描出的運動是穩定的。

2. $\lim\limits_{t\to+\infty} Q(t)=0$。在這一情形，矩陣 $Q(t)$在隔間$(t_0, +\infty)$中是有界限的，故由上述，知此運動是穩定的。再者，由(72)得出：

$$\lim_{t\to+\infty} x(t)=0$$

對於任何 x_0 都能成立。運動是漸近穩定的。

3. $Q(t)$在隔間$(t_0, +\infty)$中是無界限的矩陣。這就是說，在函數 $q_{ij}(t)$中至少有一個，例如 $q_{hk}(t)$，在隔間$(t_0, +\infty)$中沒有界限。取原始條件 $x_{10}=0, \cdots, x_{k0}\neq 0, \cdots, x_{n0}=0$。那末

$$x_h(t)=q_{hk}(t)x_{k0}。$$

不管 x_{k0} 的模如何小，函數 $x_h(t)$ 是沒有界限的。條件(67)對於任何 δ 都不能適合。運動不是穩定的。

現在來討論，在方程組(68)中係數全為常數的，特殊情形：

$$P(t)=P=\text{常數}。\tag{73}$$

在這一情形(參考 § 5)

$$x=e^{P(t-t_0)}x_0。\tag{74}$$

比較(72)與(74)，我們在所予情形得出

$$Q(t)=e^{P(t-t_0)}。\tag{75}$$

以 $\psi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}$

記係數矩陣 P 的最小多項式。

為了研究積分矩陣(75)，我們應用本章 § 3 的公式(17)。在這一情形，$f(\lambda)=e^{\lambda(t-t_0)}$(視 t 為參數)，$f^{(j)}(\lambda_k)=(t-t_0)^j e^{\lambda_k(t-t_0)}$。公式(17)給予：

$$e^{P(t-t_0)}=\sum_{k=1}^{s}[Z_{k1}+Z_{k2}(t-t_0)+\cdots+Z_{km_k}(t-t_0)^{m_k-1}]e^{\lambda_k(t-t_0)} \tag{76}$$

討論三種情形：

1．$\mathrm{Re}\,\lambda_k \leqslant 0 (k=1, 2, \cdots, s)$，而且對於有 $\mathrm{Re}\,\lambda_k=0$ 的 λ_k 都對應的有 $m_k=1$（亦即純虛數的特徵數是最小多項式的單根）。

2．$\mathrm{Re}\,\lambda_k<0 \ (k=1, 2, \cdots, s)$。

3．對於某些 k 有 $\mathrm{Re}\,\lambda_k>0$ 或 $\mathrm{Re}\,\lambda_k=0$，但是 $m_k>1$。

由公式(76)知在第一種情形，矩陣 $Q(t)=e^{P(t-t_0)}$ 在隔間 $(t_0, +\infty)$ 中是有界限的；在第二種情形，當 $t\to+\infty$ 時，$e^{P(t-t_0)}\to 0$；而在第三種情形，矩陣 $e^{P(t-t_0)}$ 在隔間 $(t_0, +\infty)$ 中沒有界限[1]。

故在第一種情形，運動$(x_1=0, x_2=0, \cdots, x_n=0)$是穩定的，在第二種情形是漸近穩定的，而在第三種情形是非穩定的。

所討論的結果可以總結爲次之定理[2]：

定理 3. 按照略普諾夫的定義，當 $P=$ 常量時，線性組(68)的零解是穩定的，如果(1)矩陣 P 的所有特徵數有負或零實數部分，(2)所有實數部分爲零的特徵數，亦即爲純虛數的特徵數（如果有的時候），都是

[1] 此處的特殊討論祇需要討論次之情形：在 $e^{P(t-t_0)}$ 的表示式(76)中有某些極大增長項（當 $t\to+\infty$），亦即有極大的 $\mathrm{Re}\,\lambda_k=\alpha$ 與（對於已予的 $\mathrm{Re}\,\lambda_k=\alpha$）有極大值：$m_k=m_0$。那末表示式(76)可以表成形狀

$$e^{P(t-t_0)}=e^{\alpha_0(t-t_0)}(t-t_0)^{m_0-1}\left[\sum_{j=1}^{r} Z_{k_j m_0} e^{i\beta_j(t-t_0)}+(*)\right],$$

其中 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 爲不同的實數，而$(*)$記當 $t\to+\infty$ 時趨於零的矩陣。由這一表示式推知矩陣 $e^{P(t-t_0)}$ 當 $\alpha_0+m_0>0$ 時是沒有界限的，因爲當 $t\to+\infty$ 時矩陣 $\sum_{j=1}^{r} Z_{k_j m_0}\cdot e^{i\beta_j(t-t_0)}$ 不能趨於零。我們證明了後一論斷，如果我們能夠證明函數

$$f(t)=\sum_{j=1}^{r} c_j e^{i\beta_j t},$$

其中 c_j 爲複數，而 β_j 爲彼此不同的實數時，祇有在 $f(t)\equiv 0$ 的情形才能當 $t\to+\infty$ 時他趨於零。但是，事實上，由於 $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=0$ 推知

$$\sum_{j=1}^{r}|c_j|^2=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt=0,$$

故有

$$c_1=c_2=\cdots=c_n=0。$$

[2] 更細緻的關於近似線性組（亦即非線性組於其中略去非線性項來化爲線性組）的穩定性與非穩定性的判定，參考第十四章，§3。

矩陣 P 的最小多項式的單根；是非穩定的，如果對於條件（1），（2）至少有一個不能適合。

線性組(68)的零解是漸近穩定的充分必要條件為：矩陣 P 的所有特徵數都有負實數部分。

在常數矩陣 P 的特徵數為任何值的一般情形，上述推理可以推得關於積分矩陣 $e^{P(t-t_0)}$ 的性狀的判斷。

定理 4. 當 $P=$常量時線性組(58)的積分矩陣 $e^{P(t-t_0)}$ 常可表成次之形狀：

$$e^{P(t-t_0)}=Z_-(t)+Z_0+Z_+(t),$$

其中（1）$\lim\limits_{t\to+\infty} Z_-(t)=0$，（2）$Z_0$ 或等於常量或為在隔間 $(t_0, +\infty)$ 中有界限的矩陣，而當 $t\to+\infty$ 時，沒有極限存在，（3）$Z_+(t)$ 或 $\equiv 0$，或為在隔間 $(t_0, +\infty)$ 中沒有界限的矩陣。

證明 分等式(76)的右節中諸項為三部分。以 $Z_-(t)$ 記含有因子 $e^{\lambda_k(t-t_0)}$ 且其 $\mathrm{Re}\,\lambda_k<0$ 的所有諸項的和。以 $Z_0(t)$ 記 $\mathrm{Re}\,\lambda_k=0$ 的所有矩陣 Z_{k1} 的和。以 $Z_+(t)$ 記所有其餘諸項的和。易知這樣的 $Z_-(t)$，$Z_0(t)$ 與 $Z_+(t)$ 有定理中所指出的性質（1），（2）與（3）。

第六章　多項式矩陣的相抵變換．初級因子的解析理論

本章前三節從事於多項式矩陣相抵性的研究。從這一個基礎在此後三節中建立初級因子的解析理論，亦即化常數（非多項式）方陣 A 爲法式 $\tilde{A}(A=T\tilde{A}T^{-1})$ 的理論。在本章的最後兩節中給予變換矩陣 T 的兩個構成方法。

§1．多項式矩陣的初級變換

定義 1． 多項式矩陣或 λ-矩陣是指一個長方矩陣，其元素爲 λ 的多項式：

$$A(\lambda)=\|a_{ik}(\lambda)\|=\|a_{ik}^{(0)}\lambda^l+a_{ik}^{(1)}\lambda^{l-1}+\cdots+a_{ik}^{(l)}\|$$
$$(i=1, 2, \cdots, m;\ k=1, 2, \cdots, n)$$

［此處 l 爲多項式 $a_{ik}(\lambda)$ 的次數的最大數］。

設

$$A_j=\|a_{ik}^{(j)}\|\quad (i=1, 2, \cdots, m;\ k=1, 2, \cdots, n;$$
$$j=0, 1, \cdots, l),$$

我們可以表多項式矩陣爲關於 λ 的矩陣多項式的形狀，亦即爲有矩陣係數的多項式：

$$A(\lambda)=A_0\lambda^l+A_1\lambda^{l-1}+\cdots+A_{l-1}\lambda+A_l\ 。$$

在討論中引進多項式矩陣 $A(\lambda)$ 上的次諸初級運算：

1° 乘任何一行，例如第 i 行，以數 $c\neq 0$。

2° 加到任何一行，例如第 i 行，以其任何一行，例如第 j 行，與任何多項式 $b(\lambda)$ 的乘積。

3° 互易任何兩行，例如第 i 行與第 j 行的位置。

讓讀者驗證，運算 1°, 2°, 3° 相當於左乘多項式矩陣各以次之 m

級方陣❶：

$$
S'=\begin{Vmatrix}
1 & \cdots & & \overset{(i)}{\vdots} & & \cdots & 0\\
\vdots & \ddots & & \vdots & & & \vdots\\
\vdots & & & c & & & \vdots\\
\vdots & & & & & \ddots & \vdots\\
0 & \cdots & & & & \cdots & 1
\end{Vmatrix},\quad
S''=\begin{Vmatrix}
1 & \cdots & & & \overset{(j)}{\vdots} & \cdots & 0\\
\vdots & \ddots & & & \vdots & & \vdots\\
\vdots & & 1 & \cdots & b(\lambda) & \cdots & \vdots\\
\vdots & & & & \ddots & & \vdots\\
0 & \cdots & & & & \cdots & 1
\end{Vmatrix}\cdots(i)
$$

$$
S'''=\begin{Vmatrix}
1 & & \overset{(i)}{\vdots} & & \overset{(j)}{\vdots} & & 0\\
& \ddots & \vdots & & \vdots & & \\
\cdots & & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \\
& & \vdots & \ddots & \vdots & & \\
\cdots & & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \\
& & \vdots & & \vdots & \ddots & \\
0 & & & & & & 1
\end{Vmatrix},
\qquad (1)
$$

亦卽應用運算 1°, 2°, 3° 於矩陣 $A(\lambda)$ 的結果各變爲矩陣 $S'\cdot A(\lambda)$, $S''\cdot A(\lambda)$, $S'''\cdot A(\lambda)$。故 1°, 2°, 3° 型運算稱爲左初級運算。

完全相類似的界說矩陣多項式上右初級運算（這些運算不是施行於多項式矩陣的行上而是施行於其列上）與其對應的（n 級）矩陣❷：

---

❶ 在矩陣（1）中，所有沒有註明的元素，在主對角線上的都等於 1 而在其餘地方都等於零。

❷ 同上註。

$$T'=\begin{Vmatrix} 1 & \cdots & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \vdots \\ & & 1 & & & \\ & & & c & \cdots & \vdots \\ & & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & & & 1 \end{Vmatrix}\cdots(i),\quad T''=\begin{Vmatrix} 1 & \cdots & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \vdots \\ & & 1 & \cdots & & & \vdots \\ & & \vdots & \ddots & & & \\ & & b(\lambda) & \cdots & 1 & \cdots & \vdots \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & & & & 1 \end{Vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \cdots(i) \\ \\ \cdots(j) \\ \\ \\ \end{matrix},$$

$$T'''=\begin{Vmatrix} 1 & \cdots & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \vdots \\ & & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \vdots \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \vdots \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & & & & 1 \end{Vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \cdots(i) \\ \\ \cdots(j) \\ \\ \\ \end{matrix}。$$

應用右初級運算於矩陣 $A(\lambda)$ 的結果是右乘以對應矩陣 T。

我們注意，矩陣 T' 與矩陣 S' 相同，T''' 與 S''' 相同，且如互易序數 i 與 j，則矩陣 T'' 亦與 S'' 一致。S', S'', S''' 型矩陣（或者同樣的，T', T'', T''' 型矩陣）稱為初級矩陣。

任何初級矩陣的行列式與 λ 無關且不等於零。故對每一個左（右）初級運算都有逆運算存在，他們亦是左（右）初級運算❶。

定義 2．兩個多項式矩陣 $A(\lambda)$ 與 $B(\lambda)$ 稱為（1）左相抵的，（2）右相抵的，（3）相抵的，如果其中的某一個可以從另一個對應的經由應用（1）左初級運算，（2）右初級運算，（3）左與右初級運算來得

❶ 故知，如果矩陣 $B(\lambda)$ 可由 $A(\lambda)$ 應用左（右；左與右）初級運算來得出，那末反過來，矩陣 $A(\lambda)$ 亦可由 $B(\lambda)$ 應用同類型的初級運算來得出。左初級運算與右初級運算都構成羣。

出[1]。

設矩陣 $B(\lambda)$ 係由 $A(\lambda)$ 應用左初級運算，對應矩陣爲，$S_1, S_2, \cdots, S_p$ 者所得出的。那末

$$B(\lambda)=S_pS_{p-1}\cdots S_1A(\lambda)。\tag{2}$$

以 $P(\lambda)$ 記乘積 $S_pS_{p-1}\cdots S_1$，我們寫等式(2)爲

$$B(\lambda)=P(\lambda)A(\lambda),\tag{3}$$

其中 $P(\lambda)$，與矩陣 $S_1, S_2, \cdots, S_p$ 的每一個一樣，有不爲零的**常數**行列式[2]。

在次節中將證明，每一個有不爲零的常數行列式的 λ-方陣都可以表爲初級矩陣的乘積的形狀。所以等式(3)與等式(2)相抵，因而他說明了矩陣 $A(\lambda)$ 與 $B(\lambda)$ 的左相抵性。

對於多項式矩陣 $A(\lambda)$ 與 $B(\lambda)$ 的右相抵性可以換等式(3)爲等式

$$B(\lambda)=A(\lambda)Q(\lambda),\tag{3'}$$

而對於(兩邊)相抵性，則有等式

$$B(\lambda)=P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)。\tag{3''}$$

此處的 $P(\lambda)$ 與 $Q(\lambda)$ 仍然是這樣的矩陣，他的行列式不爲零且與 λ 無關。

這樣一來，定義 2 可以換爲次之等價的定義。

定義 2′. 兩個 λ-長方矩陣 $A(\lambda)$ 與 $B(\lambda)$ 稱爲(1)左相抵的，(2)右相抵的，(3)相抵的，如果各有

$$(1)B(\lambda)=P(\lambda)A(\lambda),\quad (2)B(\lambda)=A(\lambda)Q(\lambda),$$
$$(3)B(\lambda)=P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda),$$

其中 $P(\lambda)$ 與 $Q(\lambda)$ 爲有不爲零的常數行列式的多項式方陣。

所有上面所引進的概念可以次之重要的例子來說明。

---

[1] 由定義知道，左相抵，右相抵或單純的相抵都祇是對於有相同維數的長方矩陣而言的。

[2] 這就是說與 λ 無關。

討論有變數為 t 的 n 個未知函數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 與 m 個方程的 l 級常係數齊次線性微分方程組：

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}(D)x_1+a_{12}(D)x_2+\cdots+a_{1n}(D)x_n=0, \\ a_{21}(D)x_1+a_{22}(D)x_2+\cdots+a_{2n}(D)x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}(D)x_1+a_{m2}(D)x_2+\cdots+a_{mn}(D)x_n=0; \end{array}\right\} \quad (4)$$

此處

$$a_{ik}(D)=a_{ik}^{(0)}D^l+a_{ik}^{(1)}D^{l-1}+\cdots+a_{ik}^{(l)} \quad (i=1, 2, \cdots, m;\ k=1, 2, \cdots, n)$$

是一個有常係數的關於 D 的多項式，而 $D=\frac{d}{dt}$ 是一個微分運算子。

運算子係數矩陣

$$A(D)=\|a_{ik}(D)\| \quad (i=1, 2, \cdots, m;\ k=1, 2, \cdots, n)$$

是一個多項式矩陣或 D—矩陣。

顯然，矩陣 $A(D)$ 上左初級運算 1° 表示逐項乘微分方程組的第 i 個方程以數 $c\neq0$。左初級運算 2° 表示逐項加到第 i 個方程以其第 j 個方程經微分運算 $b(D)$ 後的結果。左初級運算 3° 表示互易第 i 個與第 j 個方程的位置。

這樣一來，如果在方程組（4）中換運算子係數矩陣 $A(D)$ 以其左相抵矩陣 $B(D)$，那末我們得出一個導出的方程組。因為，相反的，由於同樣的討論我們可以從導出組來得出原方程組，所以這兩組方程是等價的❶。

不難從所予的例子來說明右相抵運算。這些運算的第一個運算表示代換未知函數中的一個函數 x_i 以新未知函數 $x_i'=\frac{1}{c}x_i$；第二個初級運算表示引進新未知函數 $x_j'=x_j+b(D)x_i$（來代換 x_j）；第三個運算表示在方程組中互易各含 x_i 與 x_j 的項（亦卽 $x_i=x_j'$，$x_j=x_i'$）。

❶ 此處我們是承認了，所求的函數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 在所遇到的變換中，對於這些函數的所有用到的各級導式都是存在的。在這一個限制之下，有左相抵矩陣 $A(D)$ 與 $B(D)$ 的兩組方程有同一解。

§2. λ-矩陣的標準形式

1. 首先弄清楚，祇應用左初級運算可以化多項式長方矩陣 $A(\lambda)$ 爲怎樣的較簡單的形狀。

我們假設在矩陣 $A(\lambda)$ 的第一列中有不恆等於零的元素。在他們裏面取次數最小的多項式且調動行的次序使得這一個元素爲 $a_{11}(\lambda)$。此後除多項式 $a_{i1}(\lambda)$ 以 $a_{11}(\lambda)$；記其商式與餘式以 $q_{i1}(\lambda)$ 與 $r_{i1}(\lambda)$ $(i=1, 2, \cdots, m)$；

$$a_{i1}(\lambda)=a_{11}(\lambda)q_{i1}(\lambda)+r_{i1}(\lambda) \quad (i=2, \cdots, m)。$$

現在從第 i 行減去第一行與 $q_{i1}(\lambda)$ 的乘積 $(i=2, \cdots, m)$。如果此時餘式 $r_{i1}(\lambda)$ 不全恆等於零，那末在他們裏面，有一個不等於零而且是次數最小的多項式，我們可以調動行的次序使其位於 $a_{11}(\lambda)$ 的地方。這些運算的結果可以使多項式 $a_{11}(\lambda)$ 的次數降低。

現在我們重復這一方法來繼續進行。因爲多項式 $a_{11}(\lambda)$ 的次數是有限的，所以在某一個步驟之後，這一方法將不能繼續進行，亦即在此時所有元素 $a_{21}(\lambda), a_{31}(\lambda), \cdots, a_{m1}(\lambda)$ 都變成恆等於零。

此後我們取元素 $a_{22}(\lambda)$ 且應用同樣的方法於序數爲 $2, 3, \cdots, m$ 的諸行。那就會得到 $a_{32}(\lambda)=\cdots=a_{m2}(\lambda)=0$。繼續如此進行，最後我們化矩陣 $A(\lambda)$ 爲次之形狀：

$$\left\| \begin{matrix} b_{11}(\lambda) & b_{12}(\lambda) & \cdots & b_{1m}(\lambda) & \cdots & b_{1n}(\lambda) \\ 0 & b_{22}(\lambda) & \cdots & b_{2m}(\lambda) & \cdots & b_{2n}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{mm}(\lambda) & \cdots & b_{mn}(\lambda) \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} b_{11}(\lambda) & b_{12}(\lambda) & \cdots & b_{1n}(\lambda) \\ 0 & b_{22}(\lambda) & \cdots & b_{2n}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn}(\lambda) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \right\|。 \quad (5)$$

$$(m \leqslant n) \qquad\qquad (m \geqslant n)$$

如果多項式 $b_{22}(\lambda)$ 不恆等於零，那末應用第二種左初級運算，可以

使元素 $b_{12}(\lambda)$ 的次數小於 $b_{22}(\lambda)$ 的次數（如果 $b_{22}(\lambda)$ 是零次的，那末 $b_{12}(\lambda)$ 可以變爲恆等於零）。完全一樣的，如果 $b_{33}(\lambda)\neq 0$，那末應用第二種左初級運算，可以使元素 $b_{13}(\lambda)$，$b_{23}(\lambda)$ 的次數都小於 $b_{33}(\lambda)$ 的次數，而且並不變動元素 $b_{12}(\lambda)$，諸如此類。

我們建立了次之定理：

定理 1. 任一 $m\times n$ 維多項式長方矩陣都可以應用左初級運算化爲（5）的形狀，其中多項式 $b_{1k}(\lambda)$，$b_{2k}(\lambda)$，$\cdots$，$b_{k-1,k}(\lambda)$ 的次數都小於 $b_{kk}(\lambda)$ 的次數，如果 $b_{kk}(\lambda)\neq 0$；而全部恆等於零，如果 $b_{kk}(\lambda)=$ 常數 $\neq 0$ $(k=2, 3, \cdots, \min(m, n))$。

完全一樣的可以證明

定理 2. 任一 $m\times n$ 維多項式長方矩陣都可以應用右初級運算化爲次之形狀：

$$\left\|\begin{matrix} c_{11}(\lambda) & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_{21}(\lambda) & c_{22}(\lambda) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1}(\lambda) & c_{m2}(\lambda) & \cdots & c_{mm}(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \end{matrix}\right\| \ (m\leqslant n), \quad \left\|\begin{matrix} c_{11}(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ c_{21}(\lambda) & c_{22}(\lambda) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1}(\lambda) & c_{n2}(\lambda) & \cdots & c_{nn}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1}(\lambda) & c_{m2}(\lambda) & \cdots & c_{mn}(\lambda) \end{matrix}\right\| \ (m\geqslant n), \quad (6)$$

其中多項式 $c_{k1}(\lambda)$，$c_{k2}(\lambda)$，$\cdots$，$c_{k,k-1}(\lambda)$ 的次數都小於 $c_{kk}(\lambda)$ 的次數，如果 $c_{kk}(\lambda)\neq 0$；而全部恆等於零，如果 $c_{kk}(\lambda)=$ 常數 $\neq 0$ $(k=2, 3, \cdots, \min(m,n))$。

2. 從定理 1 與 2 推得次之

推論 如果多項式方陣 $P(\lambda)$ 的行列式與 λ 無關且不等於零，那末這一個矩陣可以表爲有限個初級矩陣的乘積。

事實上，按照定理 1 可以應用左初級運算化矩陣 $P(\lambda)$ 爲次之形狀

$$\left\| \begin{matrix} b_{11}(\lambda) & b_{12}(\lambda) & \cdots & b_{1n}(\lambda) \\ 0 & b_{22}(\lambda) & \cdots & b_{2n}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn}(\lambda) \end{matrix} \right\|, \tag{7}$$

其中 n 爲矩陣 $P(\lambda)$ 的級數。因爲應用初級運算於多項式方陣時，這個矩陣的行列式祇是乘上一個不爲零的常數因子，所以矩陣(7)的行列式，與 $P(\lambda)$ 的行列式一樣，與 λ 無關且不等於零，亦卽

$$b_{11}(\lambda)\,b_{22}(\lambda)\cdots b_{nn}(\lambda)=\text{常數}\neq 0。$$

故有
$$b_{kk}(\lambda)=\text{常數}\neq 0 \quad (k=1,\,2,\,\cdots,\,n)。$$

但是再從定理 1 知矩陣(7)有對角形的形狀 $\|b_k\delta_{ik}\|_1^n$，故可應用第一種左初級運算使其化爲么矩陣 E。那末反過來，么矩陣 E 可以經由矩陣爲 $S_1,\,S_2,\,\cdots,\,S_p$ 的左初級運算化爲 $P(\lambda)$。因此，

$$P(\lambda)=S_pS_{p-1}\cdots S_1E=S_pS_{p-1}\cdots S_1\;。$$

從所證明的推論推知，有如上節所述的，多項式矩陣相抵性的兩個定義 2 與 2′ 的等價性。

3. 回到我們的例子——微分方程組(4)。應用定理 1 於運算子係數矩陣 $\|a_{ik}(D)\|$。那末，有如上節中所指出的，可以換組(4)爲等價組：

$$\left.\begin{aligned} b_{11}(D)x_1+b_{12}(D)x_2+\cdots+b_{1s}(D)x_s&=-b_{1,s+1}(D)x_{s+1}-\cdots-b_{1n}(D)x_n,\\ b_{22}(D)x_2+\cdots+b_{2s}(D)x_s&=-b_{2,s+1}(D)x_{s+1}-\cdots-b_{2n}(D)x_n,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots\cdots\\ b_{ss}(D)\,x_s&=-b_{s,s+1}(D)\,x_{s+1}-\cdots-b_{sn}(D)x_n, \end{aligned}\right\} \tag{4′}$$

其中 $s=\min(m,\,n)$。在這一組中，函數 $x_{s+1},\,\cdots,\,x_n$ 可以任意選取，此後再順次定出函數 $x_s,\,x_{s-1},\,\cdots,\,x_1$ 而且在確定這些函數的每一個步驟祇要積分一個僅含一未知函數的微分方程。

4. 現在來用左與右初級運算於多項式長方矩陣 $A(\lambda)$，使其化爲"標準"形式。

在矩陣 $A(\lambda)$ 的所有不恆等於零的元素 $a_{ik}(\lambda)$ 中，取其關於 λ 的次數最小者，經適宜的行列調動，使這一個元素爲 $a_{11}(\lambda)$。此後求出多項

式$q_{i1}(\lambda)$與$q_{1k}(\lambda)$爲$a_{11}(\lambda)$除後的商式與餘式：

$$a_{i1}(\lambda)=a_{11}(\lambda)q_{i1}(\lambda)+r_{i1}(\lambda),\quad a_{1k}(\lambda)=a_{11}(\lambda)q_{1k}(\lambda)+r_{1k}(\lambda)$$
$$(i=2,3,\cdots,m;\ k=2,3,\cdots,n)。$$

如果在餘式$r_{i1}(\lambda)$，$r_{1k}(\lambda)$ $(i=2,\cdots,m;\ k=2,\cdots,n)$中，至少有一個例如$r_{1k}(\lambda)$不是恆等於零，那末從第$k$列減去第一列與$q_{1k}(\lambda)$的乘積，我們就換元素$a_{1k}(\lambda)$爲餘式$r_{1k}(\lambda)$，他的次數小於$a_{11}(\lambda)$的次數。那末我們就有可能再來降低位於矩陣左上角這一元素的次數，使在這個地方的元素關於λ的次數最小。

如果所有的餘式$r_{21}(\lambda),\cdots,r_{m1}(\lambda)$；$r_{12}(\lambda),\cdots,r_{1n}(\lambda)$都恆等於零，那末從第$i$行減去第一行與$q_{i1}(\lambda)$的乘積$(i=2,\cdots,m)$，而從第$k$列減去第一列與$q_{1k}(\lambda)$的乘積$(k=2,\cdots,n)$我們化原多項式矩陣爲次之形狀

$$\begin{Vmatrix} a_{11}(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{m2}(\lambda) & \cdots & a_{mn}(\lambda) \end{Vmatrix}。$$

如果在此時在元素$a_{ik}(\lambda)$ $(i=2,\cdots,m;\ k=2,\cdots,n)$中，至少有一個不能爲$a_{11}(\lambda)$所除盡，那末對第一列加上含有這一個元素的那一列，我們就得出前面的一種情形，因此仍可換元素$a_{11}(\lambda)$爲一個次數較低的多項式。

因爲原先的元素$a_{11}(\lambda)$有一定的次數而降低這個次數的步驟不能無限制的繼續下去，所以經過有限次初級運算後，我們一定得出次形矩陣：

$$\begin{Vmatrix} a_1(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22}(\lambda) & \cdots & b_{2n}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_{m2}(\lambda) & \cdots & b_{mn}(\lambda) \end{Vmatrix}, \tag{8}$$

其中所有元素$b_{ik}(\lambda)$都可以被$a_1(\lambda)$所除盡。如果在這些元素$b_{ik}(\lambda)$

中有不恆等於零的元素，那末對於序數為 2, …, m 的行與序數為 2, …, n 的列應用上述的同樣方法，我們可以化矩陣(8)為次之形狀：

$$\left\|\begin{array}{ccccc} a_1(\lambda) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & c_{33}(\lambda) & \cdots & c_{3n}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & c_{m3}(\lambda) & \cdots & c_{mn}(\lambda) \end{array}\right\|,$$

其中 $a_2(\lambda)$ 為 $a_1(\lambda)$ 所除盡，而所有多項式 $c_{ik}(\lambda)$ 都為 $a_2(\lambda)$ 所除盡。繼續施行這種方法，最後我們化原矩陣為次之形狀：

$$\left\|\begin{array}{cccccc} a_1(\lambda) & 0 & \cdots & 0 & 0\cdots 0 \\ 0 & a_2(\lambda) & \cdots & 0 & 0\cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_s(\lambda) & 0\cdots 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\cdots 0 \end{array}\right\|, \tag{9}$$

其中多項式 $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$, …, $a_s(\lambda)$ $(s\leqslant m, n)$都不恆等於零，而且每一個都可以被其前一個所除盡。

各乘前 s 行以適宜的不為零的常數因子，我們可以使多項式 $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$, …, $a_s(\lambda)$ 的首項係數都等於 1。

定義 3. 多項式長方矩陣稱為*標準對角形的*，如果他有(9)的形狀，其中(1)多項式 $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$, …, $a_s(\lambda)$ 都不恆等於零且有(2)多項式 $a_2(\lambda)$, …, $a_s(\lambda)$ 中每一個都被其前一個所除盡。此處假定所有多項式 $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$, …, $a_s(\lambda)$ 的首項係數都等於 1。

這樣一來，我們證明了，*任何多項式長方矩陣都與某一個標準對角形矩陣相抵*。在次節中我們將證明，*這些多項式 $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$, …, $a_s(\lambda)$ 為所予矩陣 $A(\lambda)$ 所唯一確定*，而且建立這些多項式與矩陣 $A(\lambda)$ 的元素間的關係式。

§3. 多項式矩陣的不變因式與初級因子

1. 引進關於 λ-矩陣 $A(\lambda)$ 的不變因式的概念。

設多項式矩陣 $A(\lambda)$ 的秩為 r，亦即在這個矩陣中有一個不恆等於零的 r 級子式，同時所有級數 $>r$ 的子式關於 λ 都恆等於零。以 $D_j(\lambda)$ 記矩陣 $A(\lambda)$ 中所有 j 級子式的最大公因式 $(j=1, 2, \cdots, r)$ ❶。那末不難看出，在序列

$$D_r(\lambda), D_{r-1}(\lambda), \cdots, D_1(\lambda), D_0(\lambda)\equiv 1$$

中每一個多項式都被其後一個所除盡❷。以 $i_1(\lambda), i_2(\lambda), \cdots, i_r(\lambda)$ 記其對應的商式：

$$i_1(\lambda)=\frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}, i_2(\lambda)=\frac{D_{r-1}(\lambda)}{D_{r-2}(\lambda)}, \cdots, i_r(\lambda)=\frac{D_1(\lambda)}{D_0(\lambda)}=D_1(\lambda)。\quad (10)$$

定義 4. 為 (10) 式所確定的多項式 $i_1(\lambda), i_2(\lambda), \cdots, i_r(\lambda)$ 稱為長方矩陣 $A(\lambda)$ 的不變因式。

"不變因式"這一名詞與次之探討有關。設 $A(\lambda)$ 與 $B(\lambda)$ 為兩個相抵多項式矩陣，那末他們彼此間都可由初級運算來得出。但是不難直接驗證，初級運算並不變動矩陣 $A(\lambda)$ 的秩 r，亦不變動其多項式 $D_1(\lambda)$, $D_2(\lambda), \cdots, D_r(\lambda)$。事實上，應用恆等式 $(3'')$，把矩陣乘積的子式經其因子的子式來表出（參考第一章§3末尾），對於矩陣 $B(\lambda)$ 的任一子式，我們得出表示式

$$B\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_p \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_p \end{pmatrix}; \lambda\Big) =$$

$$= \sum_{\substack{1\le\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_p\le m\\ 1\le\beta_1<\beta_2<\cdots<\beta_p\le n}} P\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_p \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_p \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_p \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_p \end{pmatrix}; \lambda\Big) Q\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_p \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_p \end{pmatrix}$$

$$(p=1, 2, \cdots, \min(m, n))。$$

---

❶ 在 $D_j(\lambda)$ 中取其首項係數等於 1 $(j=1, 2, \cdots, r)$。

❷ 如果對任何一個 j 級子式按照任一行的元素取其所展開式，那末在這一個展開式中每一項都被 $D_{j-1}(\lambda)$ 所除盡，故任何一個 j 級子式，因而 $D_j(\lambda)$ 為 $D_{j-1}(\lambda)$ 所除盡 $(j=1,2,\cdots, r)$。

故知，矩陣 $B(\lambda)$ 中所有級數 $>r$ 的子式都等於零，因而對於矩陣 $B(\lambda)$ 的秩 r^* 有：

$$r^* \leqslant r。$$

再者，從同一公式推知，矩陣 $B(\lambda)$ 的所有 p 級子式的最大公因式 $D_p^*(\lambda)$ 爲 $D_p(\lambda)$ 所除盡($p=1,2,\cdots,\min(m,n)$)。但矩陣 $A(\lambda)$ 與 $B(\lambda)$ 可以互易其作用地位。故 $r\leqslant r^*$，而且 $D_p(\lambda)$ 爲 $D_p^*(\lambda)$ 所除盡($p=1,2,\cdots,\min(m,n)$)。因此❶

$$r=r^*,\ D_1^*(\lambda)=D_1(\lambda),\ D_2^*(\lambda)=D_2(\lambda),\ \cdots,\ D_r^*(\lambda)=D_r(\lambda)。$$

因爲初級運算並不變動多項式 $D_1(\lambda)$，$D_2(\lambda)$，$\cdots$，$D_r(\lambda)$，所以他們亦不變動由(10)式所確定的多項式 $i_1(\lambda)$，$i_2(\lambda)$，$\cdots$，$i_r(\lambda)$。

這樣一來，從一個矩陣變到另一個與他相抵的矩陣時，多項式 $i_1(\lambda)$，$i_2(\lambda)$，$\cdots$，$i_r(\lambda)$ 是**不變**的。

如果多項式矩陣有標準對角形(9)，那末不難看出，對於這種矩陣有

$$D_1(\lambda)=a_1(\lambda),\ D_2(\lambda)=a_1(\lambda)a_2(\lambda),\ \cdots,\ D_r(\lambda)=a_1(\lambda)a_2(\lambda)\cdots a_r(\lambda)。$$

但由關係式(10)，知(9)中對角線上多項式 $a_1(\lambda)$，$a_2(\lambda)$，$\cdots$，$a_r(\lambda)$ 與不變因式重合

$$i_1(\lambda)=a_r(\lambda),\ i_2(\lambda)=a_{r-1}(\lambda),\ \cdots,\ i_r(\lambda)=a_1(\lambda)。\qquad (11)$$

此處 $i_1(\lambda)$，$i_2(\lambda)$，$\cdots$，$i_r(\lambda)$ 同時又是原矩陣 $A(\lambda)$ 的不變因式，因爲這個矩陣與矩陣(9)相抵。

我們可以把所得出的結果總結爲次之定理。

定理 3. 多項式長方矩陣 $A(\lambda)$ 常相抵於標準對角形矩陣

$$\left\|\begin{array}{cccccc} i_r(\lambda) & 0 & \cdots & 0 & 0\cdots 0 \\ 0 & i_{r-1}(\lambda) & \cdots & 0 & 0\cdots 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & \cdots & i_1(\lambda) & 0\cdots 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\cdots 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\cdots 0 \end{array}\right\|, \qquad (12)$$

❶ $D_p(\lambda)$ 與 $D_p^*(\lambda)$ ($p=1,2,\cdots,r$) 的首項係數都等於 1。

其中 r 為矩陣 $A(\lambda)$ 的秩，而 $i_1(\lambda), i_2(\lambda), \cdots, i_r(\lambda)$ 為由 (10) 所確定的矩陣 $A(\lambda)$ 的不變因式。

推論 1．為了使兩個同維數的長方矩陣 $A(\lambda)$ 與 $B(\lambda)$ 相抵的充分必要條件是他們有相同的不變因式。

事實上，這一條件的必要性已經在上面說明。其充分性可以這樣來得出，兩個有相同不變因式的多項式矩陣都與同一個標準對角形矩陣相抵，因而彼此相抵。

這樣一來，不變因式構成 λ–矩陣的完全不變系。

推論 2．在不變因式序列

$$i_1(\lambda)=\frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)},\ i_2(\lambda)=\frac{D_{r-1}(\lambda)}{D_{r-2}(\lambda)},\ \cdots,\ i_r(\lambda)=\frac{D_1(\lambda)}{D_0(\lambda)},\ (D_0(\lambda)\equiv 1) \quad (13)$$

中，從第二個開始，每一個多項式都是其前一個的因子。

這個論斷不能從(13)推出。但是可以從多項式 $i_1(\lambda), i_2(\lambda), \cdots, i_r(\lambda)$ 與標準對角形矩陣(9)中的 $a_r(\lambda), a_{r-1}(\lambda), \cdots, a_1(\lambda)$ 重合來推出。

2．我們指出對於準對角形 λ–矩陣的不變因式的計算方法，如果已經知道位於對角線上諸子塊的不變因式。

定理 4．如果在準對角形長方矩陣

$$C(\lambda)=\begin{pmatrix} A(\lambda) & 0 \\ 0 & B(\lambda) \end{pmatrix}$$

中，多項式矩陣 $A(\lambda)$ 的任一不變因式都是多項式矩陣 $B(\lambda)$ 的任一不變因式的因子，那末合併多項式矩陣 $A(\lambda)$ 與 $B(\lambda)$ 的全部不變因式就得出多項式矩陣 $C(\lambda)$ 的不變因式。

證明　以 $i_1'(\lambda), i_2'(\lambda), \cdots, i_r'(\lambda)$ 與 $i_1''(\lambda), i_2''(\lambda), \cdots, i_q''(\lambda)$ 各記 λ–矩陣 $A(\lambda)$ 與 $B(\lambda)$ 的不變因式。那末[1]

[1] 此地我們以符號～表示矩陣的相抵性，而以曲括號 { } 表示 (12) 型的對角形長方矩陣。

$A(\lambda)\sim\{i'_r(\lambda),\cdots,i'_1(\lambda),0,\cdots,0\}$， $B(\lambda)\sim\{i''_q(\lambda),\cdots,i''_1(\lambda),0,\cdots,0\}$，
因而

$$C(\lambda)\sim\{i'_r(\lambda),\cdots,i'_1(\lambda),i''_q(\lambda),\cdots,i''_1(\lambda),0,\cdots,0\}。\qquad(14)$$

位於這一關係式的右節的 λ-矩陣有標準對角形的形狀。那末按照定理 3，這一矩陣的對角線上不恆等於零的元素構成矩陣 $C(\lambda)$ 的全組不變因式。定理即已證明。

爲了在一般情形，由矩陣 $A(\lambda)$ 與 $B(\lambda)$ 的任意不變因式來定出矩陣 $C(\lambda)$ 的不變因式，我們要利用關於初級因子的重要概念。

在所予數域 K 中分解不變因子 $i_1(\lambda),i_2(\lambda),\cdots,i_r(\lambda)$ 爲不可約因式的乘積：

$$\begin{aligned}i_1(\lambda)&=[\varphi_1(\lambda)]^{c_1}[\varphi_2(\lambda)]^{c_2}\cdots[\varphi_s(\lambda)]^{c_s},\\ i_2(\lambda)&=[\varphi_1(\lambda)]^{d_1}[\varphi_2(\lambda)]^{d_2}\cdots[\varphi_s(\lambda)]^{d_s},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ i_r(\lambda)&=[\varphi_1(\lambda)]^{l_1}[\varphi_2(\lambda)]^{l_2}\cdots[\varphi_s(\lambda)]^{l_s},\end{aligned}\quad\begin{pmatrix}c_k\geqslant d_k\geqslant\cdots\geqslant l_k\geqslant 0;\\ k=1,2,\cdots,s\end{pmatrix}^{❶}。\quad(15)$$

此處 $\varphi_1(\lambda),\varphi_2(\lambda),\cdots,\varphi_s(\lambda)$ 是在 $i_1(\lambda),i_2(\lambda),\cdots,i_r(\lambda)$ 中出現的所有在域 K 中不可約的不相同的多項式（其首項係數都等於 1）。

定義 5. 在分解式(15)的諸冪次 $[\varphi_1(\lambda)]^{c_1},\cdots,[\varphi_s(\lambda)]^{l_s}$ 中，所有不等於 1 的冪次稱爲矩陣 $A(\lambda)$ 在域 K 中的*初級因子*❷。

定理 5. *長方準對角形矩陣*

$$C(\lambda)=\begin{pmatrix}A(\lambda)&0\\0&B(\lambda)\end{pmatrix}$$

的全部初級因子，常可由合併矩陣 $A(\lambda)$ 的初級因子與矩陣 $B(\lambda)$ 的初級因子來得出。

證明 分解矩陣 $A(\lambda)$ 與 $B(\lambda)$ 的不變因式爲域 K 中不可約因式

❶ 冪次 $c_k,d_k,\cdots,l_k(k=1,2,\cdots,s)$ 中的某些個可能等於零。

❷ (15) 式不僅給予由不變因式來定出域 K 中矩陣 $A(\lambda)$ 的初級因子的可能性，而且相反的，可由初級因子來得出不變因式。

的乘積❶：

$$i_1'(\lambda)=[\varphi_1(\lambda)]^{c_1'}[\varphi_2(\lambda)]^{c_2'}\cdots[\varphi_s(\lambda)]^{c_s'},\quad i_1''(\lambda)=[\varphi_1(\lambda)]^{c_1''}[\varphi_2(\lambda)]^{c_2''}\cdots[\varphi_s(\lambda)]^{c_s''},$$
$$i_2'(\lambda)=[\varphi_1(\lambda)]^{d_1'}[\varphi_2(\lambda)]^{d_2'}\cdots[\varphi_s(\lambda)]^{d_s'},\quad i_2''(\lambda)=[\varphi_1(\lambda)]^{d_1''}[\varphi_2(\lambda)]^{d_2''}\cdots[\varphi_s(\lambda)]^{d_s''},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$i_r'(\lambda)=[\varphi_1(\lambda)]^{h_1'}[\varphi_2(\lambda)]^{h_2'}\cdots[\varphi_s(\lambda)]^{h_s'},\quad i_q''(\lambda)=[\varphi_1(\lambda)]^{g_1''}[\varphi_2(\lambda)]^{g_2''}\cdots[\varphi_s(\lambda)]^{g_s''}。$$

以

$$c_1\geqslant d_1\geqslant\cdots\geqslant l_1>0 \tag{16}$$

記 $c_1', d_1', \cdots, h_1', c_1'', d_1'', \cdots, g_1''$ 中不等於零的諸數。

那末與矩陣 (14) 相抵的矩陣 $C(\lambda)$ 經調動行列後可以化為"對角形"形狀

$$\{[\varphi_1(\lambda)]^{c_1}\cdot(*), [\varphi_1(\lambda)]^{d_1}\cdot(*), \cdots, [\varphi_1(\lambda)]^{l_1}\cdot(*), (**), \cdots, (**)\}, \tag{17}$$

其中(*)是表示與 $\varphi_1(\lambda)$ 互質的多項式，而(**)表示與 $\varphi_1(\lambda)$ 互質或恆等於零的多項式。由矩陣(17)的形狀，直接推得關於矩陣 $C(\lambda)$ 的多項式 $D_r(\lambda), D_{r-1}(\lambda), \cdots$ 與 $i_1(\lambda), i_2(\lambda), \cdots$ 的次諸分解式：

$D_r(\lambda)=[\varphi_1(\lambda)]^{c_1+d_1+\cdots+l_1}\cdot(*)$, $D_{r-1}(\lambda)=[\varphi_1(\lambda)]^{d_1+\cdots+l_1}\cdot(*)$，諸如此類，

$$i_1(\lambda)=[\varphi_1(\lambda)]^{c_1}\cdot(*),\quad i_2(\lambda)=[\varphi_1(\lambda)]^{d_1}\cdot(*)，諸如此類。$$

故知 $[\varphi_1(\lambda)]^{c_1}, [\varphi_1(\lambda)]^{d_1}, \cdots, [\varphi_1(\lambda)]^{l_1}$，亦卽冪次

$$[\varphi_1(\lambda)]^{c_1'}, \cdots, [\varphi_1(\lambda)]^{h_1'}, [\varphi_1(\lambda)]^{c_1''}, \cdots, [\varphi_1(\lambda)]^{g_1''}$$

中所有不等於 1 的諸冪次，是矩陣 $C(\lambda)$ 的初級因子。

同樣的，可定出矩陣 $C(\lambda)$ 的關於 $\varphi_2(\lambda)$ 的冪次的初級因子，諸如此類。定理卽已證明。

註　與上述完全類似的可以構成關於整數矩陣（亦卽元素全為整數的矩陣）的相抵性理論。此處在 1°, 2° 中（參考本章 § 1），$c=\pm1$，換 $b(\lambda)$ 為整數，而在 (3), (3′), (3″) 諸式中換 $P(\lambda)$ 與 $Q(\lambda)$ 為行列式等於 ±1 的整數矩陣。

---

❶ 如果某一個不可約多項式 $\varphi_k(\lambda)$ 在一組不變因式中出現而不在其另一組不變因式中出現，那末在另一組不變因式中 $\varphi_k(\lambda)$ 的冪次都取為零。

3. 現在假設給予元素在域 K 中的矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$。建立他的特徵矩陣

$$\lambda E-A=\begin{Vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{Vmatrix}。\tag{18}$$

特徵矩陣是一個 n 級 λ-矩陣。他的不變因式

$$i_1(\lambda)=\frac{D_n(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)},\ i_2(\lambda)=\frac{D_{n-1}(\lambda)}{D_{n-2}(\lambda)},\ \cdots,\ i_n(\lambda)=\frac{D_1(\lambda)}{D_0(\lambda)}\ (D_0(\lambda)\equiv 1)\tag{19}$$

稱為矩陣 A 的不變因式，而其在域 K 中的初級因子稱為矩陣 A 在域 K 中的初級因子。可用矩陣 A 的不變因式（因而初級因子）的知識來研究矩陣 A 的結構。所以我們就關心到計算矩陣的不變因式的實際方法。公式 (19) 給予了計算這些不變因式的演段，但是這一演段對於較大的 n 是非常麻煩的。

定理 3 給予了計算不變因式的另一方法，他的要點是利用初級運算來化特徵矩陣 (18) 為標準對角形矩陣。

例

$$A=\begin{Vmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \\ -14 & -5 & -1 & 0 \end{Vmatrix},\quad \lambda E-A=\begin{Vmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda+1 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & \lambda-2 & -1 \\ 14 & 5 & 1 & \lambda \end{Vmatrix}。$$

在特徵矩陣 $\lambda E-A$ 中把第三行與 λ 的乘積加到第四行，我們得出：

$$\begin{Vmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda+1 & 0 & 0 \\ -6 & -1 & \lambda-2 & -1 \\ 14-6\lambda & 5-\lambda & \lambda^2-2\lambda+1 & 0 \end{Vmatrix}。$$

現在乘第四列以 $-6,\ -1,\ \lambda-2$ 後分別的加到第一，二，三列上，我們得出：

$$\begin{Vmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & \lambda+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 14-6\lambda & 5-\lambda & \lambda^2-2\lambda+1 & 0 \end{Vmatrix}。$$

以第二列與 $\lambda-3$ 的乘積加到第一列上，得：

$$\left\|\begin{array}{cccc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ \lambda^2-2\lambda+1 & \lambda+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -\lambda^2+2\lambda-1 & 5-\lambda & \lambda^2-2\lambda+1 & 0 \end{array}\right\|。$$

以第一行與$\lambda+1$，$5-\lambda$的乘積分別加到第二，第四行上，我們有：

$$\left\|\begin{array}{cccc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ \lambda^2-2\lambda+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -\lambda^2+2\lambda-1 & 0 & \lambda^2-2\lambda+1 & 0 \end{array}\right\|。$$

以第二行加於第四行上而後乘第一行與第三行以-1。經過行與列的調動後，我們得出：

$$\left\|\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^2 \end{array}\right\|。$$

矩陣A有兩個初級因子：$(\lambda-1)^2$與$(\lambda-1)^2$。

§4．線性二項式的相抵性

在上節中我們討論過長方λ-矩陣。在這一節中我們來討論兩個n級λ-方陣$A(\lambda)$與$B(\lambda)$，其中所有元素關於λ的次數不超過1。這些多項式矩陣可以表為矩陣的二項式：

$$A(\lambda)=A_0\lambda+A_1,\quad B(\lambda)=B_0\lambda+B_1。$$

我們假設這些二項式是一次的而且是正則的，亦即有$|A_0|\neq 0$，$|B_0|\neq 0$（參考第四章§1）。

次之定理給予了這種二項式的相抵性的判定：

定理6．如果兩個一次正則二項式$A_0\lambda+A_1$與$B_0\lambda+B_1$相抵，那末這些二項式是嚴格相抵的，亦即在恆等式

$$B_0\lambda+B_1=P(\lambda)(A_0\lambda+A_1)Q(\lambda) \tag{20}$$

中，可以換（行列式為不等於零的常數的矩陣）$P(\lambda)$與$Q(\lambda)$為滿秩的常數矩陣P與Q❶：

❶ 恆等式(21)等價於兩個矩陣等式：$B_0=PA_0Q$與$B_1=PA_1Q$。

$$B_0\lambda+B_1=P(A_0\lambda+A_1)Q\text{。} \tag{21}$$

證明 因為矩陣 $P(\lambda)$ 的行列式與 λ 無關且不等於零❶,所以逆矩陣 $M(\lambda)=P^{-1}(\lambda)$ 亦是一個多項式矩陣。應用這一個矩陣,我們可以把恆等式(20)寫為:

$$M(\lambda)(B_0\lambda+B_1)=(A_0\lambda+A_1)Q(\lambda)\text{。} \tag{22}$$

視 $M(\lambda)$ 與 $Q(\lambda)$ 為矩陣多項式,左除 $M(\lambda)$ 以 $A_0\lambda+A_1$,而右除 $Q(\lambda)$ 以 $B_0\lambda+B_1$:

$$M(\lambda)=(A_0\lambda+A_1)S(\lambda)+M, \tag{23}$$

$$Q(\lambda)=T(\lambda)(B_0\lambda+B_1)+Q; \tag{24}$$

此處 M 與 Q 為 n 級常數(與 λ 無關)方陣。以所得出的對於 $M(\lambda)$ 與 $Q(\lambda)$ 的表示式代進(22)式。經過很少的一些變換我們得出:

$$(A_0\lambda+A_1)[T(\lambda)-S(\lambda)](B_0\lambda+B_1)=M(B_0\lambda+B_1)-(A_0\lambda+A_1)Q\text{。} \tag{25}$$

位於方括號中的差必須等於零,因為否則位於等式(25)左節的乘積,將有次數 $\geqslant 2$,但是在這一等式右節的多項式不能超過 1 次。所以

$$S(\lambda)=T(\lambda); \tag{26}$$

因而由(25)我們得出:

$$M(B_0\lambda+B_1)=(A_0\lambda+A_1)Q\text{。} \tag{27}$$

現在我們來證明 M 是一個滿秩矩陣。為此左除 $P(\lambda)$ 以 $B_0\lambda+B_1$:

$$P(\lambda)=(B_0\lambda+B_1)U(\lambda)+P\text{。} \tag{28}$$

由(22),(23)與(28)得出:

$$\begin{aligned} E=M(\lambda)P(\lambda)&=M(\lambda)(B_0\lambda+B_1)U(\lambda)+M(\lambda)P=\\ &=(A_0\lambda+A_1)Q(\lambda)U(\lambda)+(A_0\lambda+A_1)S(\lambda)P+MP=\\ &=(A_0\lambda+A_1)[Q(\lambda)U(\lambda)+S(\lambda)P]+MP\text{。} \end{aligned} \tag{29}$$

---

❶ 二項式 $A_0\lambda+A_1$ 與 $B_0\lambda+B_1$ 的相抵性是說有恆等式(20)存在,其中 $|P(\lambda)|=$ 常數 $\neq 0$, $|Q(\lambda)|=$ 常數 $\neq 0$。但是後兩個關係在所予的情形中可以從恆等式(20)來推出。事實上,一次正則二項式的行列式有次數 n: $|A_0\lambda+A_1|=|A_0|\lambda^n+\cdots$, $|B_0\lambda+B_1|=|B_0|\lambda^n+\cdots$; $|A_0|\neq 0$, $|B_0|\neq 0$。故由 $|B_0\lambda+B_1|=|P(\lambda)||A_0\lambda+A_1||Q(\lambda)|$ 知有:

$$|P(\lambda)|=\text{常數}\neq 0,\quad |Q(\lambda)|=\text{常數}\neq 0\text{。}$$

因為這一串等式的最後一節關於 λ 必須是零次的（因其等於 E），所以在方括號中的表示式必須恆等於零。故由(29)知有

$$MP=E\ 。\tag{30}$$

因此得出：$|M|\neq 0$ 與 $M^{-1}=P$ 。

左乘等式(27)的兩節以 P，我們得出：

$$B_0\lambda+B_1=P(A_0\lambda+A_1)Q\ 。$$

從(30)得出矩陣 P 的滿秩性。但是矩陣 P 與 Q 的滿秩性亦可從恆等式(21)得出，因為從這一恆等式推得等式

$$B_0=PA_0Q,$$

故有
$$|P||A_0||Q|=|B_0|\neq 0\ 。$$

定理已經證明。

註　從證明中知道[參考(24)與(28)]，作為代換恆等式(20)中的 λ-矩陣 $P(\lambda)$ 與 $Q(\lambda)$ 的常數矩陣 P 與 Q，我們可以取 $B_0\lambda+B_1$ 除 $P(\lambda)$ 與 $Q(\lambda)$ 所得出的左餘與右餘。

§5. 矩陣相似的判定

設給予元素在域K中的矩陣 $\|a_{ik}\|_1^n$ 。他的特徵矩陣 $\lambda E-A$ 是一個 n 秩 λ-矩陣，故有 n 個不變因式(參考 §3)

$$i_1(\lambda),\ i_2(\lambda),\ \cdots,\ i_n(\lambda)\ 。$$

次之定理說明，如果把相似矩陣當作一個看待時，那末這些不變因式決定了原矩陣 A 。

定理 7. 為了使得兩個矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 與 $B=\|b_{ik}\|_1^n$ 相似 ($B=T^{-1}AT$) 的充分必要條件，是他們有相同的不變因式或有相同的域K中的初級因子。

證明　條件的必要性。事實上，如果矩陣 A 與 B 相似，那末有這樣的滿秩矩陣 T 存在，使得

$$B=T^{-1}AT\ 。$$

故有 $$\lambda E-B=T^{-1}(\lambda E-A)T。$$

這個等式證明，特徵矩陣 $\lambda E-A$ 與 $\lambda E-B$ 相抵，故有相同的不變因式。

條件的充分性　設特徵矩陣$\lambda E-A$與$\lambda E-B$有相同的不變因式。那末這些 λ-矩陣是相抵的（參考定理 3 的推論 1），故有兩個多項式矩陣 $P(\lambda)$ 與 $Q(\lambda)$ 存在，使得

$$\lambda E-B=P(\lambda)(\lambda E-A)Q(\lambda)。\tag{31}$$

應用定理 6 於二項矩陣$\lambda E-A$ 與 $\lambda E-B$，我們可以在恆等式(31)中換 λ-矩陣 $P(\lambda)$ 與 $Q(\lambda)$ 以常數矩陣：

$$\lambda E-B=P(\lambda E-A)Q,\tag{32}$$

而且可以取 $\lambda E-B$ 除 $P(\lambda)$ 與 $Q(\lambda)$ 所得出的左餘與右餘來作爲 P 與 Q（參考上節最後的註），亦即由廣義裴所定理可以取❶：

$$P=\hat{P}(B),\ \ Q=Q(B)。\tag{33}$$

在等式(32)的左右兩節中，使 λ 的零次與一次冪的係數相等，我們得出：

$$B=PAQ,\ \ E=PQ,$$

亦即 $$B=T^{-1}AT,$$

其中 $$T=Q=P^{-1}。$$

定理即已證明。

註　同時我們建立了次之論斷，述爲

定理 7 的補充　如果 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 與 $B=\|b_{ik}\|_1^n$ 爲兩個相似矩陣

$$B=T^{-1}AT,\tag{34}$$

那末可以取次之矩陣作爲變換矩陣 T

$$T=Q(B)=[\hat{P}(B)]^{-1},\tag{35}$$

其中 $P(\lambda)$ 與 $Q(\lambda)$ 是結合相抵特徵矩陣 $\lambda E-A$ 與 $\lambda E-B$ 的恆等式

---

❶ 注意，$\hat{P}(B)$ 爲換 λ 爲 B 時多項式 $P(\lambda)$ 的左值，而 $Q(B)$ 爲多項式 $Q(\lambda)$ 的右值（參考第四章，節 3）。

$$\lambda E-B=P(\lambda)(\lambda E-A)Q(\lambda)$$

中的多項式矩陣；在(35)式中，$Q(B)$ 是換變量 λ 爲矩陣 B 時矩陣多項式 $Q(\lambda)$ 的右值，而 $\hat{P}(B)$ 爲矩陣多項式 $P(\lambda)$ 的左值。

§6. 矩陣的法式

1．設給予係數在域 K 中的某一多項式

$$g(\lambda)=\lambda^m+\alpha_1\lambda^{m-1}+\cdots+\alpha_{m-1}\lambda+\alpha_m.$$

討論 m 級方陣

$$L=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_m \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{m-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\alpha_{m-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_1 \end{Vmatrix}. \tag{36}$$

不難驗證多項式 $g(\lambda)$ 是矩陣 L 的特徵多項式：

$$|\lambda E-L|=\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_m \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{m-1} \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 & \alpha_{m-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \alpha_1+\lambda \end{vmatrix}=g(\lambda)。$$

另一方面，在特徵行列式中，元素 α_m 的子式等於 ±1。故 $D_{m-1}(\lambda)=$ $=1$ 而 $i_1(\lambda)=\dfrac{D_m(\lambda)}{D_{m-1}(\lambda)}=D_m(\lambda)=g(\lambda)$，$i_2(\lambda)=\cdots=i_n(\lambda)=1$。

這樣一來，矩陣 L 有唯一不等於 1 的不變因式，他等於 $g(\lambda)$。

我們稱矩陣 L 爲多項式 $g(\lambda)$ 的伴侶矩陣。

設給予有不變因式

$$i_1(\lambda),\ i_2(\lambda),\ \cdots,\ i_t(\lambda),\ i_{t+1}(\lambda)=1,\ \cdots,\ i_n(\lambda)=1 \tag{37}$$

的矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$。此處所有多項式 $i_1(\lambda)$，$i_2(\lambda)$，$\cdots$，$i_t(\lambda)$ 的次數都大於零，而且在這些多項式中從第二個開始，每一個都是其前一個的因子。以 L_1，L_2，$\cdots$，L_t 記這些多項式的伴侶矩陣。

那末 n 級準對角形矩陣

$$L_I=\{L_1, L_2, \cdots, L_t\} \tag{38}$$

有不變因式 (37) (參考 § 3, **2** 定理 4)。因爲矩陣 A 與 L_I 有相同的不變因式,他們是相似的,亦卽有這樣的滿秩矩陣 $U(|U|\neq 0)$ 存在,使得

$$A=UL_IU^{-1}。 \tag{I}$$

矩陣 L_I 稱爲矩陣 A 的第一種自然法式。這個法式的性質爲次諸條件所決定:(1)準對角形的形狀(38),(2)對角線上子塊(36)的特殊結構與(3)補充條件:在對角線上諸子塊的特徵多項式序列中,從第二個開始,每一個多項式都是其前一個的因子❶。

2、現在以

$$\chi_1(\lambda), \chi_2(\lambda), \cdots, \chi_u(\lambda) \tag{39}$$

記矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 在數域 K 中的初級因子。記其對應的伴侶矩陣爲

$$L^{(1)}, L^{(2)}, \cdots, L^{(u)}。$$

因爲 $\chi_i(\lambda)$ 是矩陣 $L^{(i)}$ 的唯一的初級因子 $(i=1, 2, \cdots, u)$❷,所以由定理 5,準對角形矩陣

$$L_{II}=\{L^{(1)}, L^{(2)}, \cdots, L^{(u)}\} \tag{40}$$

有初級因子(39)。

矩陣 A 與 L_{II} 在域K中有相同的初級因子。所以這兩個矩陣是相似的,亦卽有這樣的滿秩矩陣 $V(|V|\neq 0)$ 存在,使得

$$A=VL_{II}V^{-1}。 \tag{II}$$

矩陣 L_{II} 稱爲矩陣 A 的第二種自然法式。這一種法式的性質爲次諸條件所決定:(1)準對角形的形狀(40),(2)對角線上子塊(36)的特殊結構與(3)補充條件:每一個對角線上子塊的特徵多項式是在域 K 中不可約多項式的冪次。

---

❶ 從條件 (1), (2), (3) 自動的得出, L_I 中對角線上諸子塊的特徵多項式是矩陣 L_I,因而是矩陣 A 的不變因式。

❷ $\chi_i(\lambda)$ 是矩陣 $L^{(i)}$ 的唯一的不變因式,同時 $\chi_i(\lambda)$ 又是域 K 中不可約多項式的冪次。

註　矩陣 A 的初級因子與其不變因式所不同的主要是與所給的數域 K 的關係。如果我們換原數域 K 以另一數域（在他裏面亦含有所予矩陣 A 的諸元素），那末初級因子可能有所變動。矩陣的第二種自然法式就要與初級因子同時發生變動。

例如，設所予矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 的元素全爲實數。這個矩陣的特徵多項式的係數全爲實數。此時這一個多項式可能有複根。如果 K 是實數域，那末在初級因子中可能有實係數的不可約二次三項式的冪次出現。如果 K 是複數域，那末每一個初級因子都有 $(\lambda-\lambda_0)^p$ 的形狀。

3. 現在假設數域 K 不祇含有矩陣 A 的元素，而且含有這個矩陣的所有特徵數❶。那末矩陣 A 的初級因子就有次之形狀❷

$$(\lambda-\lambda_1)^{p_1},\ (\lambda-\lambda_2)^{p_2},\cdots,\ (\lambda-\lambda_u)^{p_u}\quad (p_1+p_2+\cdots+p_u=n)。\tag{41}$$

討論這些初級因子中的某一個：

$$(\lambda-\lambda_0)^p$$

且構成與其相對應的次之 p 級矩陣：

$$\left\|\begin{matrix}\lambda_0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_0\end{matrix}\right\|=\lambda_0E^{(p)}+H^{(p)}。\tag{42}$$

不難驗證，這個矩陣祇有一個初級因子 $(\lambda-\lambda_0)^p$。我們稱矩陣(42)爲對應於初級因子 $(\lambda-\lambda_0)^p$ 的若唐塊。

以

$$J_1,\ J_2,\ \cdots,\ J_u$$

來記對應於初級因子(41)的諸若唐塊。

那末準對角形矩陣

$$J=\{J_1,\ J_2,\ \cdots,\ J_u\}$$

❶ 對於任何矩陣 A 都能成立，如果 K 是複數域。

❷ 在數 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_u$ 中可能有些是彼此相等的。

的初級因子就是諸冪次(41)。

矩陣 J 還可以寫爲：

$$J=\{\lambda_1E_1+H_1,\ \lambda_2E_2+H_2,\cdots,\ \lambda_uE_u+H_u\},$$

其中

$$E_k=E^{(p_k)},\ H_k=H^{(p_k)}\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ u)。$$

因爲矩陣 A 與 J 有相同的初級因子，他們就彼此相似，亦卽有這樣的滿秩矩陣 T($|T|\neq 0$)存在，使得

$$A=TJT^{-1}=T\{\lambda_1E_1+H_1,\ \lambda_2E_2+H_2,\cdots,\ \lambda_uE_u+H_u\}T^{-1}。\quad \text{(III)}$$

矩陣 J 稱爲矩陣 A 的若唐法式或簡稱若唐式。若唐式的性質爲準對角形的形狀與其對角線上子塊的特殊結構(42)的確定。

次之陣列寫出初級因子爲 $(\lambda-\lambda_1)^2$, $(\lambda-\lambda_2)^3$, $\lambda-\lambda_3$, $(\lambda-\lambda_4)^2$ 的若唐矩陣 J：

$$J=\left\|\begin{array}{cc|ccc|c|cc}
\lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4
\end{array}\right\|。\quad (43)$$

如果矩陣 A 的所有初級因子都是一次的(亦祇是在這一情形)，若唐式是對角形矩陣且在此時我們有：

$$A=T\{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n\}T^{-1}。\quad (44)$$

這樣一來，矩陣 A 是單構的(參考第三章 § 8)充分必要條件是：他的所有初級因子都是一次的[1]。

有時代替若唐塊(42)來討論次之 p 級"低"若唐塊

[1] 有時稱"一次初級因子"爲"線性初級因子"或"單重初級因子"。

$$\left\|\begin{matrix} \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_0 \end{matrix}\right\| = \lambda_0 E^{(p)} + F^{(p)}。$$

這個矩陣亦祇有一個初級因子$(\lambda-\lambda_0)^p$。初級因子(41)對應於"低"若唐矩陣❶

$$J_{(1)} = \{\lambda_1 E_1 + F_1,\ \lambda_2 E_2 + F_2, \cdots, \lambda_u E_u + F_u\}$$
$$(E_k = E^{(p_k)},\ F_k = F^{(p_k)};\ k = 1, 2, \cdots, u)。$$

任一有初級因子(41)的矩陣A，常與矩陣$J_{(1)}$相似，亦即有這樣的滿秩矩陣$T_1(|T_1|\neq 0)$存在，使得

$$A = T_1 J_{(1)} T_1^{-1} = T_1\{\lambda_1 E_1 + F_1,\ \lambda_2 E_2 + \\ + F_2, \cdots, \lambda_u E_u + F_u\} T_1^{-1}。\qquad \text{(IV)}$$

還要注意，如果$\lambda_0\neq 0$，那末矩陣

$$\lambda_0(E^{(p)} + H^{(p)}),\ \lambda_0(E^{(p)} + F^{(p)})$$

中每一個矩陣都祇有一個初級因子：$(\lambda-\lambda_0)^p$。所以對於有初級因子(41)的滿秩矩陣A，與(III)，(IV)平行的有表示式

$$A = T_2\{\lambda_1(E_1 + H_1),\ \lambda_2(E_2 + H_2), \cdots, \lambda_u(E_u + H_u)\} T_2^{-1}, \qquad \text{(V)}$$
$$A = T_3\{\lambda_1(E_1 + F_1),\ \lambda_2(E_2 + F_2), \cdots, \lambda_u(E_u + F_u)\} T_3^{-1}。\qquad \text{(VI)}$$

§7. 矩陣 $f(A)$ 的初級因子

1．在本節中討論次之問題：

給予矩陣$A=\|a_{ik}\|_1^n$的初級因子（在複數域中）且給予確定於矩陣A的影譜上的函數$f(\lambda)$。要定出矩陣$f(A)$的初級因子（在複數域中）。

矩陣$f(A)$並無改變，如果我們換函數$f(\lambda)$以這樣的多項式，他在

❶ 爲了區别於低若唐矩陣有$J_{(1)}$，有時稱矩陣J爲高若唐矩陣。

矩陣 A 的影譜上與函數 $f(\lambda)$ 取相同的值(參考第五章，§1)。所以，並不損失其一般性，我們以後可以視 $f(\lambda)$ 爲一個多項式。

以

$$(\lambda-\lambda_1)^{p_1},\ (\lambda-\lambda_2)^{p_2},\cdots,\ (\lambda-\lambda_u)^{p_u}$$

記矩陣 A 的初級因子❶。那末矩陣 A 相似於若唐矩陣 J

$$A=TJT^{-1},$$

因而

$$f(A)=Tf(J)T^{-1}。$$

此處

$$J=\{J_1,J_2,\cdots,J_u\},\ J_i=\lambda_i E^{(p_i)}+H^{(p_i)}\quad(i=1,2,\cdots,u),$$

而

$$f(J)=\{f(J_1),f(J_2),\cdots,f(J_u)\}\tag{45}$$

其中(參考第五章，§3的例2)

$$f(J_i)=\left\|\begin{matrix} f(\lambda_i) & \frac{f'(\lambda_i)}{1!} & \cdots & \frac{f^{(p_i-1)}(\lambda_i)}{(p_i-1)!} \\ 0 & f(\lambda_i) & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \frac{f'(\lambda_i)}{1!} \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_i) \end{matrix}\right\|。\tag{46}$$

因爲矩陣 $f(A)$ 與 $f(J)$ 有相同的初級因子，故以後我們代替矩陣 $f(A)$ 而來討論矩陣 $f(J)$

2. 首先確定矩陣 $f(A)$，或矩陣 $f(J)$ 的胐 d❷。準對角形矩陣的胐等於其對角線上諸子塊的胐的和，而矩陣 $f(J_i)$ 的胐[參考(46)]等於數 k_i 與 p_i 中較小的一個，其中 k_i 爲 $f(\lambda)$ 的根 λ_i 的重數❸，因爲

$$f(\lambda_i)=f'(\lambda_i)=\cdots=f^{(k_i-1)}(\lambda_i)=0,\ f^{(k_i)}(\lambda_i)\neq 0\quad(i=1,2,\cdots,u)。$$

❶ 在數 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_u$ 中，有些可能彼此相等。

❷ $d=n-r$，其中 r 爲矩陣 $f(A)$ 的秩。如果已知矩陣的初級因子，那末矩陣的胐可由對應於零特徵數的初級因子的個數來定出，亦即可由形爲 $\lambda^{(p)}$ 的初級因子的個數來定出。

❸ k_i 可能等於零；在這一情形 $f(\lambda_i)\neq 0$。

我們得出了：

定理8. 設矩陣A有初級因子

$$(\lambda-\lambda_1)^{p_1},\ (\lambda-\lambda_2)^{p_2},\ \cdots,\ (\lambda-\lambda_u)^{p_u}, \tag{47}$$

則矩陣$f(A)$的腑爲次式所確定：

$$d=\sum_{i=1}^{u}\min(k_i,\ p_i); \tag{48}$$

其中k_i爲$f(\lambda)$的根λ_i的重數$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ u)$❶。

作爲所證明的定理的應用，我們定出任一矩陣$A=\|a_{ik}\|_1^n$對應於特徵數λ_0的所有初級因子：

$$\underbrace{\lambda-\lambda_0,\cdots,\ \lambda-\lambda_0}_{g_1};\ \underbrace{(\lambda-\lambda_0)^2,\cdots,\ (\lambda-\lambda_0)^2}_{g_2};\cdots;$$

$$\underbrace{(\lambda-\lambda_0)^m,\cdots,\ (\lambda-\lambda_0)^m}_{g_m},$$

其中$g_i\geqslant 0(i=1,\ 2,\cdots,\ m-1)$，$g_m>0$，如果已經給予了矩陣

$$A-\lambda_0E,\ (A-\lambda_0E)^2,\ \cdots,\ (A-\lambda_0E)^m$$

的腑　　$d_1,\ d_2,\cdots,\ d_m$。

對此我們取$(A-\lambda_0E)^j=f_j(A)$，其中$f_j(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^j(j=1,\ 2,\cdots,\ m)$。所以爲了確定矩陣$(A-\lambda_0E)^j$的腑，在(48)式中對於與特徵數$\lambda_0$相對應的初級因子取$k_i=j$而在所有其他各項都取$k_i=0(j=1,\ 2,\cdots,\ m)$。這樣一來，我們得出公式

$$\left.\begin{array}{l} g_1+\ g_2+\ g_3+\cdots+\ g_m=d_1,\\ g_1+2g_2+2g_3+\cdots+2g_m=d_2,\\ g_1+2g_2+3g_3+\cdots+3g_m=d_3,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ g_1+2g_2+3g_3+\cdots+mg_m=d_m。\end{array}\right\} \tag{49}$$

---

❶ 在$f(\lambda)$不是一個多項式的一般情形，在(48)式中的$\min(k_i,\ p_i)$了解爲數p_i如果$f(\lambda_i)=f'(\lambda_i)=\cdots=f^{(p_i)}(\lambda_i)=0$，而爲數$k_i\leqslant p_i$如果對於$k_i$有$f(\lambda_i)=f'(\lambda_i)=\cdots=f^{(k_i-1)}(\lambda_i)=0$，$f^{(k_i)}(\lambda_i)\neq 0(i=1,\ 2,\cdots,u)$。

故有❶

$$g_j=2d_j-d_{j-1}-d_{j+1} \quad (j=1,2,\cdots,m;\ d_0=0,\ d_{m+1}=d_m)。 \quad (50)$$

3. 回到定出矩陣 $f(A)$ 的初級因子的主要問題。前面已經說過，$f(A)$ 的初級因子與 $f(J)$ 的初級因子相同，而準對角形矩陣的初級因子是由其對角線上諸子塊的初級因子所組成的(參考定理 5)。所以我們的問題化爲找出有正三角形形狀的矩陣 C 的初級因子：

$$C=\sum_{k=0}^{p-1}a_kH^k=\left\|\begin{matrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{p-1} \\ 0 & a_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{matrix}\right\|。 \quad (51)$$

討論兩種不同的情形：

1° $a_1\neq 0$。矩陣 C 的特徵多項式顯然等於

$$D_p(\lambda)=(\lambda-a_0)^p。$$

那末，因爲 $D_p(\lambda)$ 被 $D_{p-1}(\lambda)$ 所除盡，故有

$$D_{p-1}(\lambda)=(\lambda-a_0)^g \quad (g\leqslant p)。$$

此處，以 $D_{p-1}(\lambda)$ 記特徵矩陣

$$\lambda E-C=\left\|\begin{matrix} \lambda-a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{p-1} \\ 0 & \lambda-a_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -a_1 \\ +0 & 0 & \cdots & \lambda-a_0 \end{matrix}\right\|$$

中所有 $p-1$ 級子式的最大公因式。

易知，有符號“+”的元素的子式當 $\lambda=a_0$ 時等於 $(-a_1)^{p-1}$，在我們的這一情形他不等於零。故此時 $g=0$。但由

❶ 數 m 的性質確定於 $d_{m-1}<d_m=d_{m+j}\ (j=1,2,\cdots)$。

$$D_p(\lambda)=(\lambda-a_0)^p,\ D_{p-1}(\lambda)=1$$

知矩陣 C 僅有一個初級因子 $(\lambda-a_0)^p$。

2° $a_1=\cdots=a_{k-1}=0,\ a_k\neq0$。在此時

$$C=a_0E+a_kH^k+\cdots+a_{p-1}H^{p-1}.$$

所以對於任何正整數 j，矩陣

$$(C-a_0E)^j=a_k^jH^{kj}+\cdots$$

的腑爲次之等式所決定：

$$d_j=\begin{cases}kj & 如果\ kj\leqslant p,\\ p & 如果\ kj>p。\end{cases}$$

設

$$p=qk+h\quad(0\leqslant h<k)。\tag{52}$$

那末[1]

$$d_1=k,\ d_2=2k,\ \cdots,\ d_q=qk,\ d_{q+1}=p。\tag{53}$$

故由(50)式我們有：

$$g_1=\cdots=g_{q-1}=0,\ g_q=k-h,\ g_{q+1}=h。$$

這樣一來，矩陣 C 有初級因式

$$\underbrace{(\lambda-a_0)^{q+1},\cdots,(\lambda-a_0)^{q+1}}_{h},$$

$$\underbrace{(\lambda-a_0)^{q},\cdots,(\lambda-a_0)^{q}}_{k-h},\tag{54}$$

其中整數 $q>0$ 與 $h\geqslant0$ 爲(52)所確定。

4. 現在我們還要說明矩陣 $f(J)$ 有怎樣的初級因子[參考(45)與(46)式]。矩陣 A 的每一個初級因子

$$(\lambda-\lambda_0)^p$$

對應於矩陣 $f(J)$ 的對角線上子塊

---

[1] 在所予的情形，數 $q+1$ 有在(49)與(50)式中數 m 的作用。

$$f(\lambda_0E+H)=\sum_{i=0}^{p-1}\frac{f^{(i)}(\lambda_0)}{i!}H^i=$$

$$=\begin{Vmatrix} f(\lambda_0) & \frac{f'(\lambda_0)}{1!} & \cdots & \frac{f^{(p-1)}(\lambda_0)}{(p-1)!} \\ 0 & f(\lambda_0) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \frac{f'(\lambda_0)}{1!} \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_0) \end{Vmatrix}。 \tag{55}$$

顯然，我們的問題就化爲求出(55)形子塊的初級因子。但矩陣(55)有正三角形的形狀(51)而且此時

$$a_0=f(\lambda_0),\ a_1=f'(\lambda_0),a_2=\frac{f''(\lambda_0)}{2!},\cdots。$$

這樣一來，我們得到：

定理 9. 矩陣 $f(A)$ 的初級因子可以從矩陣 A 的初級因子用次之辦法來得出：矩陣 A 的初級因子

$$(\lambda-\lambda_0)^p \tag{56}$$

當 $p=1$ 或當 $p>1$ 而 $f'(\lambda_0)\neq 0$ 時對應於矩陣 $f(A)$ 的一個初級因子

$$(\lambda-f(\lambda_0))^p; \tag{57}$$

當 $p>1, f'(\lambda_0)=\cdots=f^{(k-1)}(\lambda_0)=0, f^{(k)}(\lambda_0)\neq 0$ 時，矩陣 A 的初級因子(56)對應於矩陣 $f(A)$ 的次諸初級因子：

$$\underbrace{(\lambda-f(\lambda_0))^{q+1},\cdots,(\lambda-f(\lambda_0))^{q+1}}_{h},$$

$$\underbrace{(\lambda-f(\lambda_0))^{q},\cdots,(\lambda-f(\lambda_0))^{q}}_{k-h}, \tag{58}$$

其中 $p=qk+h,\ 0<q,\ 0\leqslant h<k;$

最後，當 $p>1, f'(\lambda_0)=f''(\lambda_0)=\cdots=f^{(p-1)}(\lambda_0)=0$ 時，初級因子(56)

對應於矩陣 $f(A)$ 的 p 個一次初級因子❶：

$$\lambda-f(\lambda_0),\cdots,\lambda-f(\lambda_0)。\tag{59}$$

注意次之包含於這個定理裏面的特殊論斷。

1．如果 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是矩陣 A 的特徵數，那末 $f(\lambda_1),f(\lambda_2),\cdots,f(\lambda_n)$ 是矩陣 $f(A)$ 的特徵數（在第一個序列與第二個序列中都是一樣的，每一個特徵數的重複次數與其爲特徵方程的根的重數一致）❷。

2．如果導式 $f'(\lambda)$ 在矩陣 A 的影譜上不等於零❸，那末從矩陣 A 轉移到矩陣 $f(A)$ 時，初級因子並無"裂分"，亦即如果矩陣 A 有初級因子

$$(\lambda-\lambda_1)^{p_1},\ (\lambda-\lambda_2)^{p_2},\ \cdots,\ (\lambda-\lambda_n)^{p_n},$$

那末矩陣 $f(A)$ 有初級因子

$$(\lambda-f(\lambda_1))^{p_1},(\lambda-f(\lambda_2))^{p_2},\cdots,(\lambda-f(\lambda_n))^{p_n}。$$

§8．變換矩陣的一般的構成方法

在矩陣論及其應用的許多問題裏面，祇要知道從所予矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 經相似變換所得出的法式就已足夠。他的法式是爲其特徵矩陣 $\lambda E-A$ 的不變因式所完全確定的。爲了求出這些不變因式可以應用一定的公式［參考本章§3的公式(10)］或者利用初級變換把特徵矩陣 $\lambda E-A$ 化爲標準對角形的形式。

但在某些問題中，不僅要知道所予矩陣 A 的法式 $\tilde{A}$，還必須要知道他的落秩變換矩陣 T。

下面將構成確定矩陣 T 的直接方法。

等式
$$A=T\tilde{A}T^{-1}$$
可以寫爲：
$$AT-T\tilde{A}=0。$$
這個關於 T 的矩陣等式等價於關於矩陣 T 的 n^2 個未知元素有 n^2 個方程的齊次線方程組。變換矩陣的定出就化爲這個有 n^2 個程的方程組的解出問題。此處必須從解的集合中選取這種解使得 $|T|\neq0$。由於矩陣 A 與 $\tilde{A}$ 有相同的不變因式，可以保證這種解的存在❹。

---

❶ 由(58)得出(57)，如果取 $k=1$；由(58)得出(59)，如果取 $k=p$ 或 $k>p$。

❷ 論斷1已經在第四章§4，2中得出。

❸ 是即對於最小多項式的多重根 λ_i 都有 $f'(\lambda_i)\neq0$。

❹ 因爲從這一事實得出矩陣 A 與 $\tilde{A}$ 的相似性。

我們注意，雖則法式是爲所予矩陣 A 所唯一確定的❶，但對於變換矩陣 T，我們常有無窮多個值，含於等式

$$T=UT_1 \tag{60}$$

中，其中 T_1 是變換矩陣的某一個，而 U 爲任一與 A 可易的矩陣❷。

定出變換矩陣 T 的上述方法，對於概念來說非常簡單，但實際上毫無用處，因爲常須艱巨的計算（例如當 $n=4$ 時已經要解出有 16 個方程的方程組）。

回來述說構成變換矩陣 T 的較有效的方法。這一方法奠基於定理 7 的補充（本章 §5 末尾）。按照這一個補充，我們可以取矩陣

$$T=Q(\widetilde{A}) \tag{61}$$

作爲變換矩陣，祇要

$$\lambda E-\widetilde{A}=P(\lambda)(\lambda E-A)Q(\lambda)。$$

後一等式表示特徵矩陣 $\lambda E-A$ 與 $\lambda E-\widetilde{A}$ 的相抵性。此處 $P(\lambda)$ 與 $Q(\lambda)$ 是有不等於零的常數行列式的多項式矩陣。

爲了具體來出矩陣 $Q(\lambda)$，我們利用初級變換把 λ-矩陣 $\lambda E-A$ 與 $\lambda E-\widetilde{A}$ 都化爲標準對角形：

$$\{i_n(\lambda),\ i_{n-1}(\lambda),\cdots,\ i_1(\lambda)\}=P_1(\lambda)(\lambda E-A)Q_1(\lambda), \tag{62}$$

$$\{i_n(\lambda),\ i_{n-1}(\lambda),\cdots,\ i_1(\lambda)\}=P_2(\lambda)(\lambda E-\widetilde{A})Q_2(\lambda), \tag{63}$$

其中

$$Q_1(\lambda)=T_1T_2\cdots T_{p_1},\ Q_2(\lambda)=T_1^*T_2^*\cdots T_{p_2}^*, \tag{64}$$

而 $T_1,\cdots,T_{p_1},T_1^*,\cdots,T_{p_2}^*$ 各對應於 λ-矩陣 $\lambda E-A$ 與 $\lambda E-\widetilde{A}$ 諸列上初級運算的初級矩陣。由(62)，(63)與(64)得出：

$$\lambda E-\widetilde{A}=P(\lambda)(\lambda E-A)Q(\lambda),$$

其中

$$Q(\lambda)=Q_1(\lambda)Q_2^{-1}(\lambda)=T_1T_2\cdots T_{p_1}T_{p_2}^{*-1}T_{p_2-1}^{*-1}\cdots T_1^{*-1}。 \tag{65}$$

順次對么矩陣 E 施行對應於矩陣 $T_1,T_2,\cdots,T_{p_1},T_{p_2}^{*-1},\cdots,T_1^{*-1}$ 的初級運算，就可計算出矩陣 $Q(\lambda)$。此後［按照公式(61)］在 $Q(\lambda)$ 中換變量 λ 以矩陣 $\widetilde{A}$。

例

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -5 & 4 \\ 8 & -4 & 3 & -4 \\ 15 & -10 & 11 & -11 \end{Vmatrix}。$$

---

❶ 這一論斷並沒有說祇對於第一種自然法式才能成立。如果對於第二種自然法式或者對於若唐法式，那末在不計對角線上諸子塊的次序時，對他們的任何一種仍然是唯一確定的。

❷ 公式(60)亦可以換爲公式

$$T=T_1V,$$

其中 V 爲任一與 $\widetilde{A}$ 可易的矩陣。

引進對於右初級運算與其對應矩陣的符號記法(參考本章 § 1)。

$$T' = [(c)i],\ T'' = [i + (b(\lambda))j],\ T''' = [ij]。$$

變特徵矩陣 $\lambda E - A$ 爲標準對角形矩陣,同時注意所施行的右初級運算,亦即在列上的運算:

$$\lambda E - A = \left\| \begin{matrix} \lambda-1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & \lambda-3 & 5 & -4 \\ -8 & 4 & \lambda-3 & 4 \\ -15 & 10 & -11 & \lambda+11 \end{matrix} \right\|,$$

$$\left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4\lambda-1 & \lambda+1 & 1 & -4 \\ -4\lambda-4 & 0 & \lambda+1 & 4 \\ -\lambda^2-10\lambda-4 & -\lambda-1 & \lambda & \lambda+11 \end{matrix} \right\|,$$

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & \lambda+1 & 1 & 4\lambda-1 \\ 4 & 0 & \lambda+1 & -4\lambda-4 \\ \lambda+11 & -\lambda-1 & \lambda & -\lambda^2-10\lambda-4 \end{matrix} \right\|;$$

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 1 & 4\lambda-1 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & -4\lambda-4 \\ 0 & -\lambda-1 & \lambda & -\lambda^2-10\lambda-4 \end{matrix} \right\|,$$

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda^2-2\lambda-1 & \lambda+1 & -4\lambda^2-7\lambda-3 \\ 0 & -\lambda^2-2\lambda-1 & \lambda & -5\lambda^2-9\lambda-4 \end{matrix} \right\|,$$

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & -\lambda^2-2\lambda-1 & -4\lambda^2-7\lambda-3 \\ 0 & \lambda & -\lambda^2-2\lambda-1 & -5\lambda^2-9\lambda-4 \end{matrix} \right\|;$$

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2+2\lambda+1 & 4\lambda^2+7\lambda+3 \\ 0 & 0 & \lambda^2+2\lambda+1 & 5\lambda^2+9\lambda+4 \end{matrix} \right\|,$$

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2+2\lambda+1 & -\lambda^2-3\lambda-2 \\ 0 & 0 & \lambda^2+2\lambda+1 & -\lambda-1 \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2-2\lambda-1 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & \lambda^2+2\lambda+1 & -\lambda^2-3\lambda-2 \end{Vmatrix};$$

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & -\lambda^2-2\lambda-1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2-3\lambda-2 & \lambda^2+2\lambda+1 \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2-3\lambda-2 & -(\lambda+1)^3 \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda+1)^3 \end{Vmatrix}。$$

此處

$$Q_1(\lambda)=[1+(1-\lambda)4][2-4][3+4][14][2-(\lambda+1)3][4+(1-4\lambda)3][23]\times$$
$$\times[4-(5)3][43][4+(\lambda+1)3]。$$

我們得出了矩陣 A 的不變因式 $(\lambda+1)^3$, $(\lambda+1)$, 1, 1。這一矩陣有兩個初級因子 $(\lambda+1)^3$, $(\lambda+1)$。故其若唐法式有次之形狀：

$$J=\begin{Vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}。$$

用初級運算化矩陣 $\lambda E-J$ 爲法對角形的形狀

$$\lambda E-J=\begin{Vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+1 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & (\lambda+1)^2 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+1 \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ (\lambda+1)^3 & (\lambda+1)^2 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+1 \end{Vmatrix};$$

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ (\lambda+1)^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda+1 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda+1)^3 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda+1)^3 \end{Vmatrix}。$$

此處　$Q_2(\lambda)=[2+(\lambda+1)3][1+(\lambda+1)2][12][23][34]$。

所以

$$Q(\lambda)=Q_1(\lambda)Q_2^{-1}(\lambda)=[1+(1-\lambda)4][2-4][3+4][14][2-(\lambda+1)3]\times$$
$$\times[4+(1-4\lambda)3][23][4-(5)3][43][4+(\lambda+1)3][34][23]\times$$
$$\times[12][1-(\lambda+1)2][2-(\lambda+1)3]。$$

順次應用這些初級運算於么矩陣：

$$E=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1-\lambda & -1 & 1 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1-\lambda \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda-1 & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda-2 & 1 & 1-\lambda \end{Vmatrix};$$

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda-1 & 1 & 1-4\lambda \\ 1 & -\lambda-2 & 1 & 2-5\lambda \end{Vmatrix}; \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda-1 & 1-4\lambda \\ 1 & 1 & -\lambda-2 & 2-5\lambda \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -\lambda-1 & \lambda+6 \\ 1 & 1 & -\lambda-2 & 12 \end{Vmatrix};$$

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda+6 & -\lambda-1 \\ 1 & 1 & 12 & -\lambda-2 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & \lambda+1 \\ 0 & 0 & -5 & -5\lambda-4 \\ 0 & 1 & \lambda+6 & \lambda^2+6\lambda+5 \\ 1 & 1 & 12 & 11\lambda+10 \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 & 1 \\ -5\lambda-4 & 0 & 0 & -5 \\ \lambda^2+6\lambda+5 & 0 & 1 & \lambda+6 \\ 11\lambda+10 & 1 & 1 & 12 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 & 1 \\ -5\lambda-4 & 0 & 0 & -5 \\ \lambda^2+6\lambda+5 & -\lambda-1 & 1 & \lambda+6 \\ 10\lambda+9 & -\lambda & 1 & 12 \end{Vmatrix}。$$

這樣一來，

$$Q(\lambda)=\begin{Vmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 & 1 \\ -5\lambda-4 & 0 & 0 & -5 \\ \lambda^2+6\lambda+5 & -\lambda-1 & 1 & \lambda+6 \\ 10\lambda+9 & -\lambda & 1 & 12 \end{Vmatrix}=$$

$$=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}\lambda^2+\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 0 & 1 \\ 10 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}\lambda+\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 & -5 \\ 5 & -1 & 1 & 6 \\ 9 & 0 & 1 & 12 \end{Vmatrix}。$$

注意

$$J^2=\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

我們有：

$$T=Q(J)=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 0 & 1 \\ 10 & -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}\times$$

$$\times\begin{Vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}+\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 & -5 \\ 5 & -1 & 1 & 6 \\ 9 & 0 & 1 & 12 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ -1 & 11 & 0 & 12 \end{Vmatrix}。$$

驗算：

$$AT=\begin{Vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 6 & -5 & 5 \\ 0 & -4 & 3 & -5 \\ 1 & -12 & 11 & -12 \end{Vmatrix}, \quad TJ=\begin{Vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 6 & -5 & 5 \\ 0 & -4 & 3 & -5 \\ 1 & -12 & 11 & -12 \end{Vmatrix},$$

亦卽 $AT=TJ$。

$$|T|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ -1 & 11 & 0 & 12 \end{vmatrix}=-1\neq 0。$$

故知，
$$A=TJT^{-1}。$$

§9. 變換矩陣的第二種構成方法

1. 我們還要述設一種構成變換矩陣的方法，他常常給予比上節中的方法以較少的計算。但是這個第二種方法，祇是用於若唐法式而且是在已知所予矩陣 A 的初級因子

$$(\lambda-\lambda_1)^{p_1},\ (\lambda-\lambda_2)^{p_2},\cdots \tag{66}$$

的時候。

設 $A=TJT^{-1}$，其中

$$J=\{\lambda_1E^{(p_1)}+H^{(p_1)},\ \lambda_2E^{(p_2)}+H^{(p_2)},\cdots\}=\left\|\begin{matrix} \overbrace{\begin{matrix}\lambda_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & \lambda_1\end{matrix}}^{p_1} & & \\ & \overbrace{\begin{matrix}\lambda_2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & \lambda_2\end{matrix}}^{p_2} & \\ & & \ddots \end{matrix}\right\|。$$

如果以 t_k 記矩陣 T 的第 k 個列 $(k=1,2,\cdots,n)$，我們的矩陣等式

$$AT=TJ$$

就可換爲相抵的等式組

$$At_1=\lambda_1t_1,\ At_2=\lambda_1t_2+t_1,\ \cdots,\ At_{p_1}=\lambda_1t_{p_1}+t_{p_1-1}, \tag{67}$$

$$At_{p_1+1}=\lambda_2t_{p_1+1},\ At_{p_1+2}=\lambda_2t_{p_1+2}+t_{p_1+1},\ \cdots,\ At_{p_1+p_2}=\lambda_2t_{p_1+p_2}+t_{p_1+p_2-1}, \tag{68}$$

……………………………………………………………………

這還可以寫爲：

$$(A-\lambda_1E)t_1=0,\ (A-\lambda_1E)t_2=t_1,\cdots,\ (A-\lambda_1E)t_{p_1}=t_{p_1-1}, \tag{67'}$$

$$(A-\lambda_2E)t_{p_1+1}=0,\ (A-\lambda_2E)t_{p_1+2}=t_{p_1+1},\cdots,\ (A-\lambda_2E)t_{p_1+p_2}=t_{p_1+p_2-1}, \tag{68'}$$

……………………………………………………………………

這樣一來,矩陣 T 的所有列都裂分爲列的"若唐鏈":$[t_1, t_2, \cdots, t_{p_1}]$,$[t_{p_1+1}, t_{p_1+2}, \cdots, t_{p_1+p_2}]$,… J 中每一個若唐子塊[或者同樣的,(66)中每一個初級因子]對應於他的列若唐鏈。每一個列若唐鏈爲(67),(68)等等型的方程組所決定。

變換矩陣 T 的求出就化爲列若唐鏈的尋找,要求所得出的全部是 n 個線性無關列。

我們來證明,這些列若唐鏈可以利用導出附加矩陣 $C(\lambda)$(參考第四章 §6)來定出。

對於矩陣 $C(\lambda)$ 有恆等式

$$(\lambda E-A)C(\lambda)=\psi(\lambda)E, \tag{69}$$

其中 $\psi(\lambda)$ 爲矩陣 A 的最小多項式。

設 $\psi(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^m\chi(\lambda) \quad (\chi(\lambda_0)\neq 0)$。

對恆等式(69)逐項繼續微分 $m-1$ 次:

$$\left.\begin{array}{c}(\lambda E-A)C'(\lambda)+C(\lambda)=\psi'(\lambda)E,\\(\lambda E-A)C''(\lambda)+2C'(\lambda)=\psi''(\lambda)E,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\(\lambda E-A)C^{(m-1)}(\lambda)+(m-1)C^{(m-2)}(\lambda)=\psi^{(m-1)}(\lambda)E。\end{array}\right\} \tag{70}$$

在(69),(70)中换 λ 爲 λ_0 且注意其右節此時全變爲零,我們得出:

$$(A-\lambda_0E)C=0,\ (A-\lambda_0E)D=C,\ (A-\lambda_0E)F=D,\cdots,\ (A-\lambda_0E)K=G, \tag{71}$$

其中

$$\left.\begin{array}{c}C=C(\lambda_0),\ D=\frac{1}{1!}C'(\lambda_0),\ F=\frac{1}{2!}C''(\lambda_0),\cdots,\ G=\frac{1}{(m-2)!}C^{(m-2)}(\lambda_0),\\K=\frac{1}{(m-1)!}C^{(m-1)}(\lambda_0)。\end{array}\right\} \tag{72}$$

在等式(71)中换諸矩陣(72)以其第 k 個列($k=1, 2, \cdots, n$),我們得出:

$$(A-\lambda_0E)C_k=0,\ (A-\lambda_0E)D_k=C_k,\cdots,\ (A-\lambda_0E)K_k=G_k \quad (k=1, 2,\cdots, n)。 \tag{73}$$

因爲 $C=C(\lambda_0)\neq 0$❶,故可選取這樣的 $k(\leqslant n)$,使得

$$C_k\neq 0。 \tag{74}$$

那末 m 個列

$$C_k,\ D_k,\ F_k,\cdots,G_k,\ K_k \tag{75}$$

就線性無關。事實上,設

$$\gamma C_k+\delta D_k+\cdots+\varkappa K_k=0。 \tag{76}$$

順次乘(76)的兩節以 $A-\lambda_0E,\cdots,(A-\lambda_0E)^{m-1}$,我們得出:

$$\delta C_k+\cdots+\varkappa G_k=0,\cdots,\varkappa C_k=0。 \tag{77}$$

從(76)與(77)且應用(74)我們得出:

$$\gamma=\delta=\cdots=\varkappa=0。$$

❶ 從 $C(\lambda_0)=0$ 將得出 $C(\lambda)$ 諸元素的一個次數大於零的最大公因式,與 $C(\lambda)$ 的定義矛盾。

因爲線性無關列(75)適合方程組(73)，他們構成了對應於初級因子$(\lambda-\lambda_0)^m$的列若唐鏈[比較(73)與(67′)]。

如果對於某一個k有$C_k=0$，但$D_k\neq 0$，那末列$D_k, \cdots, G_k, K_k$構成有$m-1$個列的若唐鏈，諸如此類。

2．我們首先指出，如何在矩陣A有兩兩互質的初級因子

$$(\lambda-\lambda_1)^{m_1}, (\lambda-\lambda_2)^{m_2}, \cdots, (\lambda-\lambda_s)^{m_s} \quad (\text{當 } i\neq j \text{ 時 } \lambda_i\neq\lambda_j;\ i, j=1, 2, \cdots, s)$$

時來構成變換矩陣T。

用上述方法構成對應於初級因子$(\lambda-\lambda_j)^{m_j}$的列若唐鏈$C^{(j)}, D^{(j)}, \cdots, G^{(j)}, K^{(j)}$。那末

$$(A-\lambda_jE)C^{(j)}=0, (A-\lambda_jE)D^{(j)}=C^{(j)}, \cdots, (A-\lambda_jE)K^{(j)}=G^{(j)}。\tag{78}$$

給予j以值$1, 2, \cdots, s$，我們得出全部含有n個列的s個若唐鏈。這些列是線性無關的。

事實上，設

$$\sum_{j=1}^{s}[\gamma_jC^{(j)}+\delta_jD^{(j)}+\cdots+\varkappa_jK^{(j)}]=0。\tag{79}$$

左乘等式(79)的兩節以乘積

$$(A-\lambda_1E)^{m_1}\cdots(A-\lambda_{j-1}E)^{m_{j-1}}(A-\lambda_jE)^{m_j-1}(A-\lambda_{j+1}E)^{m_{j+1}}\cdots(A-\lambda_sE)^{m_s}。\tag{80}$$

我們得出：

$$\varkappa_j=0。$$

在(80)中順次換m_j-1以$m_j-2, m_j-3, \cdots$，我們得出：

$$\gamma_j=\delta_j=\cdots=\varkappa_j=0 \quad (j=1, 2, \cdots, s),$$

這就是所要證明的結果。

矩陣T爲次式所確定：

$$T=(C^{(1)}, D^{(1)}, \cdots, K^{(1)}; C^{(2)}, D^{(2)}, \cdots, K^{(2)}; \cdots; C^{(s)}, D^{(s)}, \cdots, K^{(s)})。\tag{81}$$

例

$$\begin{array}{cccc} 8 & 8 & -10 & -8 \end{array}$$

$$A=\left\|\begin{array}{cccc} 3 & -1 & -4 & 2\\ 2 & 3 & -2 & -4\\ 2 & -1 & -3 & 2\\ 1 & 2 & -1 & -3 \end{array}\right\|;$$

$$\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 4 & 0 & 2 \end{array}$$

$$\psi(\lambda)=\Delta(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2=\lambda^4-2\lambda^2+1,$$

初級因子：$(\lambda-1)^2, (\lambda+1)^2$，

$$\Psi(\lambda, \mu)=\frac{\psi(\mu)-\psi(\lambda)}{\mu-\lambda}=\mu^3+\lambda\mu^2+(\lambda^2-2)\mu+\lambda^3-2\lambda。$$

$$C(\lambda)=\Psi(\lambda E, A)=A^3+\lambda A^2+(\lambda^2-2)A+(\lambda^3-2\lambda)E。$$

建立第一列$C_1(\lambda)$：

$$C_1(\lambda)=[A^3]_1+\lambda[A^2]_1+(\lambda^2-2)A_1+(\lambda^3-2\lambda)E_1。$$

爲了計算矩陣 A^2 的第一列，我們乘所有矩陣 A 的行以矩陣 A 的第一列。我們得出❶：$[A^2]_1=(1, 4, 0, 2)$。乘這一列以矩陣 A 所有的行，求得 $[A^3]_1=(3, 6, 2, 3)$。故有

$$C_1(\lambda)=\left\|\begin{matrix}3\\6\\2\\3\end{matrix}\right\|+\lambda\left\|\begin{matrix}1\\4\\0\\2\end{matrix}\right\|+(\lambda^2-2)\left\|\begin{matrix}3\\2\\2\\1\end{matrix}\right\|+(\lambda^3-2\lambda)\left\|\begin{matrix}1\\0\\0\\0\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}\lambda^3+3\lambda^2-\lambda-3\\2\lambda^2+4\lambda+2\\2\lambda^2-2\\\lambda^2+2\lambda+1\end{matrix}\right\|。$$

因此，$C_1(1)=(0, 8, 0, 4)$，$C_1'(1)=(8, 8, 4, 4)$。因爲 $C_1(-1)=(0, 0, 0, 0)$，所以對於第二列應用上述的類似運算，求得：$C_2(-1)=(-4, 0, -4, 0)$ 與 $C_2'(-1)=(4, -4, 4, -4)$。建立矩陣：

$$(C_1(1), C_1'(1); C_2(-1), C_2'(-1))=\left\|\begin{matrix}0&8&-4&4\\8&8&0&-4\\0&4&-4&4\\4&4&0&-4\end{matrix}\right\|。$$

約去❷前二列的因子 4 與後二列的因子 -4：

$$T=\left\|\begin{matrix}0&2&1&-1\\2&2&0&1\\0&1&1&-1\\1&1&0&1\end{matrix}\right\|。$$

讀讀者驗證：

$$AT=T\cdot\left\|\begin{matrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{matrix}\right\|。$$

3．轉移到一般的情形，要找出對應於特徵數 λ_0 的列若唐鏈，假設對應於 λ_0 的初級因子爲 p 個 $(\lambda-\lambda_0)^m$，q 個 $(\lambda-\lambda_0)^{m-1}$，$r$ 個 $(\lambda-\lambda_0)^{m-2}$，諸如此類。

預先建立次諸矩陣的一些性質：

$$C=C(\lambda_0),\ D=C'(\lambda_0),\ F=\frac{1}{2!}C''(\lambda_0),\ \cdots,\ K=\frac{1}{(m-1)!}C^{(m-1)}(\lambda_0)。\tag{82}$$

1° 矩陣(82)可以表爲 A 的多項式的形狀：

$$C=h_1(A),\ D=h_2(A),\ \cdots,\ K=h_m(A),\tag{83}$$

其中

---

❶ 我們把乘行以列所得出的列寫成矩陣 A 下面的一個行。矩陣 A 上面的斜體字爲諸行和的控制數。

❷ 乘若唐鏈的所有列以數 $c\neq0$ 後，仍然得出若唐鏈。

$$h_i(\lambda)=\frac{\psi(\lambda)}{(\lambda-\lambda_0)^i}\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)。\tag{84}$$

事實上
$$C(\lambda)=\Psi(\lambda E,\ A),$$

其中
$$\Psi(\lambda,\ \mu)=\frac{\psi(\mu)-\psi(\lambda)}{\mu-\lambda}。$$

所以

$$\frac{1}{k!}C^{(k)}(\lambda_0)=\frac{1}{k!}\Psi^{(k)}(\lambda_0 E,\ A),\tag{85}$$

其中

$$\frac{1}{k!}\Psi^{(k)}(\lambda_0,\ \mu)=\frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\Psi(\lambda,\ \mu)\right]_{\lambda=\lambda_0}=$$

$$=\frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\frac{\psi(\mu)}{\mu-\lambda}\right]_{\lambda=\lambda_0}=\frac{\psi(\mu)}{(\mu-\lambda_0)^{k+1}}=h_{k+1}(\mu)。\tag{86}$$

由(82)，(85)與(86)得出(83)。

2° 矩陣(82)有對應的秩

$$p,\ 2p+q,\ 3p+2q+r,\ \cdots$$

矩陣(82)的這一性質可直接從 1° 與第六章的定理 8 來得出，如果取秩等於 $n-d$ 且利用關於 A 的函數的秩的公式(48)(第六章，§7，2)。

3° 在矩陣序列(82)中，每一個矩陣的列都是在他後面的任一矩陣諸列的線性組合。

在序列(82)中取兩個矩陣 $h_i(A)$ 與 $h_k(A)$(參考 1°)。設 $i<k$。那末由(84)得出：

$$h_i(A)=h_k(A)(A-\lambda_0 E)^{k-i}。$$

故矩陣 $h_i(A)$ 的第 j 列 $y_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 可經矩陣 $h_k(A)$ 的列 $z_1,\ z_2,\cdots,\ z_n$ 線性表出：

$$y_j=\sum_{g=1}^{n}\alpha_g z_g,$$

其中 $\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\ \alpha_n$ 是矩陣 $(A-\lambda_0 E)^{k-i}$ 中第 j 列的元素。

4° 在矩陣 C 中把任一列換為所有列的任一線性組合，且在 $D,\ \cdots,\ K$ 中作對應的代換，並不變動基本公式(71)。

現在轉移到對於初級因子

$$\underbrace{(\lambda-\lambda_0)^m,\ \cdots,\ (\lambda-\lambda_0)^m}_{p};\quad\underbrace{(\lambda-\lambda_0)^{m-1},\ \cdots,\ (\lambda-\lambda_0)^{m-1}}_{q};\cdots$$

的列若唐鏈的組成。應用性質 2° 與 4°，我們變矩陣 C 為次之形狀：

$$C=(C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_p;\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0),\tag{87}$$

其中列 $C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_p$ 線性無關。此時

$$D=(D_1,\ D_2,\ \cdots,\ D_p;\ D_{p+1},\ \cdots,\ D_n)。$$

按照 3°，對於任何一個 $i(1\leqslant i\leqslant p)$，列 C_i 都是列 $D_1,\ D_2,\cdots,\ D_n$ 的線性組合：

$$C_i=\alpha_1 D_1+\cdots+\alpha_p D_p+\alpha_{p+1}D_{p+1}+\cdots+\alpha_n D_n。\tag{88}$$

乘這個等式的兩節以 $A-\lambda_0 E$。那末注意[參考(73)]

$$(A-\lambda_0E)C_i=0(i=1,2,\cdots,p),\ (A-\lambda_0E)D_j=C_j(j=1,2,\cdots,n),$$

由(87)得出：$$0=\alpha_1C_1+\alpha_2C_2+\cdots+\alpha_pC_p,$$

故在(88)中 $$\alpha_1=\cdots=\alpha_p=0。$$

所以列 $C_1, C_2, \cdots, C_p$ 可以表爲列 $D_{p+1}, \cdots, D_n$ 的線性無關的組合，因而由 4° 與 2°，可以取列 $C_1, \cdots, C_p$ 代換 $D_{p+1}, \cdots, D_{2p}$，且換 $D_{2p+q+1}, \cdots, D_n$ 爲零，並不變動矩陣 C。

那末矩陣 D 有次之形狀

$$D=(D_1,\cdots,D_p;\ C_1,C_2,\cdots,C_p;\ D_{2p+1},\cdots,D_{2p+q};\ 0,0,\cdots,0)。\tag{89}$$

同樣的，對於矩陣 C 與 D 保持(87)與(89)的形狀，我們表矩陣 F 爲次之形狀：

$$\left.\begin{aligned}F=(F_1,\cdots,F_p;\ D_1,\cdots,D_p;\ F_{2p+1},\cdots,F_{2p+q};\ C_1,\cdots,C_p;\\ D_{2p+1},\cdots,D_{2p+q};\ F_{3p+2q+1},\cdots,F_{3p+2q+r};\ 0,\cdots,0)\end{aligned}\right\}\tag{90}$$

諸如此類。

(73)式給予我們若唐鏈

$$\left.\begin{aligned}&\underbrace{\overbrace{(C_1,D_1,\cdots,K_1)}^{m},\ \cdots,\ \overbrace{(C_p,D_p,\cdots,K_p)}^{m}}_{p};\\ &\underbrace{\overbrace{(D_{2p+1},F_{2p+1},\cdots,K_{2p+1})}^{m-1},\ \cdots,\ \overbrace{(D_{2p+q},F_{2p+q},\cdots,K_{2p+q})}^{m-1}}_{q};\cdots\end{aligned}\right\}\tag{91}$$

這些若唐鏈彼此無關。事實上，在鏈(91)中所有的列 C_i 線性無關，因爲他們組成矩陣 C 的 p 個線性無關列。在(91)中所有的列 C_i 與 D_i 線性無關，因爲他們組成矩陣 D 中的 $2p+q$ 個線性無關列，諸如此類；最後，(91)中所有的列線性無關，因爲他們組成矩陣 K 中的 $n_0=$ $=mp+(m-1)q+\cdots$ 個線性無關列。在(91)中，列的個數等於對應於所予特徵數 λ_0 的諸初級因子的次數之和。

設矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 有 s 個不同的特徵數 $\lambda_j[j=1,2,\cdots s;\ \Delta(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots$ $\cdots(\lambda-\lambda_s)^{n_s};\ \psi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}]$。對於每一個特徵數 λ_j 建立一組線性無關的若唐鏈(91)；在這一組中列的個數等於 $n_j(j=1,2,\cdots,s)$。所有這樣得出的鏈共含 $n=n_1+n_2+\cdots+n_s$ 個列。

這 n 個列線性無關且構成所求的變換矩陣 T。

所得出的 n 個列的線性無關性可證明如次：

這 n 個列的任一線性組合可表爲次之形狀：

$$\sum_{j=1}^{s}H_j=0,\tag{92}$$

其中 H_j 是對應於特徵數 $\lambda_j(j=1,2,\cdots,s)$ 的若唐鏈(91)中諸列的線性組合。但是對應於特徵數 λ_j 的若唐鏈中任何一列都適合方程

$$(A-\lambda_jE)^{m_j}x=0。$$

所以

$$(A-\lambda_j E)^{m_j} H_j=0\text{。} \tag{93}$$

取固定的數 $j(1\leqslant j\leqslant s)$ 且用矩陣的影譜上次之諸值：

$$r(\lambda_i)=r'(\lambda_i)=\cdots=r^{(m_i-1)}(\lambda_i)=0 \quad (i\neq j),$$

而有

$$r(\lambda_j)=1, \quad r'(\lambda_j)=\cdots=r^{(m_j-1)}(\lambda_j)=0$$

者，來構成拉格蘭日-薛爾凡斯透內插多項式 $r(\lambda)$（參考第五章，§§1，2）。

那末對於任何 $i\neq j$，$r(\lambda)$ 都被 $(\lambda-\lambda_i)^{m_i}$ 所除盡；故由(93)

$$r(A)H_i=0 \quad (i\neq j)\text{。} \tag{94}$$

同樣的道理，差 $r(\lambda)-1$ 爲 $(\lambda-\lambda_j)^{m_j}$ 所除盡；故有

$$r(A)H_j=H_j\text{。} \tag{95}$$

同乘(92)的兩節以 $r(A)$，根據(94)與(95)，我們得出：

$$H_j=0\text{。}$$

這對於任何 $j=1, 2, \cdots, s$ 都能成立。但 H_j 是對應於同一特徵數 λ_j 的線性無關列的線性組合($j=1, 2, \cdots, s$)。故在線性組合 $H_j(j=1, 2, \cdots, s)$ 中所有係數都等於零，因而(92)中所有係數都等於零。

註　我們指出對於矩陣 T 中列的某些變換，經過這些變換後所得出的矩陣仍然是同一若唐式的變換矩陣(此時對角線上若唐子塊的位置並無改變)：

I．乘任一若唐鏈的所有列以同一不爲零的數。

II．加到若唐鏈的每一列(從第二列起)以同一鏈中的前一列與同一數的乘積。

III．加到若唐鏈的所有列上，以另一個含有相同或更多個列且對應於同一特徵數的若唐鏈的對應列。

例 1.

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{Vmatrix};$$

$\Delta(\lambda)=(\lambda-1)^4(\lambda+1)$，

$\psi(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1$。

矩陣的初級因子爲 $(\lambda-1)^2, (\lambda-1)^2, \lambda+1$。

$$J=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix},$$

$$\Psi(\lambda, \mu)=\frac{\psi(\mu)-\psi(\lambda)}{\mu-\lambda}=\mu^2+(\lambda-1)\mu+\lambda^2-\lambda-1,$$

$$C(\lambda)=\Psi(\lambda E, A)=A^2+(\lambda-1)A+(\lambda^2-\lambda-1)E\text{。}$$

順次計算矩陣 A^2 的列與矩陣 $C(\lambda)$, $C(1)$, $C'(\lambda)$, $C'(1)$, $C(-1)$ 中的對應列。我們應當得出矩陣 $C(1)$ 的兩個線性無關列與矩陣 $C(-1)$ 的一個不為零的列。

$$C(\lambda)=\left\|\begin{matrix}1&0&0&2&*\\0&1&0&2&*\\0&0&1&0&*\\2&-2&2&-1&*\\2&-2&2&-2&*\end{matrix}\right\|+(\lambda-1)\left\|\begin{matrix}1&0&0&1&*\\0&1&-2&3&*\\0&0&-1&2&*\\1&-1&1&0&*\\1&-1&1&-1&*\end{matrix}\right\|+$$

$$+(\lambda^2-\lambda-1)\left\|\begin{matrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{matrix}\right\|,$$

$$C(+1)=\left\|\begin{matrix}0&0&0&2&*\\0&0&0&2&*\\0&0&0&0&*\\2&-2&2&-2&*\\2&-2&2&-2&*\end{matrix}\right\|,$$

$$C'(\lambda)=\left\|\begin{matrix}1&0&0&1&*\\0&1&-2&3&*\\0&0&-1&2&*\\1&-1&1&0&*\\1&-1&1&-1&*\end{matrix}\right\|+(2\lambda-1)\left\|\begin{matrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{matrix}\right\|,$$

$$C'(+1)=\left\|\begin{matrix}2&*&*&1&*\\0&*&*&3&*\\0&*&*&2&*\\1&*&*&1&*\\1&*&*&-1&*\end{matrix}\right\|,\ C(-1)=\left\|\begin{matrix}0&0&0&*&*\\0&0&4&*&*\\0&0&4&*&*\\0&0&0&*&*\\0&0&0&*&*\end{matrix}\right\|。$$

故有❶

$$T=(C_1(+1),\ C'_1(+1),\ C_4(+1),\ C_4(+1),\ C_3(-1))=\left\|\begin{matrix}0&2&2&1&0\\0&0&2&3&4\\0&0&0&2&4\\2&1&-2&1&0\\2&1&-2&-1&0\end{matrix}\right\|。$$

對於矩陣 T 還可予以簡化。順次

❶ 此處以足數記列的序數；例如，$C'_4(+1)$ 記矩陣 $C'(+1)$ 中第四列。

(1)除第五列以 4;

(2)在第三列上加以第一列,在第四列上加以第二列;

(3)從第四列減去第三列;

(4)除第一列與第二列以 2;

(5)從第二列減去第一列與 $\frac{1}{2}$ 的乘積。

我們得出矩陣

$$T_1=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}。$$

讓讀者驗證，$AT_1=T_1J$ 與 $|T_1|\neq 0$。

例 2.

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -5 & 4 \\ 8 & -4 & 3 & -4 \\ 15 & -10 & 11 & -11 \end{Vmatrix}; \quad \begin{array}{l} \Delta(\lambda)=(\lambda+1)^4, \\ \psi(\lambda)=(\lambda+1)^3。\\ \text{初級因子爲}(\lambda+1)^3,\ (\lambda+1). \end{array}$$

$$J=\begin{Vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}。$$

建立多項式

$$h_1(\lambda)=\frac{\psi(\lambda)}{\lambda+1}=(\lambda+1)^2,\ h_2(\lambda)=\frac{\psi(\lambda)}{(\lambda+1)^2}=\lambda+1,\ h_3(\lambda)=\frac{\psi(\lambda)}{(\lambda+1)^3}=1$$

與矩陣❶

$$C=h_1(A)=(A+E)^2,\ D=h_2(A)=A+E,\ F=E:$$

$$C=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \end{Vmatrix},\ D=\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -5 & 4 \\ 8 & -4 & 4 & -4 \\ 15 & -10 & 11 & -10 \end{Vmatrix},\ F=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}。$$

---

❶ 因爲祇有一個最高次初級因子，所以矩陣 C 的秩必須等於 1。因此祇要，例如，計算出位於矩陣 C 的第一列與第二行中的七個元素，卽已足夠。矩陣 C 的其餘元素就能立卽定出。

可以取這些矩陣的第三個列作爲矩陣 T 的前三個列：$T=(C_3, D_3, F_3, *)$。在矩陣 C, D, F 中，從第一列減去第三列的二倍，在第二與第四列上加以第三列，我們得出：

$$\widetilde{C}=\begin{Vmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&-1&0\end{Vmatrix},\ \widetilde{D}=\begin{Vmatrix}0&0&1&0\\7&-1&-5&-1\\0&0&4&0\\-7&1&11&1\end{Vmatrix},\ \widetilde{F}=\begin{Vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-2&1&1&1\\0&0&0&1\end{Vmatrix}。$$

在矩陣 $\widetilde{D}$, $\widetilde{F}$ 中，加第四列與 7 的乘積於第一列上，且從第二列減去第四列，我們得出：

$$\widetilde{C}=\begin{Vmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&-1&0\end{Vmatrix},\ \tilde{\tilde{D}}=\begin{Vmatrix}0&0&1&0\\0&0&-5&-1\\0&0&4&0\\0&0&11&1\end{Vmatrix},\ \tilde{\tilde{F}}=\begin{Vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\5&0&1&1\\7&-1&0&1\end{Vmatrix}。$$

取 $\tilde{\tilde{F}}$ 中第一列作爲 T 中最後一列。

我們有
$$T=(C_3, D_3, F_3, \tilde{\tilde{F}}_1)=\begin{Vmatrix}0&1&0&1\\1&-5&0&0\\0&4&1&5\\-1&11&0&7\end{Vmatrix}。$$

爲了驗算可以驗證 $AT=TJ$ 與 $|T|\neq 0$。

第七章　n 維空間中線性運算子的結構
（初級因子的幾何理論）

上章所述的關於初級因子的解析理論使得我們能夠對於任何方陣定出與他相似的"法"或"標準"形式矩陣。另一方面，在第三章中我們已經看到，n 維空間中線性運算子在不同的基底中的性狀，是藉助於一類相似矩陣來得出的。在這類矩陣中，有法式存在，是與 n 維空間中線性運算子的重要而深入的性質有密切關係。本章從事於這些性質的研究。線性運算子的結構的研究使得我們不依靠上章中所述的關於變換矩陣成法式的理論。因而本章的內容可以稱爲初級因子的幾何理論❶。

§1. 空間的向量（關於已予線性運算子）的最小多項式

討論域 K 上 n 維向量空間 $\boldsymbol{R}$ 與這一空間中線性運算子 $\boldsymbol{A}$。

設 $\boldsymbol{x}$ 爲 $\boldsymbol{R}$ 中任一向量。建立向量序列

$$\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x},\ \cdots \tag{1}$$

由於空間維數的有限性可以求得這樣的整數 $p(0\leqslant p\leqslant n)$，使得向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \cdots, \boldsymbol{A}^{p-1}\boldsymbol{x}$ 線性無關，而 $\boldsymbol{A}^p\boldsymbol{x}$ 是這些向量以域 K 中數爲係數的線性組合：

$$\boldsymbol{A}^p\boldsymbol{x}=-\gamma_1\boldsymbol{A}^{p-1}\boldsymbol{x}-\gamma_2\boldsymbol{A}^{p-2}\boldsymbol{x}-\cdots-\gamma_p\boldsymbol{x}\text{。} \tag{2}$$

取多項式 $\varphi(\lambda)=\lambda^p+\gamma_1\lambda^{p-1}+\cdots+\gamma_{p-1}\lambda+\gamma_p$。那末等式（2）可寫爲：

$$\varphi(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\text{。} \tag{3}$$

每一個可以適合等式（3）的多項式 $\varphi(\lambda)$ 稱爲向量 $\boldsymbol{x}$ 的化零多項

---

❶ 此處所述的初級因子的幾何理論是根據著者的論文[60a]來說的。其他初級因子理論的幾何構成可參考[13]中 §§ 96—99，還有[21]與[376]。（[21]有柯召的中譯本）。

式[1]。不難看出，從向量 $\boldsymbol{x}$ 的所有化零多項式中我們可以得出一個首項係數爲 1 的次數最小的化零多項式。這一個多項式我們稱爲向量 $\boldsymbol{x}$ 的最小化零多項式或簡稱爲向量 $\boldsymbol{x}$ 的最小多項式。

我們注意，向量 $\boldsymbol{x}$ 的任一化零多項式 $\tilde{\varphi}(\lambda)$ 都被其最小多項式 $\varphi(\lambda)$ 所除盡。

事實上，設

$$\tilde{\varphi}(\lambda)=\varphi(\lambda)\varkappa(\lambda)+\rho(\lambda),$$

其中 $\varkappa(\lambda)$，$\rho(\lambda)$ 爲以 $\varphi(\lambda)$ 除 $\tilde{\varphi}(\lambda)$ 所得出的商式與餘式。那末

$$\tilde{\varphi}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\varkappa(\boldsymbol{A})\varphi(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}+\rho(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\rho(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x},$$

因而 $\rho(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。但餘式 $\rho(\lambda)$ 如有次數，則必小於最小多項式 $\varphi(\lambda)$ 的次數。這就說明了 $\rho(\lambda)\equiv 0$。

特別的，由所指出的結果，知每一個向量 $\boldsymbol{x}$ 祇對應於一個最小多項式。

在空間 $\boldsymbol{R}$ 中選取某一基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$。以 $\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda), \cdots, \varphi_n(\lambda)$ 記基底中向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 的最小多項式，且以 $\psi(\lambda)$ 記這些多項式的最小公倍式（取 $\psi(\lambda)$ 的首項係數爲 1）。那末 $\psi(\lambda)$ 將爲所有基底向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 的化零多項式。因爲任一向量 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}$ 都可表爲形狀 $\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{e}_n$，所以

$$\psi(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=x_1\psi(\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_1+x_2\psi(\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_2+\cdots+x_n\psi(\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{0},$$

亦即

$$\psi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}。\tag{4}$$

多項式 $\psi(\lambda)$ 是全部空間 $\boldsymbol{R}$ 的化零多項式。設 $\tilde{\psi}(\lambda)$ 爲全部空間 $\boldsymbol{R}$ 的任一化零多項式。那末 $\tilde{\psi}(\lambda)$ 將爲基底向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 的化零多項式。因此 $\tilde{\psi}(\lambda)$ 必須是這向量的最小多項式 $\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda), \cdots, \varphi_n(\lambda)$ 的公倍式，所以多項式 $\tilde{\psi}(\lambda)$ 必須爲最小公倍式 $\psi(\lambda)$ 所除盡。故知，從

[1] 自然含有"關於所予運算子 $\boldsymbol{A}$"在內。我們爲了簡便起見此處在定義中沒有說明，因爲在這一章的全部範圍內我們祇討論一個運算子 $\boldsymbol{A}$。

全部空間 $\boldsymbol{R}$ 的所有化零多項式中得出一個首項係數為 1 的次數最小的多項式 $\psi(\lambda)$。這一個多項式為所予空間 $\boldsymbol{R}$ 與運算子 $\boldsymbol{A}$ 所唯一確定且稱為空間 $\boldsymbol{R}$ 的最小多項式[1] 空間 $\boldsymbol{R}$ 的最小多項式的唯一性可從上面所建立的結果,空間 $\boldsymbol{R}$ 的任一化零多項式 $\tilde{\psi}(\lambda)$ 都被最小多項式 $\psi(\lambda)$ 所除盡來得出。雖則最小多項式 $\psi(\lambda)$ 的組成與所定出的基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 有關,但是多項式 $\psi(\lambda)$ 却與這一基底的選擇無關(此可從空間 $\boldsymbol{R}$ 的最小多項式的唯一性推出)。

最後,還須注意,空間 $\boldsymbol{R}$ 的最小多項式是 $\boldsymbol{R}$ 中任一向量 $\boldsymbol{x}$ 的化零多項式,所以空間的最小多項式為這一空間中任何向量的最小多項式所除盡。

§2. 分解為有互質最小多項式的不變子空間的分解式

如果 $\boldsymbol{R}$ 的一部分向量所構成的集合 $\boldsymbol{R}'$ 含有這樣的性質,$\boldsymbol{R}'$ 中任二向量的和與 $\boldsymbol{R}'$ 中任一向量對數 $\alpha \in K$ 的乘積都仍然是 $\boldsymbol{R}'$ 中向量,那末這個集合 $\boldsymbol{R}'$ 是一個向量空間,為 $\boldsymbol{R}$ 的子空間。

如果給予了 $\boldsymbol{R}$ 中兩個子空間 $\boldsymbol{R}'$ 與 $\boldsymbol{R}''$ 且已知,

1° $\boldsymbol{R}'$ 與 $\boldsymbol{R}''$ 除零向量外沒有公共的向量,

2° $\boldsymbol{R}$ 中任一向量 $\boldsymbol{x}$ 都可表為和

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{x}'' \quad (\boldsymbol{x}' \in \boldsymbol{R}',\ \boldsymbol{x}'' \in \boldsymbol{R}''), \tag{5}$$

那末我們說,空間 $\boldsymbol{R}$ 分解為兩個子空間 $\boldsymbol{R}'$ 與 $\boldsymbol{R}''$ 且寫為:

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}'+\boldsymbol{R}''。 \tag{6}$$

我們注意,條件 1° 說明表示式(5)的唯一性。事實上,如果對於某一向量 $\boldsymbol{x}$ 我們有兩種不同的項在 $\boldsymbol{R}'$ 與 $\boldsymbol{R}''$ 中的和的表示法,即表示式(5)與表示式

[1] 如果在某一基底 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 中,運算子 A 對應於矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$,那末空間 R (關於 A 的)化零多項式或最小多項式就各為矩陣 A 的化零多項式與最小多項式而且反之亦然。比較第四章,§6。

$$\boldsymbol{x}=\widetilde{\boldsymbol{x}}'+\widetilde{\boldsymbol{x}}'' \quad (\widetilde{\boldsymbol{x}}'\in \boldsymbol{R}',\ \widetilde{\boldsymbol{x}}''\in \boldsymbol{R}''), \tag{7}$$

那末，從(5)逐項減去(7)，我們將得出：

$$\boldsymbol{x}'-\widetilde{\boldsymbol{x}}'=\widetilde{\boldsymbol{x}}''-\boldsymbol{x}'',$$

亦即不為零的向量 $\boldsymbol{x}'-\widetilde{\boldsymbol{x}}'\in \boldsymbol{R}'$ 與 $\widetilde{\boldsymbol{x}}''-\boldsymbol{x}''\in \boldsymbol{R}''$ 間有等式存在，與條件 1° 矛盾。

這樣一來，條件 1° 可以換為表示式(5)的唯一性。用這種形式，我們的分解定義可以直接推廣到任何多個子空間上。

設 $$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}'+\boldsymbol{R}''$$

且設 $\boldsymbol{e}_1',\ \boldsymbol{e}_2',\cdots,\ \boldsymbol{e}_{n'}'$ 與 $\boldsymbol{e}_1'',\ \boldsymbol{e}_2'',\cdots,\ \boldsymbol{e}_{n''}''$ 各為 $\boldsymbol{R}'$ 與 $\boldsymbol{R}''$ 的基底。那末讀者不難證明，這 $n'+n''$ 個全部向量線性無關且構成 $\boldsymbol{R}$ 的基底，亦即從子空間的基底構成原空間的基底。特別的，因而得出 $n=n'+n''$。

例 1. 設在三維空間中給予不與同一平面平行的三個方向。因為空間中任一向量都可以對這三個方向來分解為三個分量的和並且分解式是唯一的，所以

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}'+\boldsymbol{R}''+\boldsymbol{R}''',$$

其中 $\boldsymbol{R}$ 為空間的全部向量的集合，$\boldsymbol{R}'$ 是與第一個方向平行的全部向量的集合，$\boldsymbol{R}''$ 是與第二個方向平行的全部向量的集合，而 $\boldsymbol{R}'''$ 是與第三個方向平行的全部向量的集合。在這一情形，$n=3,\ n'=n''=n'''=1$。

例 2. 設在三維空間中給予一個平面與一條穿過他的直線。那末

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}'+\boldsymbol{R}'',$$

其中 $\boldsymbol{R}$ 為空間中全部向量的集合，$\boldsymbol{R}'$ 是與所予平面平行的全部向量的集合，而 $\boldsymbol{R}''$ 是與所予直線平行的全部向量的集合。在這個例子中，$n=3,\ n'=2,\ n''=1$。

子空間 $\boldsymbol{R}'\subset \boldsymbol{R}$ 稱為對於所予的運算子 A 不變，如果有 $A\boldsymbol{R}'\subset \boldsymbol{R}'$，亦即由 $\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{R}'$ 得出 $A\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{R}'$。換句話說，運算子 A 變不變子空間中向量為一個仍在這個空間中的向量。

此後我們要把空間分解為在對 A 不變的子空間上的分解式。這種分解式把在整個空間中運算子的性狀的研究化為在各個組成子空間中他的性狀的研究。

我們現在來證明次之定理：

定理 1（**關於分解空間為不變子空間的第一定理**） 如果對於已予

線性運算子 $\boldsymbol{A}$，空間 $\boldsymbol{R}$ 的最小多項式 $\psi(\lambda)$ 在域 K 中可表為兩個互質多項式 $\psi_1(\lambda)$ 與 $\psi_2(\lambda)$（首項係數都等於 1）的乘積

$$\psi(\lambda)=\psi_1(\lambda)\psi_2(\lambda), \tag{8}$$

那末空間 $\boldsymbol{R}$ 可以分解為兩個不變子空間 $\boldsymbol{I}_1$ 與 $\boldsymbol{I}_2$，

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}_1+\boldsymbol{I}_2, \tag{9}$$

而且他們的最小多項式各為因式 $\psi_1(\lambda)$ 與 $\psi_2(\lambda)$。

證明　以 $\boldsymbol{I}_1$ 記適合等式 $\psi_1(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的所有向量 $\boldsymbol{x}$ 的集合。同樣的利用等式 $\psi_2(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 來確定 $\boldsymbol{I}_2$。由這一定義知 $\boldsymbol{I}_1$ 與 $\boldsymbol{I}_2$ 都是 $\boldsymbol{R}$ 的子空間。

由 $\psi_1(\lambda)$ 與 $\psi_2(\lambda)$ 的互質推知❶有這樣的多項式 $\chi_1(\lambda)$ 與 $\chi_2(\lambda)$ 存在（係數在 K 中）使得次之恆等式能夠成立：

$$1=\psi_1(\lambda)\chi_1(\lambda)+\psi_2(\lambda)\chi_2(\lambda)。 \tag{10}$$

現在設 $\boldsymbol{x}$ 為 $\boldsymbol{R}$ 中任一向量。在(10)中換 λ 為 $\boldsymbol{x}$ 且以得出的兩節運算於向量 $\boldsymbol{x}$：

$$\boldsymbol{x}=\psi_1(\boldsymbol{A})\chi_1(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}+\psi_2(\boldsymbol{A})\chi_2(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}, \tag{11}$$

亦卽

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{x}'', \tag{12}$$

其中

$$\boldsymbol{x}'=\psi_2(\boldsymbol{A})\chi_2(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}''=\psi_1(\boldsymbol{A})\chi_1(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}。 \tag{13}$$

再者，

$$\psi_1(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}'=\psi(\boldsymbol{A})\chi_2(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},\ \psi_2(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}''=\psi(\boldsymbol{A})\chi_1(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},$$

亦卽 $\boldsymbol{x}'\in\boldsymbol{I}_1$ 與 $\boldsymbol{x}''\in\boldsymbol{I}_2$。

$\boldsymbol{I}_1$ 與 $\boldsymbol{I}_2$ 沒有不為零的公共向量。事實上，如果 $\boldsymbol{x}_0\in\boldsymbol{I}_1$ 與 $\boldsymbol{x}_0\in\boldsymbol{I}_2$，亦卽 $\psi_1(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{0}$，那末由(11)

$$\boldsymbol{x}_0=\chi_1(\boldsymbol{A})\psi_1(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}_0+\chi_2(\boldsymbol{A})\psi_2(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{0}。$$

這樣一來，我們已經證明了 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}_1+\boldsymbol{I}_2$。

❶ 參考，例如，[17]，214 頁（柯召的中譯本，195 頁）。

再設 $\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{I}_1$。那末 $\psi_1(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。左乘這個等式的兩節以 $\boldsymbol{A}$ 與互易 $\boldsymbol{A}$ 與 $\psi_1(\boldsymbol{A})$ 的位置，我們得出 $\psi_1(\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，亦即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{I}_1$。這就證明了，子空間 $\boldsymbol{I}_1$ 對 $\boldsymbol{A}$ 不變。同樣的可以證明子空間 $\boldsymbol{I}_2$ 的不變性。

現在我們來證明，$\psi_1(\lambda)$ 是 $\boldsymbol{I}_1$ 的最小多項式。設 $\tilde{\psi}_1(\lambda)$ 爲 $\boldsymbol{I}_1$ 的任一化零多項式，而 $\boldsymbol{x}$ 爲 $\boldsymbol{R}$ 中任一向量。利用已經建立的分解式(12)，寫出：

$$\tilde{\psi}_1(\boldsymbol{A})\psi_2(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\psi_2(\boldsymbol{A})\tilde{\psi}_1(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}'+\tilde{\psi}_1(\boldsymbol{A})\psi_2(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}''=\boldsymbol{0}。$$

因爲 $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 中任一向量，故知乘積 $\tilde{\psi}_1(\lambda)\psi_2(\lambda)$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的化零多項式，因而可以被 $\psi(\lambda)=\psi_1(\lambda)\psi_2(\lambda)$ 所除盡；換句話說，$\tilde{\psi}_1(\lambda)$ 爲 $\psi_1(\lambda)$ 所除盡。但 $\tilde{\psi}_1(\lambda)$ 是 $\boldsymbol{I}_1$ 的任一化零多項式，而 $\psi_1(\lambda)$ 是這些化零多項式中的某一個（由 $\boldsymbol{I}_1$ 的定義）。這就說明了，$\psi_1(\lambda)$ 是 $\boldsymbol{I}_1$ 的最小多項式。全相類似的，可以證明 $\psi_2(\lambda)$ 是不變子空間 $\boldsymbol{I}_2$ 的最小多項式。

定理已經完全證明。

分解多項式 $\psi(\lambda)$ 爲域 K 上不可約因式的乘積：

$$\psi(\lambda)=[\varphi_1(\lambda)]^{c_1}[\varphi_2(\lambda)]^{c_2}\cdots[\varphi_s(\lambda)]^{c_s} \tag{14}$$

（此處 $\varphi_1(\lambda)$，$\varphi_2(\lambda)$，…，$\varphi_s(\lambda)$ 是首項係數爲 1 的域 K 上各不相同的不可約多項式）。那末根據已經證明的定理

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}_1+\boldsymbol{I}_2+\cdots+\boldsymbol{I}_s, \tag{15}$$

其中 $\boldsymbol{I}_k$ 是有最小多項式 $[\varphi_k(\lambda)]^{c_k}$ 的不變子空間（$k=1, 2, \cdots, s$）。

這樣一來，所證明的定理把任一空間中線性運算子的性狀的研究化爲最小多項式是 K 上不可約多項式的冪次的空間中這一線性運算子性狀的研究。這一情況可以用來證明次之重要的命題：

定理 2. 在空間中，常有這樣的向量存在，其最小多項式與空間的最小多項式重合。

證明 首先討論這樣的特殊情形，空間 $\boldsymbol{R}$ 的最小多項式是 K 上不可約多項式 $\varphi(\lambda)$ 的冪次：

$$\psi(\lambda)=[\varphi(\lambda)]^l。$$

在 $\boldsymbol{R}$ 中取基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$。向量 $\boldsymbol{e}_i$ 的最小多項式是多項式 $\psi(\lambda)$ 的因子，故可表爲 $[\varphi(\lambda)]^{l_i}$ 的形狀，其中 $l_i \leqslant l (i=1, 2, \cdots, n)$。

但空間的最小多項式是基底向量的最小多項式的最小公倍式，亦卽 $\psi(\lambda)$ 與冪次 $[\varphi(\lambda)]^{l_i} (i=1, 2, \cdots, n)$ 中的最高冪相同。換句話說，$\psi(\lambda)$ 與基底向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 中某一個的最小多項式重合。

轉移到一般的情形，我們預先證明次之引：

引　如果向量 $\boldsymbol{e}'$ 與 $\boldsymbol{e}''$ 的最小多項式彼此互質，那末向量和 $\boldsymbol{e}'+\boldsymbol{e}''$ 的最小多項式等於諸向量項的最小多項式的乘積。

證明　事實上，設 $\chi_1(\lambda)$ 與 $\chi_2(\lambda)$ 各爲向量 $\boldsymbol{e}'$ 與 $\boldsymbol{e}''$ 的最小多項式。由條件，$\chi_1(\lambda)$ 與 $\chi_2(\lambda)$ 互質。設 $\chi(\lambda)$ 爲向量 $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}'+\boldsymbol{e}''$ 的任一化零多項式。那末

$$\chi_2(\boldsymbol{A})\chi(\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}' = \chi_2(\boldsymbol{A})\chi(\boldsymbol{A})\boldsymbol{e} - \chi(\boldsymbol{A})\chi_2(\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}'' = \boldsymbol{0},$$

亦卽 $\chi_2(\lambda)\chi(\lambda)$ 是 $\boldsymbol{e}'$ 的化零多項式。故知 $\chi_2(\lambda)\chi(\lambda)$ 爲 $\chi_1(\lambda)$ 所除盡。因 $\chi_1(\lambda)$ 與 $\chi_2(\lambda)$ 互質，故 $\chi(\lambda)$ 爲 $\chi_1(\lambda)$ 所除盡。同理可證，$\chi(\lambda)$ 爲 $\chi_2(\lambda)$ 所除盡。但 $\chi_1(\lambda)$ 與 $\chi_2(\lambda)$ 互質，故 $\chi(\lambda)$ 爲乘積 $\chi_1(\lambda)\chi_2(\lambda)$ 所除盡。所以向量 $\boldsymbol{e}$ 的任一化零多項式都被化零多項式 $\chi_1(\lambda)\chi_2(\lambda)$ 所除盡。因此，$\chi_1(\lambda)\chi_2(\lambda)$ 是向量 $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}'+\boldsymbol{e}''$ 的最小多項式。

回到定理 2。爲了證明一般的情形，我們應用分解式(15)。因爲子空間 $\boldsymbol{I}_1, \boldsymbol{I}_2, \cdots, \boldsymbol{I}_s$ 的最小多項式都是不可約多項式的冪次，所以對於這些多項式，我們的命題已經證明。故有這樣的向量 $\boldsymbol{e}' \in \boldsymbol{I}_1, \boldsymbol{e}'' \in \boldsymbol{I}_2, \cdots, \boldsymbol{e}^{(s)} \in \boldsymbol{I}_s$ 存在，其最小多項式各爲 $[\varphi_1(\lambda)]^{c_1}, [\varphi_2(\lambda)]^{c_2}, \cdots, [\varphi_s(\lambda)]^{c_s}$。由引知向量 $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}'+\boldsymbol{e}''+\cdots+\boldsymbol{e}^{(s)}$ 的最小多項式等於乘積 $[\varphi_1(\lambda)]^{c_1} \cdot [\varphi_2(\lambda)]^{c_2} \cdots [\varphi_s(\lambda)]^{c_s}$，亦卽等於空間 $\boldsymbol{R}$ 的最小多項式。

§3. 等餘式．商空間

設給予某一子空間 $\boldsymbol{I} \subset \boldsymbol{R}$。我們說，$\boldsymbol{R}$ 中兩個向量 $\boldsymbol{x}$ 與 $\boldsymbol{y}$ 對模 $\boldsymbol{I}$ 等餘，且寫爲 $\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{y} \pmod{\boldsymbol{I}}$ 的充分必要條件是 $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{I}$。容易驗證，

這樣引進來的等餘式概念有次諸性質：對於任何 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}\in\boldsymbol{R}$

1. $\boldsymbol{x}\equiv\boldsymbol{x}(\bmod \boldsymbol{I})$（等餘式的反身性）；

2. 由 $\boldsymbol{x}\equiv\boldsymbol{y}(\bmod \boldsymbol{I})$ 得出 $\boldsymbol{y}\equiv\boldsymbol{x}(\bmod \boldsymbol{I})$（等餘式的可逆性或對稱性）；

3. 由 $\boldsymbol{x}\equiv\boldsymbol{y}(\bmod \boldsymbol{I})$ 與 $\boldsymbol{y}\equiv\boldsymbol{z}(\bmod \boldsymbol{I})$ 得出 $\boldsymbol{x}\equiv\boldsymbol{z}(\bmod \boldsymbol{I})$（等餘式的遞推性）。

等餘式的這三個性質的存在給予了把整個向量空間來分類的可能性，在每一類中的向量都是兩兩對模 $\boldsymbol{I}$ 等餘（不同的類中向量對模 $\boldsymbol{I}$ 不相等餘）。含有向量 $\boldsymbol{x}$ 的類記爲 $\hat{\boldsymbol{x}}$[1]。子空間 $\boldsymbol{I}$ 本身爲這些類中的一個，是即類 $\hat{\boldsymbol{0}}$。我們注意，每一個等餘式 $\boldsymbol{x}\equiv\boldsymbol{y}(\bmod \boldsymbol{I})$ 對應於對應類的等式[2]：$\hat{\boldsymbol{x}}=\hat{\boldsymbol{y}}$。

很容易證明，等餘式可以逐項相加且可逐項乘以 K 中的數：

1. 由 $\boldsymbol{x}\equiv\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{y}\equiv\boldsymbol{y}'(\bmod \boldsymbol{I})$ 得出 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\equiv\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{y}'(\bmod \boldsymbol{I})$。

2. 由 $\boldsymbol{x}\equiv\boldsymbol{x}'(\bmod \boldsymbol{I})$ 得出 $\alpha\boldsymbol{x}\equiv\alpha\boldsymbol{x}'(\bmod \boldsymbol{I})$ $(\alpha\in K)$。

等餘式的這些性質說明了，加法與 K 中數乘運算並不"割裂"諸類。如果取兩個類 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 與 $\hat{\boldsymbol{y}}$ 且把第一類中元素 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}'$, … 的任何一個與第二類中元素 $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}'$, … 的任何一個相加，那末所有這樣得出的和都屬於同一個類，我們稱之爲類 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 與 $\hat{\boldsymbol{y}}$ 的和且記之爲 $\hat{\boldsymbol{x}}+\hat{\boldsymbol{y}}$。同理，如果乘類 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 中所有向量 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}'$,…以數 $\alpha\in K$，那末所得出的乘積都屬於同一個類，記之以 $\alpha\hat{\boldsymbol{x}}$。

這樣一來，在所有類 $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$,…的集合 $\hat{\boldsymbol{R}}$ 中引進了兩個運算："加法"與對 K 中數的"乘法"。對於這些運算，很容易驗證其含有向量空間定義中所述的一切性質（第三章，§1）。所以 $\hat{\boldsymbol{R}}$，與 $\boldsymbol{R}$ 一樣，是一個域 K 上向量空間。我們稱 $\hat{\boldsymbol{R}}$ 爲關於 $\boldsymbol{R}$ 的商空間。如果 n, m, $\hat{n}$ 各爲空間 $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{I}$, $\hat{\boldsymbol{R}}$ 的維數，那末 $\hat{n}=n-m$。

[1] 因爲每一個類中都含有無窮多個向量，所以由於這一條件他是表示一個無窮集合。

[2] 是即重合。

所有在這一節中所引進來的概念可以次例來做一個很好的說明。

例

設 $\boldsymbol{R}$ 爲三維空間全部向量的集合，K 爲實數域。爲了更明顯起見，表向量爲由原點 O 引出的有向線段。設 $\boldsymbol{I}$ 爲經過 O 的某一直線（更眞確的說：是在一條通過 O 的直線上的全部向量集合；圖 4）。

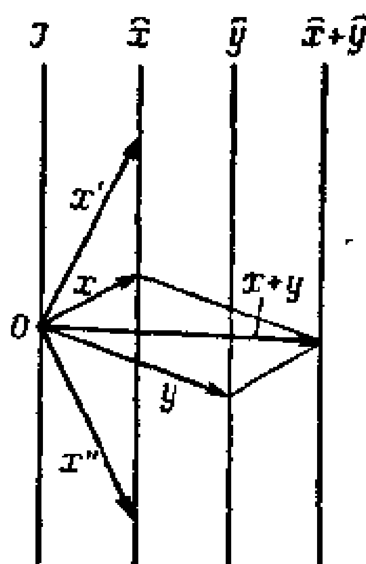


圖 4

等餘式 $\boldsymbol{x}\equiv\boldsymbol{x}'(\bmod \boldsymbol{I})$ 表示向量 $\boldsymbol{x}$ 與 $\boldsymbol{x}'$ 差一個 $\boldsymbol{I}$ 中的向量，亦即含有 $\boldsymbol{x}$ 與 $\boldsymbol{x}'$ 的末端且與直線 $\boldsymbol{I}$ 平行的線段。所以類 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 表示經過向量 $\boldsymbol{x}$ 的末端且與 $\boldsymbol{I}$ 平行的直線，更眞確的說，是由 O 引出的"一叢"向量，其末端都在這一直線上。諸"叢"可以相加且可與實數相乘（爲在這些叢中向量的相加與對數乘所確定）。這些"叢"是商空間 $\hat{\boldsymbol{R}}$ 的元素。在這個例子裏面 $n=3$, $m=1$, $\hat{n}=2$。

我們可以得出另一例子，如果取經過 O 點的平面作爲 $\boldsymbol{I}$。對於這一個例子有 $n=3$, $m=2$, $\hat{n}=1$。

現在設在 $\boldsymbol{R}$ 中給予線性運算子 $\boldsymbol{A}$。且設 $\boldsymbol{I}$ 是對 $\boldsymbol{A}$ 不變的子空間。讀者很容易證明，由 $\boldsymbol{x}\equiv\boldsymbol{x}'(\bmod \boldsymbol{I})$ 得出 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\equiv\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}'(\bmod \boldsymbol{I})$，亦即在等餘式的兩節可以應用運算子 $\boldsymbol{A}$。換句話說，如果對某一類 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 中所有向量 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}'$,…施行運算子 $\boldsymbol{A}$，那末所得出的向量 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}'$, … 亦都屬於同一個類中，我們記這一個類以 $\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}$。線性運算子 $\boldsymbol{A}$ 變類爲類，故爲 $\hat{\boldsymbol{R}}$ 中的線性運算子。

我們說，向量 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$,…, $\boldsymbol{x}_p$ 對模 $\boldsymbol{I}$ 線性相關，如果在 K 中有不全等於零的這樣的數 α_1, α_2, …, α_p 存在，使得

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\alpha_p\boldsymbol{x}_p\equiv 0(\bmod \boldsymbol{I})。\tag{16}$$

我們注意，不但關於線性相關的概念，而在這一章中以前諸節中所引進來的所有概念，命題與推理，都可以逐字重述，祇不過代換所有的＝號以符號≡(mod $\boldsymbol{I}$)，其中 $\boldsymbol{I}$ 爲某一個對 A 不變的固定子空間。

這樣一來，引進了空間的，向量的對模 $\boldsymbol{I}$ 的化零多項式，最小多項式諸概念。所有這些概念我們都稱爲"相對的"以區別於早先所引進的"絕對的"概念（對符號＝才有意義）。

讀者注意，相對的最小多項式(向量的，空間的)除盡絕對的最小多項式。例如設 $\sigma_1(\lambda)$ 爲向量 $\boldsymbol{x}$ 的相對的最小多項式，而 $\sigma(\lambda)$ 爲其對應的絕對的最小多項式。

那末 $$\sigma(A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0};$$
但由此可得: $$\sigma(A)\boldsymbol{x}\equiv\boldsymbol{0}\,(\mathrm{mod}\ \boldsymbol{I})。$$

故 $\sigma(\lambda)$ 爲向量 $\boldsymbol{x}$ 的相對的化零多項式，因而可爲相對的最小多項式 $\sigma_1(\lambda)$ 所除盡。

平行於以上諸節中"絕對的"命題我們有"相對的"命題。例如，我們有命題:"在任一空間中，常有這樣的向量存在，其相對的最小多項式與整個空間的相對的最小多項式重合"。

所有"相對的"命題的真確性是建立於對模 $\boldsymbol{I}$ 的等餘式的運算上，主要的是我們所處理的等式不是在空間 $\boldsymbol{R}$ 裏面，而是在空間 $\widehat{\boldsymbol{R}}$ 裏面。

§4. 一個空間對於循環不變子空間的分解式

設 $\sigma(\lambda)=\lambda^p+\alpha_1\lambda^{p-1}+\cdots+\alpha_{p-1}\lambda+\alpha_p$ 是向量 $\boldsymbol{e}$ 的最小多項式。那末向量

$$\boldsymbol{e},\ A\boldsymbol{e},\cdots,\ A^{p-1}\boldsymbol{e} \tag{17}$$

線性無關，而且

$$A^p\boldsymbol{e}=-\alpha_p\boldsymbol{e}-\alpha_{p-1}A\boldsymbol{e}-\cdots-\alpha_1A^{p-1}\boldsymbol{e}\,。\tag{18}$$

向量(17)構成某一個 p 維子空間 $\boldsymbol{I}$ 的基底。這一子空間稱爲循環的。記住其有特殊性狀基底(17)與等式(18)❶。運算子 A 把(17)中的第一個向量變爲第二個，第二個變爲第三個，諸如此類。基底向量中最後一個經運算子 A 變爲等式(18)所寫出的基底向量的一個線性組合。這樣一來，運算子 A 變任一基底向量爲 $\boldsymbol{I}$ 中的一個向量；這就表示他

❶ 眞確的應稱這一個子空間爲對於線性運算子 A 循環的。但是因爲所有的理論都是對於一個運算子 A 來構成的，我們爲了簡便起見删去"對於線性運算子 A"諸字(參考本章§1中第一個足註中類似的註釋)。

變 I 中任一向量爲 I 中的一個向量。換句話說，循環子空間常對 A 不變。

任一向量 $x \in I$ 可表爲基底向量 (17) 的線性組合，亦即爲次之形狀：

$$x = \chi(A)e, \tag{19}$$

其中 $\chi(\lambda)$ 爲係數在 K 中次數 $\leqslant p-1$ 的 λ 的多項式。考查所有可能的係數在 K 中次數 $\leqslant p-1$ 的多項式 $\chi(\lambda)$，我們得出 I 中的所有向量而且每一個向量 $x \in I$ 祇表出一次，亦即祇對應於一個多項式 $\chi(\lambda)$。記住基底(17)或公式(19)，我們說，向量 e 產生子空間 I。

我們還要注意，向量 e 的最小多項式就是他所產生的整個子空間 I 的最小多項式。

我們立即來建立全部理論的基本問題，由此分解空間 R 爲循環子空間。

設 $\psi_1(\lambda) = \psi(\lambda) = \lambda^m + \alpha_1\lambda^{m-1} + \cdots + \alpha_m$ 是空間 R 的最小多項式。那末在空間中有向量 e 存在，以這一個多項式爲其最小多項式（本章，§ 2，定理 2）。設以 I_1 記有基底

$$e,\ Ae,\ \cdots,\ A^{m-1}e \tag{20}$$

的循環子空間。

如果 $n = m$，那末 $R = I_1$。設 $n > m$ 且設多項式

$$\psi_2(\lambda) = \lambda^p + \beta_1\lambda^{p-1} + \cdots + \beta_p$$

爲空間 R 對模 I_1 的最小多項式。按照在 § 3 末尾所述的註釋，$\psi_2(\lambda)$ 是 $\psi_1(\lambda)$ 的因式，亦即有這樣的多項式 $\varkappa(\lambda)$ 存在，使得

$$\psi_1(\lambda) = \psi_2(\lambda)\varkappa(\lambda)。 \tag{21}$$

再者，在 R 中有向量 g^* 存在，其相對的最小多項式爲 $\psi_2(\lambda)$。那末

$$\psi_2(A)g^* \equiv 0 \pmod{I_1}, \tag{22}$$

亦即有次數 $\leqslant m-1$ 的這樣的多項式 $\chi(\lambda)$ 存在，使得

$$\psi_2(\boldsymbol{A})\boldsymbol{g}^*=\chi(\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}\ 。\tag{23}$$

在這個等式的兩節應用運算子 $\varkappa(\boldsymbol{A})$。那末由(21),在其左節得出 $\psi_1(\boldsymbol{A})\boldsymbol{g}^*$, 亦即零向量，因為 $\psi_1(\lambda)$是整個空間的絕對的最小多項式；故有

$$\varkappa(\boldsymbol{A})\chi(\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}=\boldsymbol{0}\ 。$$

這個等式證明了乘積 $\varkappa(\lambda)\chi(\lambda)$是向量 $\boldsymbol{e}$ 的化零多項式，因而爲最小多項式 $\psi_1(\lambda)=\varkappa(\lambda)\psi_2(\lambda)$所除盡，亦即 $\chi(\lambda)$爲 $\psi_2(\lambda)$所除盡：

$$\chi(\lambda)=\varkappa_1(\lambda)\psi_2(\lambda),\tag{24}$$

其中 $\varkappa_1(\lambda)$ 爲某一多項式。利用多項式 $\chi(\lambda)$ 的這一分解式，我們可以寫等式(23)爲：

$$\psi_2(\boldsymbol{A})\,[\boldsymbol{g}^*-\varkappa_1(\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}]=\boldsymbol{0}\ 。\tag{25}$$

在討論中引進向量

$$\boldsymbol{g}=\boldsymbol{g}^*-\varkappa_1(\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}\ 。\tag{26}$$

那末等式(25)可以寫爲：

$$\psi_2(\boldsymbol{A})\boldsymbol{g}=\boldsymbol{0}\ 。\tag{27}$$

最後的等式證明了 $\psi_2(\lambda)$是向量 $\boldsymbol{g}$ 的絕對的化零多項式，故可爲向量 $\boldsymbol{g}$ 的絕對的最小多項式所除盡。另一方面，由(26)得：

$$\boldsymbol{g}\equiv\boldsymbol{g}^*\ \ (\mathrm{mod}\ \boldsymbol{I}_1)。\tag{28}$$

這個式子表示 $\psi_2(\lambda)$是 $\boldsymbol{g}^*$ 因而亦是 $\boldsymbol{g}$ 的相對的最小多項式。比較剛才所說的兩個結論，就得出次之結果：$\psi_2(\lambda)$是向量 $\boldsymbol{g}$ 的相對的同時又是絕對的最小多項式。

因爲 $\psi_2(\lambda)$是向量 $\boldsymbol{g}$ 的絕對的最小多項式，故知有基底

$$\boldsymbol{g},\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{g},\cdots,\ \boldsymbol{A}^{p-1}\boldsymbol{g}\tag{29}$$

的子空間 $\boldsymbol{I}_2$ 是循環的。

由於 $\psi_2(\lambda)$是向量 $\boldsymbol{g}$ 對模 $\boldsymbol{I}_1$ 的相對的最小多項式，推知向量(29)對模 $\boldsymbol{I}_1$ 線性無關，亦即沒有一個係數不全等於零的向量(29)的線性組合，可以等於向量(20)的線性組合。因爲(20)中諸向量線性無關，所以

我們剛才的論斷表示次諸向量

$$e, Ae, \cdots, A^{m-1}e; g, Ag, \cdots, A^{p-1}g \tag{30}$$

的線性無關性。

向量(30)構成 $m+p$ 維不變子空間 I_1+I_2 的基底。

如果 $n=m+p$，那末 $R=I_1\dotplus I_2$。如果 $n>m+p$，那末我們來討論 R 模 I_1+I_2，再行繼續我們的方法來分出循環不變子空間。因爲空間 R 是有限維的，其維數爲 n，所以這一方法必須停止於某一子空間 I_t，其中 $t\leqslant n$。

我們得到次之定理：

定理 3（關於分解空間爲不變子空間的第二定理）常可分解空間爲各有最小多項式 $\psi_1(\lambda), \psi_2(\lambda), \cdots, \psi_t(\lambda)$ 且對已予線性運算子 A 循環的子空間 $I_1, I_2, \cdots, I_t$：

$$R=I_1+I_2+\cdots+I_t \tag{31}$$

而且使得 $\psi_1(\lambda)$ 與整個空間的最小多項式重合，每一個 $\psi_i(\lambda)$ 都是 $\psi_{i-1}(\lambda)$ 的因子 $(i=2, 3, \cdots, t)$。

現在我們來提出循環空間的某些性質。設 R 爲 n 維循環空間，$\psi(\lambda)=\lambda^m+\cdots$ 爲這一空間的最小多項式。那末由循環空間的定義知有 $m=n$。反之，設給予任一空間 R 且已知 $m=n$。應用所證明的分解定理，我們表 R 爲(31)的形狀。但因 I_1 的最小多項式與整個空間的最小多項式重合，知循環子空間 I_1 的維數等於 m。由條件 $m=n$ 得出 $R=$ $=I_1$，亦卽 R 是一個循環子空間。

這樣一來，得出了次之空間循環性的判定：

定理 4. 空間是循環的充分必要條件是他的維數與其最小多項式的次數相同。

現在假設循環空間 R 有對兩個不變子空間 I_1 與 I_2 的分解式：

$$R=I_1+I_2。 \tag{32}$$

以 n, n_1, n_2 各記空間 R、I_1 與 I_2 的維數，以 $\psi(\lambda), \psi_1(\lambda)$ 與 $\psi_2(\lambda)$

記這些空間的最小多項式,以 m, m_1 與 m_2 記這些最小多項式的次數。那末

$$m_1 \leqslant n_1, \quad m_2 \leqslant n_2。 \tag{33}$$

把這兩個不等式逐項相加,得:

$$m_1 + m_2 \leqslant n_1 + n_2。 \tag{34}$$

因為 $\psi(\lambda)$ 是多項式 $\psi_1(\lambda)$ 與 $\psi_2(\lambda)$ 的最小公倍式,所以

$$m \leqslant m_1 + m_2。 \tag{35}$$

此外,由(32)得出:

$$n = n_1 + n_2。 \tag{36}$$

(34),(35)與(36)給予我們一串關係

$$m \leqslant m_1 + m_2 \leqslant n_1 + n_2 = n。 \tag{37}$$

由於空間 $\boldsymbol{R}$ 的循環性,知在這一串關係式兩端的數 m 與 n,彼此相等。故在這一串關係式中,祇能取等號,亦即

$$m = m_1 + m_2 = n_1 + n_2。$$

因為 $m = m_1 + m_2$,知 $\psi_1(\lambda)$ 與 $\psi_2(\lambda)$ 互質。

由 $m_1 + m_2 = n_1 + n_2$ 與(33)式,知有

$$m_1 = n_1, \quad m_2 = n_2。 \tag{38}$$

這些等式說明子空間 $\boldsymbol{I}_1$ 與 $\boldsymbol{I}_2$ 的循環性。

這樣一來,我們得到次之論斷:

定理 5. 循環空間祇能分解為這樣的不變子空間,1° 他們都是循環的,2° 且有互質的最小多項式。

類似的推理(從相反的次序來進行)證明定理 5 是可逆的。

定理 6. 如果能分解空間為不變子空間,而且他們 1° 是循環的,2° 且有互質的最小多項式,那末原來的空間是循環的。

現在設 $\boldsymbol{R}$ 是循環空間且其最小多項式是域 K 中不可約多項式的冪次:$\psi(\lambda) = [\varphi(\lambda)]^c$。在這一情形 $\boldsymbol{R}$ 中任一不變子空間的最小多項式亦為這個不可約多項式 $\varphi(\lambda)$ 的冪次。所以任何兩個不變子空間的

最小多項式不可能互質。故由所證明的論斷知 $\boldsymbol{R}$ 不能分解為幾個不變子空間。

相反的，設某一空間 $\boldsymbol{R}$ 不能分解為幾個不變子空間。那末 $\boldsymbol{R}$ 是一個循環空間，否則他就可以利用第二分解定理分解為幾個循環子空間；再者，$\boldsymbol{R}$ 的最小多項式必須是不可約多項式的冪次，因為在相反的情形由第一分解定理 $\boldsymbol{R}$ 就可以分解為幾個不變子空間。

這樣一來，我們得到次之結果：

定理 7. 空間不能分解為幾個不變子空間的充分必要條件是，1° 他是循環的，2° 他的最小多項式是域 K 中不可約多項式的冪次。

現在回到分解式(31)且把循環子空間 $\boldsymbol{I}_1, \boldsymbol{I}_2, \cdots, \boldsymbol{I}_t$ 的最小多項式 $\psi_1(\lambda), \psi_2(\lambda), \cdots, \psi_t(\lambda)$ 分解為域 K 中不可約因式的乘積：

$$\left.\begin{aligned} \psi_1(\lambda) &= [\varphi_1(\lambda)]^{c_1}[\varphi_2(\lambda)]^{c_2}\cdots[\varphi_s(\lambda)]^{c_s}, \\ \psi_2(\lambda) &= [\varphi_1(\lambda)]^{d_1}[\varphi_2(\lambda)]^{d_2}\cdots[\varphi_s(\lambda)]^{d_s}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \psi_t(\lambda) &= [\varphi_1(\lambda)]^{l_1}[\varphi_2(\lambda)]^{l_2}\cdots[\varphi_s(\lambda)]^{l_s} \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

$$(c_k \geqslant d_k \geqslant \cdots \geqslant l_k \geqslant 0;\ k=1, 2, \cdots, s)$$ ❶。

應用第一分解定理於 $\boldsymbol{I}_1$，我們得出：

$$\boldsymbol{I}_1 = \boldsymbol{I}_1' + \boldsymbol{I}_1'' + \cdots + \boldsymbol{I}_1^{(s)},$$

其中 $\boldsymbol{I}_1', \boldsymbol{I}_1'', \cdots, \boldsymbol{I}_1^{(s)}$ 為各有最小多項式 $[\varphi_1(\lambda)]^{c_1}$, $[\varphi_2(\lambda)]^{c_2}$, $\cdots$, $[\varphi_s(\lambda)]^{c_s}$ 的循環子空間。類似的來分解子空間 $\boldsymbol{I}_2, \cdots, \boldsymbol{I}_t$。這樣，我們得出整個空間 $\boldsymbol{R}$ 的一個分解式，分解為有最小多項式 $[\varphi_k(\lambda)]^{c_k}$, $[\varphi_k(\lambda)]^{d_k}$, $\cdots$, $[\varphi_k(\lambda)]^{l_k}$ $(k=1, 2, \cdots, s)$ 的諸循環子空間(此處要捨棄對於方次等於零的諸冪次)。由定理 7，知道這些循環子空間已經不能再行分解(為幾個不變子空間)。我們得到次之定理：

定理 8.（關於分解空間為不變子空間的第三定理） 常可分解空間為循環不變子空間

---

❶ 某些方次 $d_k, \cdots, l_k$ 當 $k>1$ 時可能等於零。

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}'+\boldsymbol{I}''+\cdots+\boldsymbol{I}^{(u)} \tag{40}$$

使得這些循環子空間的每一個最小多項式都是不可約多項式的冪次。

這一定理給予了空間對不能再行分解的不變子空間的分解式。

註 我們應用前兩個分解定理來得出定理 8—— 第三分解定理。但是第三分解定理亦可以用另外的方法來得出，是卽爲定理 7 的直接推論(幾乎是毫不費力的)。

事實上，如果把空間 $\boldsymbol{R}$ 完全分解，常可分解爲不可再行分解的不變子空間：

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}'+\boldsymbol{I}''+\cdots+\boldsymbol{I}^{(u)}。$$

根據定理 7，每一項子空間都是循環的且以 K 中不可約多項式的冪次作爲他的最小多項式。

§5. 矩陣的法式

設 $\boldsymbol{I}_1$ 爲 $\boldsymbol{R}$ 中 m 維不變子空間。在 $\boldsymbol{I}_1$ 中選取基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_m$ 且補成 $\boldsymbol{R}$ 的基底：

$$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_m, \boldsymbol{e}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n。$$

我們來看一下，如何在這一基底中求出運算子 $\boldsymbol{A}$ 的矩陣 A。讀者要記得，矩陣 A 的第 k 列是向量 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_k$ $(k=1, 2, \cdots, n)$ 的坐標。當 $k\leqslant m$ 時，向量 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_k\in\boldsymbol{I}_1$ (由於 $\boldsymbol{I}_1$ 的不變性)，所以向量 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_k$ 的後 $n-m$ 個坐標全等於零。因此矩陣 A 有這樣的形式：

$$A=\begin{pmatrix} \overbrace{A_1}^{m} & \overbrace{A_3}^{n-m} \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}\begin{matrix}\}m \\ \}n-m,\end{matrix} \tag{41}$$

其中 A_1 與 A_2 各爲 m 級與 $n-m$ 級方陣，而 A_3 爲一長方矩陣。第四"塊"等於零表示子空間 $\boldsymbol{I}_1$ 的不變性。矩陣 A_1 給予 $\boldsymbol{I}_1$ 中運算子 $\boldsymbol{A}$ (當其基底爲 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_m$ 時)。

現在假設 $\boldsymbol{e}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 亦是某一不變子空間 $\boldsymbol{I}_2$ 的基底，亦卽 $\boldsymbol{R}=$

$=\boldsymbol{I}_1+\boldsymbol{I}_2$ 而整個空間的基底是由不變子空間 $\boldsymbol{I}_1$ 與 $\boldsymbol{I}_2$ 的兩部分基底所構成的。那末，顯然在(41)中，塊 A_3 須等於零而矩陣 A 有準對角形

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix}=\{A_1,\ A_2\},\tag{42}$$

其中 A_1 與 A_2 各爲 m 級與 $n-m$ 級方陣，給予子空間 $\boldsymbol{I}_1$ 與 $\boldsymbol{I}_2$ 中的運算子(各對於基底 $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_m$ 與 $\boldsymbol{e}_{m+1},\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_n$)。不難看出，相反的，準對角形矩陣常對應於空間對不變子空間的一個分解式(此處整個空間的基底爲子空間的基底所構成)。

由於第二分解定理我們可以分解整個空間 $\boldsymbol{R}$ 爲諸循環子空間 $\boldsymbol{I}_1$，$\boldsymbol{I}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{I}_t$:

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}_1+\boldsymbol{I}_2+\cdots+\boldsymbol{I}_t。\tag{43}$$

在這些子空間的最小多項式序列 $\psi_1(\lambda),\ \psi_2(\lambda),\cdots,\ \psi_t(\lambda)$ 中，每一個多項式都除盡其前一個(故已自動的得出，第一個多項式是整個空間的最小多項式)。

設

$$\left.\begin{array}{l}\psi_1(\lambda)=\lambda^m+\alpha_1\lambda^{m-1}+\cdots+\alpha_m,\\ \psi_2(\lambda)=\lambda^p+\beta_1\lambda^{p-1}+\cdots+\beta_p,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \psi_t(\lambda)=\lambda^v+\varepsilon_1\lambda^{v-1}+\cdots+\varepsilon_v\\ \qquad(m\geqslant p\geqslant\cdots\geqslant v)。\end{array}\right\}\tag{44}$$

以 $\boldsymbol{e},\ \boldsymbol{g},\ \cdots,\ \boldsymbol{e}$ 記產生子空間 $\boldsymbol{I}_1,\ \boldsymbol{I}_2,\cdots,\ \boldsymbol{I}_t$ 的向量，且以諸循環子空間的基底來構成整個空間 $\boldsymbol{R}$ 的基底:

$$\begin{array}{l}\boldsymbol{e},\ A\boldsymbol{e},\cdots,\ A^{m-1}\boldsymbol{e};\ \boldsymbol{g},\ A\boldsymbol{g},\cdots,\\ A^{p-1}\boldsymbol{g};\ \cdots;\ \boldsymbol{l},\ A\boldsymbol{l},\cdots,\ A^{v-1}\boldsymbol{l}。\end{array}\tag{45}$$

我們來看一下，在這一基底中，對應於運算子 A 的矩陣 L_1 是怎樣的。

有如本節開始時所已說明，矩陣 L_1 應當有準對角形的形式

$$L_I=\begin{pmatrix} L_1 & 0\cdots 0 \\ 0 & L_2\cdots 0 \\ \cdots & \cdots \\ 0 & 0\cdots L_t \end{pmatrix}。\tag{46}$$

矩陣 L_1 當基底為 $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}$, $\cdots$, $\boldsymbol{e}_m=\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{e}$ 時對應 I_1 中運算子 $\boldsymbol{A}$。回憶一下在所予基底中對於所予運算子來構成矩陣的規則（第三章，§6），我們得出：

$$L_1=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -\alpha_m \\ 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -\alpha_{m-1} \\ 0 & 1 & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -\alpha_1 \end{Vmatrix}。\tag{47}$$

同理

$$L_2=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -\beta_m \\ 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -\beta_{m-1} \\ 0 & 1 & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & 0 & -\beta_2 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -\beta_1 \end{Vmatrix}。\tag{48}$$

計算矩陣 L_1, L_2, $\cdots$, L_t 的特徵多項式，我們得出：

$$|\lambda E-L_1|=\psi_1(\lambda),\ |\lambda E-L_2|=\psi_2(\lambda),\cdots,\ |\lambda E-L_t|=\psi_t(\lambda)$$

（對於循環子空間，運算子 $\boldsymbol{A}$ 的特徵多項式與關於這個運算子的子空間的最小多項式重合）。

矩陣 L_I 在"標準"基底(45)中對應於運算子 $\boldsymbol{A}$。如果 A 是在任一基底中對應於運算子 $\boldsymbol{A}$ 的矩陣，那末矩陣 A 與矩陣 L_I 相似，亦即有這樣的滿秩矩陣 T 存在，使得

$$A=TL_IT^{-1}。\tag{49}$$

至於矩陣 L_{I} 我們說他是第一種自然法式。第一種自然法式爲次諸特徵所決定

(1)準對角形的形狀(46),

(2)對角線上諸塊(47),(48)等等的特殊結構,

(3)補充條件：每一對角線上子塊的特徵多項式爲其次一子塊的特徵多項式所除盡。

相類似的,如果我們不從第二分解定理而從第三分解定理出發,那末在對應的基底中,運算子 $\boldsymbol{A}$ 對應於矩陣 L_{II},他是第二種自然法式,爲次諸特徵所決定:

(1)準對角形的形狀

$$L_{\mathrm{II}}=\{L_1, L_2, \cdots, L_u\},$$

(2)對角線上諸塊(47),(48)等等的特殊結構,

(3)補充條件:每一子塊的特徵多項式都是域 K 中不可約多項式的冪次。

在次節中我們將證明,在對應於同一運算子的相似矩陣類中,祇有一個有第一種自然法式[1]的矩陣存在,亦祇有一個有第二種自然法式[2]的矩陣存在。我們還要給予從矩陣 A 的元素來求出多項式 $\psi_1(\lambda)$, $\psi_2(\lambda),\cdots,\psi_t(\lambda)$ 的演段。這些多項式的知識給予我們以可能性來計算出矩陣 L_{I} 與 L_{II} 的所有元素,這兩個矩陣是與矩陣 A 相似的第一種與第二種自然法式。

§6. 不變因式．初級因子

1[3]. 以 $D_p(\lambda)$ 記特徵矩陣 $A_\lambda=\lambda E-A$ 中所有 p 級子式的最大公

[1] 這並不表示祇有一個(45)形標準基底存在。標準基底可能有許多個,但都對應於同一矩陣 L_{I}。

[2] 不計對角線上諸子塊的先後次序。

[3] 在本節第一部分中對於特徵矩陣重復第六章 §3 中對於任意多項式矩陣所建立的基本概念。

因式($p=1, 2, \cdots, n$)❶。因為在序列

$$D_n(\lambda), D_{n-1}(\lambda), \cdots, D_1(\lambda)$$

中,每一個多項式都被其後一個所除盡,所以諸式

$$i_1(\lambda)=\frac{D_n(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)},$$

$$i_2(\lambda)=\frac{D_{n-1}(\lambda)}{D_{n-2}(\lambda)}, \cdots,$$

$$i_n(\lambda)=\frac{D_1(\lambda)}{D_0(\lambda)}(D_0(\lambda)\equiv 1) \tag{50}$$

確定 n 個多項式,他們的乘積等於特徵多項式

$$\Delta(\lambda)=|\lambda E-A|=D_n(\lambda)=i_1(\lambda)i_2(\lambda)\cdots i_n(\lambda)。 \tag{51}$$

分解多項式 $i_p(\lambda)$ ($p=1, 2, \cdots, n$)為域 K 中不可約因式的乘積:

$$i_p(\lambda)=[\varphi_1(\lambda)]^{\gamma_p}[\varphi_2(\lambda)]^{\delta_p}\cdots (p=1, 2, \cdots, n), \tag{52}$$

其中 $\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda), \cdots$ 為域 K 中不同的不可約多項式。

多項式 $i_1(\lambda), i_2(\lambda), \cdots, i_n(\lambda)$ 稱為特徵矩陣 $A_\lambda=\lambda E-A$ 的或簡稱矩陣 A 的不變因式,而在 $[\varphi_1(\lambda)]^{\gamma_p}$, $[\varphi_2(\lambda)]^{\delta_p}, \cdots$ 中所有不為常數的冪次稱為其初級因子。

全部初級因子的乘積,與全部不變因式的乘積一樣,都等於特徵多項式 $\Delta(\lambda)=|\lambda E-A|$。

"不變因式"的名稱是合理的,因為兩個相似矩陣 A 與 $\widetilde{A}$

$$\widetilde{A}=T^{-1}AT \tag{53}$$

常有相同的(即不變的)不變因式

$$i_p(\lambda)=\widetilde{i}_p(\lambda) \quad (p=1, 2, \cdots, n)。 \tag{54}$$

事實上,由(53)知:

$$\widetilde{A}_\lambda=\lambda E-\widetilde{A}=T^{-1}(\lambda E-A)T=T^{-1}A_\lambda T。 \tag{55}$$

故得(參考第一章,§2)相似矩陣 A_λ 與 $\widetilde{A}_\lambda$ 的子式間的關係式:

---

❶ 在最大公因式中選取其首項係數等於1。

$$\tilde{A}_\lambda\begin{pmatrix} i_1 & i_2\cdots i_p \\ k_1 & k_2\cdots k_p\end{pmatrix} = \sum_{\substack{\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_p\\ \beta_1<\beta_2<\cdots<\beta_p}} T^{-1}\begin{pmatrix} i_1 & i_2\cdots i_p\\ \alpha_1 & \alpha_2\cdots\alpha_p\end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot A_\lambda\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\cdots\alpha_p\\ \beta_1 & \beta_2\cdots\beta_p\end{pmatrix} T\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2\cdots\beta_p\\ k_1 & k_2\cdots k_p\end{pmatrix} \quad (p=1,\ 2,\cdots,\ n)。 \tag{56}$$

這個等式證明了矩陣 A_λ 中所有 p 級子式的每一個公因式都是矩陣 $\tilde{A}_\lambda$ 中所有 p 級子式的公因式，反之亦然(因爲矩陣 A 與 $\tilde{A}$ 可以互易其地位)。因此推知：$D_p(\lambda)=\tilde{D}_p(\lambda)\ (p=1,\ 2,\cdots,\ n)$，所以(54)式成立。

因爲在各種基底中表所予運算子的所有矩陣都是彼此相似的，故有相同的不變因式，因而有相同的初級因子，所以我們可以述及運算子 $\boldsymbol{A}$ 的不變因式與初級因子。

2. 現在取有第一種自然法式的矩陣 L_{I} 作爲 $\tilde{A}$，且從 $\tilde{A}_\lambda=\lambda E-\tilde{A}$ 形矩陣出發來計算矩陣 A 的不變因式(在陣列(57)中是對於 $m=5$, $p=4$, $q=4$, $r=3$ 的情形所寫出的矩陣)。

$$\left\|\begin{array}{ccccc|cccc|cccc|ccc}
\lambda & 0 & 0 & 0 & \alpha_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & \lambda & 0 & 0 & \alpha_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -1 & \lambda & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -1 & \lambda & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & \alpha_1+\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & \beta_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \lambda & 0 & \beta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \lambda & \beta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \beta_1+\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & \gamma_4 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \lambda & 0 & \gamma_3 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \lambda & \gamma_2 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \gamma_1+\lambda & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & \varepsilon_3\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \lambda & \varepsilon_2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \varepsilon_1+\lambda
\end{array}\right\|。 \tag{57}$$

利用拉潑拉斯定理，我們求得:

$$D_n(\lambda) = |\lambda E - \widetilde{A}| = |\lambda E - L_1|\,|\lambda E - L_2|\cdots|\lambda E - L_t| =$$
$$= \psi_1(\lambda)\psi_2(\lambda)\cdots\psi_t(\lambda)。 \tag{58}$$

轉向 $D_{n-1}(\lambda)$ 的求出。注意元素 a_{m} 的子式。如不計因子 ± 1，這一子式等於

$$|\lambda E - L_2|\cdots|\lambda E - L_t| = \psi_2(\lambda)\cdots\psi_t(\lambda)。 \tag{59}$$

我們來證明，這個 $n-1$ 級子式除盡所有其餘的 $n-1$ 級子式，因而

$$D_{n-1}(\lambda) = \psi_2(\lambda)\cdots\psi_t(\lambda)。 \tag{60}$$

爲此首先取位於對角線上諸子塊外面的元素的子式，且證明這種子式等於零。爲了得出這一子式必須在(57)形矩陣中劃去一個行與一個列。在所討論的情形，劃去的兩條線穿過對角線上兩個不同的子塊，故在這兩個子塊的每一個裏面劃去了一條線。例如，設在對角線上第 j 個子塊中劃去了一行。取含有這一個對角線上子塊的垂直長條中諸子式。在這一個長條中有 s 個列，而且除開 $s-1$ 個行以外，其餘諸行中的元素全等於零(此處我們以 s 記矩陣 A_j 的階)。根據拉潑拉斯定理，把所討論的 $n-1$ 級行列式，按照含於所指出的長條中諸 s 級子式來展開，我們證明了他必須等於零。

現在取位於對角線上某一個子塊中的元素的子式。在這一情形劃去的線祇“傷毀”對角線上一個子塊，例如第 j 個子塊，而且子式的矩陣仍然是準對角形的。因此這種子式等於

$$\psi_1(\lambda)\cdots\psi_{j-1}(\lambda)\psi_{j+1}(\lambda)\cdots\psi_t(\lambda)\chi(\lambda), \tag{61}$$

其中 $\chi(\lambda)$ 是所“傷毀的”對角線上第 j 個子塊的行列式。由於 $\psi_i(\lambda)$ 爲 $\psi_{i+1}(\lambda)$ $(i=1, 2, \cdots, t-1)$ 所除盡，乘積(61)爲乘積(59)所除盡。這樣一來，等式(60)可算已經證明。類似的推理我們得出：

$$\left.\begin{array}{l} D_{n-2}(\lambda) = \psi_3(\lambda)\cdots\psi_t(\lambda), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ D_{n-t+1}(\lambda) = \psi_t(\lambda), \\ D_{n-t}(\lambda) = \cdots = D_1(\lambda) = 1。 \end{array}\right\} \tag{62}$$

從(58),(60)與(62)我們求得:

$$\psi_1(\lambda)=\frac{D_n(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)}=i_1(\lambda),\ \psi_2(\lambda)=\frac{D_{n-1}(\lambda)}{D_{n-2}(\lambda)}=i_2(\lambda),\cdots,$$

$$\psi_t(\lambda)=\frac{D_{n-t+1}(\lambda)}{D_{n-t}(\lambda)}=i_t(\lambda),\ i_{t+1}(\lambda)=\cdots=i_n(\lambda)=1。\qquad(63)$$

(63)證明了多項式 $\psi_1(\lambda)$, $\psi_2(\lambda)$, $\cdots$, $\psi_t(\lambda)$ 與運算子 $\boldsymbol{A}$ (或其對應的矩陣 A)的不變因式除一些 1 的差別外是完全一致的。

對於所得出的結果,我們給予三種彼此相抵的說法:

定理 9.(更精密的第二分解定理)　如果在 $\boldsymbol{R}$ 中給予線性運算子 $\boldsymbol{A}$, 那末空間 $\boldsymbol{R}$ 可以分解爲諸循環子空間

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}_1+\boldsymbol{I}_2+\cdots+\boldsymbol{I}_t,$$

使得在子空間 $\boldsymbol{I}_1, \boldsymbol{I}_2, \cdots, \boldsymbol{I}_t$ 的最小多項式序列 $\psi_1(\lambda)$, $\psi_2(\lambda)$, $\cdots$, $\psi_t(\lambda)$ 中,每一個多項式爲其後一個所除盡。多項式 $\psi_1(\lambda)$, $\psi_2(\lambda)$, $\cdots$, $\psi_t(\lambda)$ 是唯一確定的:他們除一些 1 以外與運算子 $\boldsymbol{A}$ 的不變因式是一致的。

定理 9′. 對於 $\boldsymbol{R}$ 中每一個線性運算子 $\boldsymbol{A}$ 都有這樣的基底存在,在這一基底中運算子所給出的矩陣 L_{I} 是第一種自然法式。這一矩陣爲所予運算子 $\boldsymbol{A}$ 所唯一確定: L_{I} 中對角線上諸子塊的特徵多項式是運算子 $\boldsymbol{A}$ 的不變因式。

定理 9″. 在每一個相似矩陣類中(元素在 K 中),都有一個且祇有一個矩陣 L_{I} 存在爲第一種自然法式。L_{I} 中對角線上諸子塊的特徵多項式與所討論的矩陣類中任一矩陣的不變因式(除一些 1 以外)是一致的。

由(54)式我們已經知道兩個相似矩陣有相同的不變因式。現在假設,相反的,兩個元素在 K 中的矩陣 A 與 B 有相同的不變因式。因爲矩陣 L_{I} 爲所予的這些不變因式所唯一確定,所以兩個矩陣 A 與 B 都同這一個 L_{I} 相似,因而彼此相似。這樣一來,我們得到次之論斷:

定理 10. 爲了使得元素在 K 中的兩個矩陣相似的充分必要條件

是這兩個矩陣有相同的不變因式❶。

3. 運算子 $\boldsymbol{A}$ 的特徵多項式 $\Delta(\lambda)$ 與 $D_n(\lambda)$ 重合，故等於全部不變因式的乘積：

$$\Delta(\lambda)=\psi_1(\lambda)\psi_2(\lambda)\cdots\psi_t(\lambda)。\tag{64}$$

但 $\psi_1(\lambda)$ 是整個空間關於 $\boldsymbol{A}$ 的最小多項式，就是說 $\psi_1(\boldsymbol{A})=0$，故由(64)，有

$$\Delta(\boldsymbol{A})=0。\tag{65}$$

這樣一來，我們同時得出了赫密登-凱萊定理(參考第四章，§ 4)。每一個線性運算子(每一個矩陣)都適合他的特徵方程。

在 § 4 中，分解多項式 $\psi_1(\lambda), \psi_2(\lambda), \cdots, \psi_t(\lambda)$ 爲域 K 中不可約因式的乘積：

$$\begin{aligned}
&\psi_1(\lambda)=[\varphi_1(\lambda)]^{c_1}[\varphi_2(\lambda)]^{c_2}\cdots[\varphi_s(\lambda)]^{c_s},\\
&\psi_2(\lambda)=[\varphi_1(\lambda)]^{d_1}[\varphi_2(\lambda)]^{d_2}\cdots[\varphi_s(\lambda)]^{d_s},\quad \begin{pmatrix}c_k\geqslant d_k\geqslant\cdots\geqslant l_k,\\ k=1,2,\cdots,s\end{pmatrix},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\psi_t(\lambda)=[\varphi_1(\lambda)]^{l_1}[\varphi_2(\lambda)]^{l_2}\cdots[\varphi_s(\lambda)]^{l_s}
\end{aligned}\tag{66}$$

我們得到第三分解定理。在(66)式右節中每一個有非零方次的冪次對應於這一分解式中一個不變子空間。

由(63)知所有不等於 1 的冪次 $[\varphi_k(\lambda)]^{c_k}, [\varphi_k(\lambda)]^{d_k}, \cdots, [\varphi_k(\lambda)]^{l_k}$ $(k=1, 2, \cdots, s)$ 是運算子 $\boldsymbol{A}$(矩陣 A)在域 K 中的初級因子(參考本節 1)。

這樣一來，我們得到了次之第三分解定理的更精密的說法：

定理 11. 如果在域 K 上向量空間 $\boldsymbol{R}$ 中給予了線性運算子 $\boldsymbol{A}$，那末 $\boldsymbol{R}$ 可以分解爲諸循環子空間，其最小多項式是運算子 $\boldsymbol{A}$ 在域 K 中的初級因子。

設

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}'+\boldsymbol{I}''+\cdots+\boldsymbol{I}^{(u)}\tag{67}$$

是定理中所給出的分解式。以 $\boldsymbol{e}', \boldsymbol{e}'', \cdots, \boldsymbol{e}^{(u)}$ 記產生子空間 $\boldsymbol{I}', \boldsymbol{I}'', \cdots,$

❶ 或者(同樣的)有相同的在域 K 中的初級因子。

$I^{(u)}$ 的向量且從這些子空間的"循環"基底構成整個空間的基底

$$e',\ Ae',\ \cdots;\ e'',\ Ae'',\ \cdots;\ e^{(u)},\ Ae^{(u)},\ \cdots。\tag{68}$$

不難看出，在基底 (68) 中對應於運算子 A 的矩陣 L_{II}，與矩陣 L_I 一樣，有準對角形

$$L_{II}=\{L_1,\ L_2,\ \cdots,\ L_u\};\tag{69}$$

其對角線上諸子塊與矩陣 L_I 中子塊(47)，(48)等等有相同的結構。但是這些對角線上子塊的特徵多項式不是運算子 A 的不變因式而是其初級因子。矩陣 L_{II} 是第二種自然法式(參考 § 5)。

我們得到定理 11 的另一說法：

定理 11′. 對於(域 K 上) R 中每一個線性運算子 A 都有這樣的基底存在，在這一基底中所予運算子的矩陣 L_{II} 是第二種自然法式；而且其對角線上諸子塊的特徵多項式是運算子 A 在域 K 中的初級因子。

這一定理有次之矩陣的說法：

定理 11″. 元素在域 K 中的矩陣 A 常與有第二種自然法式的矩陣 L_{II} 相似，在 L_{II} 中對角線上諸子塊的特徵多項式是矩陣 A 的初級因子。

定理 11 以及與之有關的定理 11′ 與 11″ 在某種意義上是可逆的。

設
$$R=I'+I''+\cdots+I^{(u)}$$

為空間 R 對不可再行分解的不變子空間的任一分解式。那末根據定理 7，子空間 $I',\ I'',\cdots,\ I^{(u)}$ 是循環的而其最小多項式為域 K 中不可約多項式的冪次。對於這些冪次，如果必要時添上一些方次為零的冪次，可以寫為

$$\left.\begin{array}{l}[\varphi_1(\lambda)]^{c_1},\ [\varphi_2(\lambda)]^{c_2},\cdots,[\varphi_s(\lambda)]^{c_s},\\ [\varphi_1(\lambda)]^{d_1},\ [\varphi_2(\lambda)]^{d_2},\cdots,[\varphi_s(\lambda)]^{d_s},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ [\varphi_1(\lambda)]^{l_1},\ [\varphi_2(\lambda)]^{l_2},\ \cdots,\ [\varphi_s(\lambda)]^{l_s}\end{array}\right.\quad\begin{pmatrix}c_k\geqslant d_k\geqslant\cdots\geqslant l_k\geqslant 0\\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ s\end{pmatrix}^{[1]}。\tag{70}$$

[1] 在數 $l_1,\ l_2,\cdots,\ l_s$ 中至少有一個是正的。

最小多項式位於第一行的諸子空間的和，我們用 $\boldsymbol{I}_1$ 來記他。同樣的引進 $\boldsymbol{I}_2, \cdots, \boldsymbol{I}_t$ [t 爲表(70)中的行數]。按照定理 6，子空間 $\boldsymbol{I}_1, \boldsymbol{I}_2, \cdots, \boldsymbol{I}_t$ 是循環的且其最小多項式 $\psi_1(\lambda), \psi_2(\lambda), \cdots, \psi_t(\lambda)$ 爲 (66) 所確定。此處在序列 $\psi_1(\lambda), \psi_2(\lambda), \cdots, \psi_t(\lambda)$ 中每一個多項式爲其次一個所除盡。這就可以直接應用定理 9 於分解式

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}_1+\boldsymbol{I}_2+\cdots+\boldsymbol{I}_t。$$

根據這一定理

$$\psi_p(\lambda)=i_p(\lambda) \quad (p=1, 2, \cdots, n),$$

故由(66)，所有冪次(70)，其方次不爲零者，都是運算子 $\boldsymbol{A}$ 在域 K 中的初級因子。這樣一來，我們就有

定理 12. 如果(域 K 上)空間 $\boldsymbol{R}$ 用任一方法分解爲不能再行分解的諸(對 $\boldsymbol{A}$)不變子空間，那末這些子空間的最小多項式是運算子 $\boldsymbol{A}$ 在域 K 中的全部初級因子。

我們還要給予一個相抵的矩陣說法：

定理 12′. 在每一個(元素在 K 中)相似矩陣類中祇有一個(不計對角線上諸子塊的先後次序)有第二種自然法式的矩陣 L_{II} 存在；其對角線上諸子塊的特徵多項式是這一類中任一矩陣的初級因子。

設分解空間 $\boldsymbol{R}$ 爲兩個(對 $\boldsymbol{A}$)不變的子空間

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}_1+\boldsymbol{I}_2。$$

把 $\boldsymbol{I}_1$ 與 $\boldsymbol{I}_2$ 的每一個分解爲諸不能再行分解的子空間，我們就得出整個空間 $\boldsymbol{R}$ 對不能再行分解的子空間的分解式。因此，根據定理 12，我們得出：

定理 13. 如果分解 $\boldsymbol{R}$ 爲對運算子 $\boldsymbol{A}$ 不變的諸子空間，那末把在這些不變子空間的每一個中運算子 $\boldsymbol{A}$ 的初級因子合併在一處就給予了 $\boldsymbol{R}$ 中運算子 $\boldsymbol{A}$ 的全部初級因子。

這個定理有次之矩陣的說法：

定理 13′. 準對角形矩陣在域 K 中的全部初級因子可以由合併其

對角線上諸子塊的初級因子來得出。

我們常常應用定理 13′ 來實際求出矩陣的初級因子。

§7. 矩陣的若當法式

設運算子 $\boldsymbol{A}$ 的特徵多項式 $\Delta(\lambda)$ 的全部根都在域 K 中。特別的，如果 K 是全部複數的域，這一情形常能成立。

在所討論的情形，不變因式對於域 K 中初級因子的分解式可以寫爲:

$$
\begin{aligned}
i_1(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)^{c_1}(\lambda-\lambda_2)^{c_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{c_s},\\
i_2(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)^{d_1}(\lambda-\lambda_2)^{d_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{d_s},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
i_t(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)^{l_1}(\lambda-\lambda_2)^{l_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{l_s}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} c_k\geqslant d_k\geqslant\cdots\geqslant l_k\geqslant 0,\\ c_k>0;\ k=1,2,\cdots,s\end{pmatrix}。\tag{71}
$$

因爲所有不變因式的乘積等於特徵多項式 $\Delta(\lambda)$，所以(71)中的 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 是特徵多項式 $\Delta(\lambda)$ 的所有不同的根。

取任一初級因子

$$
(\lambda-\lambda_0)^p; \tag{72}
$$

此處 λ_0 是數 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 中的某一個，而 p 爲方次 $c_k, d_k, \cdots, l_k$ $(k=1, 2, \cdots, s)$ 中某一個(不等於零的)數。

這一初級因子對應於分解式(67)中一個確定的循環子空間 $\boldsymbol{I}$，且以 $\boldsymbol{e}$ 記產生這一空間的向量。$(\lambda-\lambda_0)^p$ 就爲這個向量 $\boldsymbol{e}$ 的最小多項式。

討論向量

$$
\boldsymbol{e}_1=(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E})^{p-1}\boldsymbol{e},\ \boldsymbol{e}_2=(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E})^{p-2}\boldsymbol{e},\cdots,\ \boldsymbol{e}_p=\boldsymbol{e}。\tag{73}
$$

向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_p$ 是線性無關的，因爲否則將有次數 $<p$ 的爲向量 $\boldsymbol{e}$ 的化零多項式存在，而這是不可能的。現在我們注意，

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E})\boldsymbol{e}_1=0,\ (\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E})\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_1,\cdots,\ (\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E})\boldsymbol{e}_p=\boldsymbol{e}_{p-1}。\tag{74}$$

或

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1=\lambda_0\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_2=\lambda_0\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_1,\cdots,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_p=\lambda_0\boldsymbol{e}_p+\boldsymbol{e}_{p-1}。\tag{75}$$

有了等式(75)，不難計算出對於某底(73)對應於 $\boldsymbol{I}$ 中運算子 $\boldsymbol{A}$ 的矩陣。這個矩陣有次之形狀:

$$\begin{Vmatrix}\lambda_0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdot & \cdot & \ddots & & \cdot\\ \cdot & \cdot & & \ddots & \cdot\\ \cdot & \cdot & & \ddots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_0\end{Vmatrix}=\lambda_0E^{(p)}+H^{(p)},\tag{76}$$

其中 $E^{(p)}$ 爲 p 級么矩陣，而 $H^{(p)}$ 爲一 p 級矩陣，位於其第一"上對角線"上的元素全等於 1 而其餘的元素全等於零。

適合等式(75)的線性無關的向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2,\cdots, \boldsymbol{e}_p$ 構成了所謂 $\boldsymbol{I}$ 中向量的若唐鏈。從子空間 $\boldsymbol{I}', \boldsymbol{I}'',\cdots, \boldsymbol{I}^{(u)}$ 的每一個裏面取出的若唐鏈構成 $\boldsymbol{R}$ 中若唐基底。如果現在記這些子空間的最小多項式，亦卽運算子 $\boldsymbol{A}$ 的初級因子，以

$$(\lambda-\lambda_1)^{p_1},\ (\lambda-\lambda_2)^{p_2},\ \cdots,\ (\lambda-\lambda_u)^{p_u}\tag{77}$$

(在數 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_u$ 中可能有些是相等的)，那末在若唐基底中對應於運算子 $\boldsymbol{A}$ 的矩陣 J 將有次之準對角形:

$$J=\{\lambda_1E^{(p_1)}+H^{(p_1)},\ \lambda_2E^{(p_2)}+H^{(p_2)},\cdots,\ \lambda_uE^{(p_u)}+H^{(p_u)}\}。\tag{78}$$

至於矩陣 J，我們說他是若唐法式或簡稱若唐式。如果已知運算子 $\boldsymbol{A}$ 在域 K 中的初級因子，而 K 含有特徵方程 $\Delta(\lambda)=0$ 所有的根，那末立刻可以算出矩陣 J。

任一矩陣 A 常與若唐法式矩陣 J 相似，亦卽對於任何矩陣 A，常有這樣的滿秩矩陣 $T(|T|\neq 0)$ 存在，使得

$$A=TJT^{-1}。$$

如果運算子 $\boldsymbol{A}$ 的所有初級因子都是一次的(亦祇有在這一情形)，

若唐法式是一個對角形矩陣，且在這一情形我們有：

$$A=T\{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n\}T^{-1}。$$

這樣一來，線性運算子 $\boldsymbol{A}$ 是單構的（參考第三章，§ 8）充分必要條件，是運算子 $\boldsymbol{A}$ 所有初級因子都是線性的。

給予等式(73)所定出的向量 $\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\cdots,\ \boldsymbol{e}_p$ 以相反次序的序數：

$$\boldsymbol{g}_1=\boldsymbol{e}_p=\boldsymbol{e},\ \boldsymbol{g}_2=\boldsymbol{e}_{p-1}=(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E})\boldsymbol{e},\ \cdots,$$

$$\boldsymbol{g}_p=\boldsymbol{e}_1=(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E})^{p-1}\boldsymbol{e}\ 。\tag{79}$$

那末

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E})\boldsymbol{g}_1=\boldsymbol{g}_2,\ (\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E})\boldsymbol{g}_2=\boldsymbol{g}_3,\ \cdots,\ (\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E})\boldsymbol{g}_p=\boldsymbol{0},$$

故有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{g}_1=\lambda_0\boldsymbol{g}_1+\boldsymbol{g}_2,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{g}_2=\lambda_0\boldsymbol{g}_2+\boldsymbol{g}_3,\ \cdots,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{g}_p=\lambda_0\boldsymbol{g}_p\ 。$$

向量(79)構成分解式(67)中對應於初級因子 $(\lambda-\lambda_0)^p$ 的循環不變子空間 $\boldsymbol{I}$ 的基底。在這個基底中，容易看出，運算子 $\boldsymbol{A}$ 對應於矩陣

$$\begin{Vmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_0 & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_0 \end{Vmatrix}。$$

至於向量 (79)，我們說他們構成向量的低若唐鏈。如果在分解式(67)的子空間 $\boldsymbol{I}',\ \boldsymbol{I}'',\ \cdots,\ \boldsymbol{I}^{(u)}$ 的每一個裏面都取向量的低若唐鏈，那末由這些鏈構成低若唐基底，在這一基底中運算子 $\boldsymbol{A}$ 對應於準對角形矩陣

$$J_1=\{\lambda_1E^{(p_1)}+F^{(p_1)},\ \lambda_2E^{(p_2)}+F^{(p_2)},\ \cdots,\ \lambda_uE^{(p_u)}+F^{(p_u)}\}。\tag{80}$$

至於矩陣 J_1，我們說他是一個低若唐式。為了與矩陣(80)有所區別我們有時稱矩陣(78)為高若唐矩陣。

這樣一來，任一矩陣 A 常可與某一高若唐矩陣或某一低若唐矩陣相似。

§8. 長期方程的阿.恩.克力洛夫院士變換方法

1. 如果給予矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$，那末他的特徵(長期)方程可寫爲：

$$\Delta(\lambda)\equiv(-1)^n\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12}\cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0。\tag{81}$$

這個方程的左節是 n 次特徵多項式 $\Delta(\lambda)$。爲了直接計算這個多項式的係數需要展開特徵行列式 $|\lambda-\lambda E|$，因爲 λ 是在行列式對角線上元素中出現，對於較大的 n 要有很大量的工作❶。

阿.恩.克力洛夫院士在 1937 年[81]中貢獻了特徵行列式的變換法，其結果使 λ 祇在某一列(或行)的元素中出現。

克力洛夫的變換主要是簡化特徵方程的係數的計算❷。

在本節中我們給予變換特徵方程的代數推理，與克力洛夫的推理有些差別❸。

我們來討論基底爲 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 的 n 維向量空間 $\boldsymbol{R}$ 與 $\boldsymbol{R}$ 中線性運算子 $\boldsymbol{A}$，他是在這一基底中爲已予矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 所決定的。在 $\boldsymbol{R}$ 中選取任一向量 $\boldsymbol{x}\neq 0$ 且建立向量序列

$$\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{x},\cdots \tag{82}$$

設在這個序列中前 p 個向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \cdots, \boldsymbol{A}^{p-1}\boldsymbol{x}$ 線性無關，而第 $p+1$ 個向量 $\boldsymbol{A}^p\boldsymbol{x}$ 是這 p 個向量的線性組合：

---

❶ 我們記得，在 $\Delta(\lambda)$ 中 λ^k 的係數等於(不計符號)矩陣 A 中所有 $n-k$ 級主子式的和 $(k=1, 2, \cdots, n)$。這樣一來，當 $n=6$ 時爲了直接計算 $\Delta(\lambda)$ 中 λ 的係數已經需要計算六個五級行列式，而對於 λ^2 的係數要計算 15 個四級行列式，諸如此類。

❷ 對於長期方程變換的阿.恩.克力洛夫方法的代數分析方面有一系列的研究工作[86a, 6; 106, 606, 105]。

❸ 阿.恩.克力洛夫從含有 n 個常係數微分方程的方程組的討論出發來得出他的變換方法。克力洛夫推理的代數形式可以在，例如，[86a, 606]，或書[29]，§21 中找到。

$$A^p x = -\alpha_p x - \alpha_{p-1} A x - \cdots - \alpha_1 A^{p-1} x, \tag{83}$$

或

$$\varphi(A) x = 0, \tag{84}$$

其中

$$\varphi(\lambda) = \lambda^p + \alpha_1 \lambda^{p-1} + \cdots + \alpha_p。 \tag{85}$$

序列(82)中以後的所有諸向量亦可經這一序列中前 p 個向量線性表出❶。這樣一來，在序列 (82) 中有 p 個線性無關的向量，而且序列 (82) 中這組有極大個數的諸線性無關向量常可了解爲序列的前 p 個向量。

多項式 $\varphi(\lambda)$ 是對於運算子 A 向量 x 的最小（化零）多項式（參考 §1）。阿．恩．克力洛夫的方法是定出向量 x 的最小多項式的有效方法。

我們分兩種不同的情形來討論：正則情形，此時 $p=n$，與特殊情形，此時 $p<n$。

多項式 $\varphi(\lambda)$ 是整個空間 R❷ 的最小多項式 $\psi(\lambda)$ 的因式，而 $\psi(\lambda)$ 又是特徵多項式 $\Delta(\lambda)$ 的因式。故 $\varphi(\lambda)$ 恆爲 $\Delta(\lambda)$ 的因式。

在正則情形中，$\varphi(\lambda)$ 與 $\Delta(\lambda)$ 有相同的次數 n，且因其首項係數是相等的，所以這些多項式重合。這樣一來，在正則情形

$$\Delta(\lambda) \equiv \psi(\lambda) \equiv \varphi(\lambda),$$

故在正則情形克力洛夫方法是計算特徵多項式 $\Delta(\lambda)$ 的係數的方法。

在特殊情形，有如我們在下面所看到的，克力洛夫方法沒有給予可能性來定出 $\Delta(\lambda)$ 而在這一情形他祇是定出 $\Delta(\lambda)$ 的因式——多項式 $\varphi(\lambda)$。

---

❶ 在等式 (83) 的兩節應用運算子 A，我們把向量 $A^{p+1}x$ 經向量 $Ax, \cdots, A^{p-1}x, A^p x$ 線性表出。但由(83)，$A^p x$ 可經向量 $x, Ax, \cdots, A^{p-1}x$ 線性表出。故對 $A^{p+1}x$ 我們得出類似的表示式。在向量 $A^{p+1}x$ 的表示式上應用運算子 A，我們可把 $A^{p+2}x$ 來經 $x, Ax, \cdots, A^{p-1}x$ 線性表出，諸如此類。

❷ $\psi(\lambda)$ 是矩陣 A 的最小多項式。

在敍述克力洛夫變換時我們以 $a, b, \cdots, l$ 記向量 $\boldsymbol{x}$ 在所予基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 中的坐標而以 $a_k, b_k, \cdots, l_k$ 記向量 $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}$ 的坐標 $(k=1, 2, \cdots, n)$。

2. 正則情形：$p=n$。在這一情形向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \cdots, \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{x}$ 線性無關，而且等式(83)，(84)，(85)有形狀

$$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}=-\alpha_n\boldsymbol{x}-\alpha_{n-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\cdots-\alpha_1\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{x} \tag{86}$$

或

$$\Delta(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}, \tag{87}$$

其中

$$\Delta(\lambda)=\lambda^n+\alpha_1\lambda^{n-1}+\cdots+\alpha_{n-1}\lambda+\alpha_n。 \tag{88}$$

向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \cdots, \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{x}$ 線性無關的條件可以解析的寫為（參考第三章，§1）：

$$M=\begin{vmatrix} a & b\cdots & l \\ a_1 & b_1\cdots & l_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & b_{n-1}\cdots & l_{n-1} \end{vmatrix}\neq 0。 \tag{89}$$

討論由向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \cdots, \boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}$ 的坐標所構成的矩陣：

$$\begin{Vmatrix} a & b\cdots & l \\ a_1 & b_1\cdots & l_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & b_{n-1}\cdots & l_{n-1} \\ a_n & b_n\cdots & l_n \end{Vmatrix}。 \tag{90}$$

在正則情形這個矩陣的秩等於 n。這個矩陣的前 n 個行線性無關而最後一行，即第 $n+1$ 行，是前 n 行的線性組合。

由矩陣 (90) 諸行間的相關性，我們可以換向量等式 (86) 以含有 n 個純量等式的相抵的組

$$\left.\begin{array}{l} -\alpha_n a-\alpha_{n-1}a_1-\cdots-\alpha_1 a_{n-1}=a_n, \\ -\alpha_n b-\alpha_{n-1}b_1-\cdots-\alpha_1 b_{n-1}=b_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -\alpha_n l-\alpha_{n-1}l_1-\cdots-\alpha_1 l_{n-1}=l_n。 \end{array}\right\} \tag{91}$$

從這個含有 n 個線性方程的方程組，我們可以唯一的確定所求係數 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$[1] 且將所得出的值代進(88)中。這一個從(88)與(91)式消去 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的消去法可以化爲對稱的形式。爲此寫(88)與(91)爲

$$\left.\begin{array}{ll} a\alpha_n+a_1\alpha_{n-1}+\cdots+a_{n-1}\alpha_1+a_n\alpha_0 & =0, \\ b\alpha_n+b_1\alpha_{n-1}+\cdots+b_{n-1}\alpha_1+b_n\alpha_0 & =0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ l\alpha_n+l_1\alpha_{n-1}+\cdots+l_{n-1}\alpha_1+l_n\alpha_0 & =0, \\ 1\cdot\alpha_n+\lambda\alpha_{n-1}+\cdots+\lambda^{n-1}\alpha_1+[\lambda^n-\Delta(\lambda)]\alpha_0 & =0 。\end{array}\right\} (\alpha_0=1)。$$

因爲這一方程組有 $n+1$ 個方程與 $n+1$ 個未知量 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 且有非零解 $(\alpha_0=1)$，所以他的係數行列式應當等於零：

$$\begin{vmatrix} a & a_1\cdots\cdots a_{n-1} & a_n \\ b & b_1\cdots\cdots b_{n-1} & b_n \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ l & l_1\cdots\cdots l_{n-1} & l_n \\ 1 & \lambda\cdots\cdots\lambda^{n-1} & \lambda^n-\Delta(\lambda) \end{vmatrix}=0。\tag{92}$$

因此，將行列式(92)對主對角線摺轉後，我們定出 $\Delta(\lambda)$：

$$M\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} a & b\cdots\cdots l & 1 \\ a_1 & b_1\cdots l_1 & \lambda \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{n-1} & b_{n-1}\cdots l_{n-1} & \lambda^{n-1} \\ a_n & b_n\cdots l_n & \lambda^n \end{vmatrix},\tag{93}$$

其中常數因子 M 爲(89)式所確定，故不等於零。

恆等式(93)表示一個克力洛夫變換。在位於這一恆等式右節的克力洛夫行列式中，λ 祇在其最後一列的元素中出現而這一行列式的其餘諸元素都與 λ 無關。

註　在正則情形整個空間 $\boldsymbol{R}$ 是(對運算子 $\boldsymbol{A}$)循環的。如果選取向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Ax}, \cdots, \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{x}$ 作爲基底，那末在這一基底中運算子 $\boldsymbol{A}$ 對應

[1] 由於(89)式這一組的行列式不等於零。

於矩陣 $\widetilde{A}$，他是一個自然法式

$$\widetilde{A}=\left\|\begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \cdot & & \ddots & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & \cdots & & 1 & -\alpha_1 \end{matrix}\right\|。\tag{94}$$

應用滿秩變換矩陣

$$T=\left\|\begin{matrix} a & a_1 \cdots a_{n-1} \\ b & b_1 \cdots b_{n-1} \\ \cdots & \cdots\cdots \\ l & l_1 \cdots l_{n-1} \end{matrix}\right\|\tag{95}$$

化原來的基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 爲基底 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \cdots, \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{x}$。

此處

$$A=T\widetilde{A}T^{-1}。\tag{96}$$

3．特殊情形：$p<n$。在這一情形向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \cdots, \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{x}$ 線性相關，故有

$$M=\left|\begin{matrix} a & b \cdots & l \\ a_1 & b_1 \cdots & l_1 \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n-1} & b_{n-1} \cdots & l_{n-1} \end{matrix}\right|=0。$$

等式(93)是在條件 $M\neq 0$ 時求得的。但這一等式的兩節都是 λ 與參數 $a, b, \cdots, l$ [1] 的整有理函數。故"由連續性的推究"知等式(93)當 $M=0$ 時亦能成立。但此時在展開克力洛夫行列式(93)後，所有係數全等於零。這樣一來，在特殊情形 $(p<n)$，(93) 式變爲毫無意義的恆等式 $0=0$。

---

[1] $a_i=a_{11}^{(i)}a+a_{12}^{(i)}b+\cdots+a_{1n}^{(i)}l$, $b_i=a_{21}^{(i)}a+a_{22}^{(i)}b+\cdots+a_{2n}^{(i)}l$，諸如此類 $(i=1, 2, \cdots, n)$，其中 $a_{jk}^{(i)}$ $(j, k=1, 2, \cdots, n)$ 是矩陣 A^i 的元素 $(i=1, 2, \cdots, n)$。

討論由向量 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, $\cdots$, $A^p\boldsymbol{x}$ 的坐標所構成的矩陣：

$$\left\|\begin{matrix} a & b\cdots & l \\ a_1 & b_1\cdots & l_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p-1} & b_{p-1}\cdots & l_{p-1} \\ a_p & b_p\cdots & l_p \end{matrix}\right\|_{\circ} \tag{97}$$

這個矩陣的秩等於 p 且其前 p 個行線性無關，其最後的即第 $p+1$ 行是係數為 $-\alpha_p$, $-\alpha_{p-1}$, $\cdots$, $-\alpha_1$ 的前 p 個行的線性組合[參考(83)]。從 n 個坐標 a, b, $\cdots$, l 中我們可以選取 p 個坐標 c, f, $\cdots$, h 使得由向量 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, $\cdots$, $\boldsymbol{A}^{p-1}\boldsymbol{x}$ 的這些坐標所組成的行列式不等於零：

$$M^*=\left|\begin{matrix} c & f\cdots & h \\ c_1 & f_1\cdots & h_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{p-1} & f_{p-1}\cdots & h_{p-1} \end{matrix}\right|\neq 0_{\circ} \tag{98}$$

再者，由(83)推知：

$$\left.\begin{aligned} -\alpha_p c-\alpha_{p-1}c_1-\cdots-\alpha_1 c_{p-1}&=c_p, \\ -\alpha_p f-\alpha_{p-1}f_1-\cdots-\alpha_1 f_{p-1}&=f_p, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -\alpha_p h-\alpha_{p-1}h_1-\cdots-\alpha_1 h_{p-1}&=h_{p\circ} \end{aligned}\right\} \tag{99}$$

從這一組方程唯一的確定多項式 $\varphi(\lambda)$ (向量 $\boldsymbol{x}$ 的最小多項式) 的係數 α_1, α_2, $\cdots$, $\alpha_{p\circ}$ 與正則情形完全相類似的(祇是換 n 為 p, 換符號 a, b, $\cdots$, l 為符號 c, f, $\cdots$, h)我們可以從(85)與(99)消去 α_1, α_2, $\cdots$, α_p 且得出次之關於 $\varphi(\lambda)$ 的公式：

$$M^*\varphi(\lambda)=\left|\begin{matrix} c & f\cdots & h & 1 \\ c_1 & f_1\cdots & h_1 & \lambda \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{p-1} & f_{p-1}\cdots & h_{p-1} & \lambda^{p-1} \\ c_p & f_p\cdots & h_p & \lambda^p \end{matrix}\right|_{\circ} \tag{100}$$

4. 最後我們來闡明這樣的問題，對於怎樣的矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 與怎樣選取原始的向量 $\boldsymbol{x}$, 或者同樣的，怎樣選取原始的參數 a, b, $\cdots$, l 使

其成爲正則情形。

我們已經看到在正則情形有

$$\Delta(\lambda)\equiv\psi(\lambda)\equiv\varphi(\lambda)。$$

特徵多項式 $\Delta(\lambda)$ 與最小多項式的重合，表示矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 沒有兩個初級因子有同一的特徵數，亦即所有初級因子都兩兩互質。在 A 是單構矩陣的情形，這一條件與次之條件等價，就是矩陣 A 的特徵方程沒有多重根。

多項式 $\psi(\lambda)$ 與 $\varphi(\lambda)$ 重合，表示所選取的作爲向量 $\boldsymbol{x}$ 的向量，產生（藉助於運算子 $\boldsymbol{A}$）整個空間 $\boldsymbol{R}$。根據 § 2 的定理 2，這種向量常能存在。

如果條件 $\Delta(\lambda)\equiv\varphi(\lambda)$ 不能適合，那末不管怎樣選取向量 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，我們不能得出多項式 $\Delta(\lambda)$，因爲由克力洛夫方法所得出的多項式 $\varphi(\lambda)$ 是 $\psi(\lambda)$ 的因式，在我們所討論的情形 $\psi(\lambda)$ 不與多項式 $\Delta(\lambda)$ 重合，而祇是他的一個因式。變動向量 $\boldsymbol{x}$，我們可以用 $\psi(\lambda)$ 的任一因式作爲 $\varphi(\lambda)$ ❶。

我們可以把所得出的結果述爲次形定理：

定理 14. 克力洛夫變換給予矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 的特徵多項式 $\Delta(\lambda)$ 以行列式(93)的表示式，充分必要的是適合次之兩個條件：

1° 矩陣 A 的初級因子兩兩互質。

2° 原始的參數 $a, b, \cdots, l$ 是向量 $\boldsymbol{x}$ 的坐標，$\boldsymbol{x}$ 產生（藉助於與矩陣 A 相對應的運算子 A）整個 n 維空間❷。

在一般的情形，克力洛夫變換得出特徵多項式 $\Delta(\lambda)$ 的某一個因式 $\varphi(\lambda)$。這個因式 $\varphi(\lambda)$ 是坐標爲 $(a, b, \cdots, l)$ 的向量 x 的最小多項式（$a, b, \cdots, l$ 爲克力洛夫變換中原始參數）。

5. 我們來指出如何求得任一特徵數 λ_0 所對應的特徵向量 $\boldsymbol{y}$ 的坐

❶ 參考，例如，[60]，48 頁。

❷ 這一條件的解析形狀是列 $x, Ax, \cdots, A^{n-1}x$ 線性無關，其中 $x=(a, b, \cdots, l)$。

標，其中 λ_0 是由克力洛夫變換所得出的多項式 $\varphi(\lambda)$ 的根[1]。

向量 $\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$ 將在次之形狀中找出：

$$\boldsymbol{y}=\xi_1\boldsymbol{x}+\xi_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\cdots+\xi_p\boldsymbol{A}^{p-1}\boldsymbol{x}。\tag{101}$$

把 $\boldsymbol{y}$ 的這個表示式代進向量等式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\lambda_0\boldsymbol{y}$$

且利用(101)式，我們得出：

$$\begin{aligned}\xi_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\xi_2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}+\cdots+\xi_{p-1}\boldsymbol{A}^{p-1}\boldsymbol{x}+&\\+\xi_p(-\alpha_p\boldsymbol{x}-\alpha_{p-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\cdots-\alpha_1\boldsymbol{A}^{p-1}\boldsymbol{x})&=\\=\lambda_0(\xi_1\boldsymbol{x}+\xi_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\cdots+\xi_p\boldsymbol{A}^{p-1}\boldsymbol{x})。&\end{aligned}\tag{102}$$

故知 $\xi_p\neq0$，因為由 (102)，等式 $\xi_p=0$ 將給予向量 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, $\cdots$, $\boldsymbol{A}^{p-1}\boldsymbol{x}$ 間的線性相關性。以後我們取 $\xi_p=1$。那末由(102)我們得出：

$$\left.\begin{aligned}&\xi_p=1,\ \xi_{p-1}=\lambda_0\xi_p+\alpha_1,\ \xi_{p-2}=\lambda_0\xi_{p-1}+\alpha_2,\ \cdots,\\&\xi_1=\lambda_0\xi_2+\alpha_{p-1},\qquad 0=\lambda_0\xi_1+\alpha_p。\end{aligned}\right\}\tag{103}$$

這些等式的前 p 個順次定出 ξ_p, ξ_{p-1}, $\cdots$, ξ_1（向量 $\boldsymbol{x}$ 在"新"基底 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, $\cdots$, $\boldsymbol{A}^{p-1}\boldsymbol{x}$ 中的坐標）的值；最後一個等式是從前諸等式與關係式 $\lambda_0^p+\alpha_1\lambda_0^{p-1}+\cdots+\alpha_p=0$ 所得出的結果。

向量 $\boldsymbol{y}$ 在原基底中的坐標 a', b', $\cdots$, l' 可以從(101)推出的次諸公式中求得：

$$\left.\begin{aligned}a'&=\xi_1a+\xi_2a_1+\cdots+\xi_pa_{p-1},\\b'&=\xi_1b+\xi_2b_1+\cdots+\xi_pb_{p-1},\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\l'&=\xi_1l+\xi_2l_1+\cdots+\xi_pl_{p-1}。\end{aligned}\right\}\tag{104}$$

例 1.

對讀者推薦次之計算格式。

在所予矩陣 A 下面寫出的一個行是向量 x 的坐標：a, b, $\cdots$, l。這些數是任意給予的（祇有一個限制：在這些數中至少有一個數不等於零）。在行 a, b, $\cdots$, l 下面寫上行 a_1, b_1, $\cdots$, l_1，亦即向量 Ax 的坐標。數 a_1, b_1, $\cdots$, l_1 可以由順次乘行 a, b, $\cdots$, l 以所予矩陣 A

[1] 以下所討論的無論對於正則情形 $p=n$ 或特殊情形 $p<n$ 都能成立。

的行來得出。例如 $a_1=a_{11}a+a_{12}b+\cdots+a_{1n}l$, $b_1=a_{21}a+a_{22}b+\cdots+a_{2n}l$, 諸如此類。在行 $a_1, b_1, \cdots, l_1$ 下面寫出行 $a_2, b_2, \cdots, l_2$, 諸如此類。所寫出的每一個行,從第二行開始,都是由順次乘其前面的行以所予矩陣的行來得出的。

在矩陣上面的一行是行的控制和。

					y	z
	8	*3*	*−10*	*−3*		
$A=$	3	−1	−4	2		
	2	3	−2	−4		
	2	−1	−3	2		
	1	2	−1	−3		
$x=e_1+e_2$	1	1	0	0	−1	1
Ax	2	5	1	3	−1	−1
A^2x	3	5	2	2	1	−1
A^3x	0	9	−1	5	1	1
A^4x	5	9	4	4		
y	0	8	0	4		
	0	2	0	1		
z	−4	0	−4	0		
	1	0	1	0		

所予的情形是正則情形,因爲

$$M=\begin{vmatrix}1&1&0&0\\2&5&1&3\\3&5&2&2\\0&9&-1&5\end{vmatrix}=-16。$$

克力洛夫行列式有形狀

$$-16\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}1&1&0&0&1\\2&5&1&3&\lambda\\3&5&2&2&\lambda^2\\0&9&-1&5&\lambda^3\\5&9&4&4&\lambda^4\end{vmatrix}。$$

展開這個行列式且約去 -16, 我們求得:

$$\Delta(\lambda)=\lambda^4-2\lambda^2+1=(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2。$$

以 $y=\xi_1x+\xi_2Ax+\xi_3A^2x+\xi_4A^3x$ 記對應於特徵數 $\lambda_0=1$ 的矩陣 A 的特徵向量。我們用公式(103)來求出數 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$:

$$\xi_4=1,\ \xi_3=1\cdot\lambda_0+0=1,\ \xi_2=1\cdot\lambda_0-2=-1,\ \xi_1=-1\cdot\lambda_0+0=-1。$$

最後的驗算等式 $-1\cdot\lambda_0+1=0$ 是適合的。

我們把所得出的數 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ 寫在一個與向量列 x, Ax, A^2x, A^3x 平行的垂直列上面。乘列 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ 以列 a_1, a_2, a_3, a_4 我們得出向量 y 在原基底 e_1, e_2, e_3, e_4 中的第一個坐標 a'; 同樣的可以得出 b', c', d'。我們就得出了向量 y 的坐標(約去 4 之後): 0, 2, 0, 1。同樣的定出對應於特徵數 $\lambda_0=-1$ 的特徵向量 z 的坐標 1, 0, 1, 0。

再者,根據(94)與(95)

$$A=T\tilde{A}T^{-1},$$

其中

$$\tilde{A}=\left\|\begin{matrix}0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&2\\0&0&1&0\end{matrix}\right\|,\quad T=\left\|\begin{matrix}1&2&3&0\\1&5&5&9\\0&1&2&-1\\0&3&2&5\end{matrix}\right\|。$$

例 2. 討論同一矩陣 A, 但是取數 $a=1, b=0, c=0, d=0$ 作爲原始參數。

$$\begin{matrix} & 8 & 8 & -10 & -8 \\ A= & \left\|\begin{matrix}3&-1&-4&2\\2&3&-2&-4\\2&-1&-3&2\\1&2&-1&-3\end{matrix}\right\| \\ x=e_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ Ax & 3 & 2 & 2 & 1 \\ A^2x & 1 & 4 & 0 & 2 \\ A^3x & 3 & 6 & 2 & 3 \end{matrix}$$

但在所予情形

$$M=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\3&2&2&1\\1&4&0&2\\3&6&2&3\end{vmatrix}=0$$

而 $p=3$。我們得出特殊情形。

取向量 x, Ax, A^2x, A^3x 的前三個坐標,寫克力洛夫行列式爲

$$\begin{vmatrix}1&0&0&1\\3&2&2&\lambda\\1&4&0&\lambda^2\\3&6&2&\lambda^3\end{vmatrix}。$$

展開這個行列式且約去 -8, 我們得出:

$$\varphi(\lambda)=\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1=(\lambda-1)^2(\lambda+1)。$$

故求得三個特徵數: $\lambda_1=1,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=-1$。第四個特徵數可以由所有特徵數之和等於矩陣的追跡這一條件來得出。今有 $\mathrm{Sp}A=0$, 故得 $\lambda_4=-1$。

上述例子說明,在應用克力洛夫方法時,順次寫出矩陣

$$\left\|\begin{matrix} a & b\cdots l \\ a_1 & b_1\cdots l_1 \\ a_2 & b_2\cdots l_2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{matrix}\right\| \tag{105}$$

的行,應當注意所得出的矩陣的秩,使得在第一個(矩陣中第 $p+1$ 個行)出現的行爲其以前諸行的線性組合時卽行停止。秩的定義與已知行列式的計算有關。此外,得出(93)或(100)型的克力洛夫行列式後,計算已知個 $p-1$ 級行列式(在正則情形爲 $n-1$ 級行列式)把他按照最後一列來展開。

亦可以直接從方程組 (91) [或(99)] 定出係數 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots$ 來代替克力洛夫行列式的展開,此時可用任一有效的方法來解出這個方程組,例如用消去法來解他。這個方法亦可以直接應用到矩陣

$$\left\|\begin{matrix} a & b\cdots l & 1 \\ a_1 & b_1\cdots l_1 & \lambda \\ a_2 & b_2\cdots l_2 & \lambda^2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \end{matrix}\right\| \tag{106}$$

與由克力洛夫方法來得出對應行相平行的來應用他。那末我們就毋須計算任何行列式而及時的發現矩陣(105)中與其前諸行線性相關的行。

我們來予以詳細的說明。在矩陣(106)的第一行中選取任一元素 $c\neq 0$ 且利用他來使得位於他下面的元素 c_1 變爲零,是卽從第二行減去第一行與 $\frac{c_1}{c}$ 的乘積。再在第二行中選取任一元素 $f_1^*\neq 0$ 且利用元素 c 與 f_1^* 使元素 c_2 與 f_2 都變爲零,繼續如此進行❶。這種變換的結果

❶ 元素 $c,\ f_1^*,\cdots$ 不許在含有 λ 的冪次的最後一列中選取。

使在矩陣(106)最後一列中換冪次 λ^k 爲 k 次多項式 $g_k(\lambda)=\lambda^k+\cdots$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$。

因爲對於任何 k 經過我們的變換後，由矩陣(106)的前 k 個行與前 n 個列所組成的矩陣的秩，並無變動，所以經過變換後，這個矩陣的第 $p+1$ 行將有次之形狀

$$0, 0, \cdots, 0, g_p(\lambda)。$$

進行我們的變換並不變動次之克力洛夫行列式的值

$$\begin{vmatrix} c & f\cdots & h & 1 \\ c_1 & f_1\cdots & h_1 & \lambda \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{p-1} & f_{p-1}\cdots & h_{p-1} & \lambda^{p-1} \\ c_p & f_p\cdots & h_p & \lambda^p \end{vmatrix} = M^*\varphi(\lambda)。$$

所以

$$M^*\varphi(\lambda)=c\,f_1^*\cdots g_p(\lambda), \tag{107}$$

亦卽❶ $g_p(\lambda)$ 就是所要找出的 $\varphi(\lambda)$：$g_p(\lambda)\equiv\varphi(\lambda)$。

推薦次之簡化方法。在矩陣(106)中得出第 k 個經過變換的行

$$a_{k-1}^*, b_{k-1}^*, \cdots, l_{k-1}^*, g_{k-1}(\lambda) \tag{108}$$

以後，下面的第 $k+1$ 行可由乘序列 $a_{k-1}^*, b_{k-1}^*, \cdots, l_{k-1}^*$（而不是原來的序列 $a_{k-1}, b_{k-1}, \cdots, l_{k-1}$）以所予矩陣的諸行來得出❷。那末我們就求得第 $k+1$ 行，其形狀爲

$$\tilde{a}_k, \tilde{b}_k, \cdots, \tilde{l}_k, \lambda g_{k-1}(\lambda)$$

而在減去其以前的諸行的適當倍數我們得出：

$$a_k^*, b_k^*, \cdots, l_k^*, g_k(\lambda)。$$

我們所推薦的祇有很少一些變動的克力洛夫方法（與消去法相合併的）可以立刻得出我們所關心的多項式 $\varphi(\lambda)$ [在正則情形是 $\Delta(\lambda)$]，

❶ 記住多項式 $\varphi(\lambda)$ 與 $g_p(\lambda)$ 的首項係數都等於 1。

❷ 簡化法中還有這樣的情形，在變換行(108)中有 $k-1$ 個元素等於零。故乘這種行以矩陣 A 的行是較爲簡便的。

並不需要任何行列式的計算與補助方程組的解出❶。

例

$$
\begin{matrix} 4 & 4 & 1 & 5 & 0 \end{matrix}
$$

$$
A=\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 0 \end{matrix}\right\|
$$

0	0	0	0	1	1
0	1	0	−1	0	λ
0	2	3	−4	−2	$\lambda^2 \quad [2-4\lambda]$
0	−2	3	0	0	$\lambda^2-4\lambda+2$
−5	−7	5	7	−5	$\lambda^3-4\lambda^2+2\lambda \quad [5+7\lambda]$
−5	0	5	0	0	$\lambda^3-4\lambda^2+9\lambda+5$
−10	−10	20	0	−15	$\lambda^4-4\lambda^3+9\lambda^2+5\lambda \quad [15-5(\lambda^2-4\lambda+2)-2(\lambda^3-4\lambda^2+9\lambda+5)]$
0	0	−5	0	0	$\lambda^4-6\lambda^3+12\lambda^2+7\lambda-5$
5	5	−15	−5	5	$\lambda^5-6\lambda^4+12\lambda^3+7\lambda^2-5\lambda \quad [-5-5\lambda+(\lambda^3-4\lambda^2+9\lambda+5)-2(\lambda^4-6\lambda^3+12\lambda^2+7\lambda-5)]$
0	0	0	0	0	$\underbrace{\lambda^5-8\lambda^4+25\lambda^3-21\lambda^2-15\lambda+10}_{\Delta(\lambda)}$

❶ 與阿.恩.克力洛夫院士的方法相平行的我們已經在第四章中使讀者知道了德.克.法捷也夫關於計算特徵多項式的係數的方法。德.克.法捷也夫的方法比克力洛夫的方法需要較多的計算，但是法捷也夫的方法較爲普遍，在他裏面沒有特殊情形。讀者還要注意阿.黎.達尼連夫斯基的很有效的方法[66]；還可參考[8]，287—292頁，閱讀論文[59]與參考書[29]，§24。

第八章　矩陣方程

在這一章裏面，我們討論在矩陣論及其應用的各種問題中遇到的矩陣方程的某些類型。

§1. 方程 $AX=XB$

設給予方程

$$AX=XB, \tag{1}$$

其中 A 與 B 爲兩個已知方陣（一般的說，有不同的階）

$$A=\|a_{ij}\|_1^m,\quad B=\|b_{kl}\|_1^n,$$

而 X 爲要求出的 $m\times n$ 維長方矩陣：

$$X=\|x_{jk}\|\quad (j=1,2,\cdots,m;\ k=1,2,\cdots,n)。$$

寫出矩陣 A 與 B（在複數域中）的初級因子：

$$(A):\quad (\lambda-\lambda_1)^{p_1},\ (\lambda-\lambda_2)^{p_2},\ \cdots,\ (\lambda-\lambda_u)^{p_u}\quad (p_1+p_2+\cdots+p_u=m),$$

$$(B):\quad (\lambda-\mu_1)^{q_1},\ (\lambda-\mu_2)^{q_2},\ \cdots,\ (\lambda-\mu_v)^{q_v}\quad (q_1+q_2+\cdots+q_v=n)。$$

對應於這些初級因子化矩陣 A 與 B 爲若唐法式

$$A=U\widetilde{A}U^{-1},\quad B=V\widetilde{B}V^{-1}, \tag{2}$$

其中 U, V 都是滿秩方陣，各有階 m 與 n，而 $\widetilde{A}$ 與 $\widetilde{B}$ 爲若唐矩陣：

$$\begin{aligned}\widetilde{A}&=\{\lambda_1E^{(p_1)}+H^{(p_1)},\ \lambda_2E^{(p_2)}+H^{(p_2)},\ \cdots,\ \lambda_uE^{(p_u)}+H^{(p_u)}\},\\ \widetilde{B}&=\{\mu_1E^{(q_1)}+H^{(q_1)},\ \mu_2E^{(q_2)}+H^{(q_2)},\ \cdots,\ \mu_vE^{(q_v)}+H^{(q_v)}\}。\end{aligned} \tag{3}$$

把 A 與 B 的表示式(2)代進方程(1)中，我們得出：

$$U\widetilde{A}U^{-1}X=XV\widetilde{B}V^{-1}。$$

左乘這個等式的兩節以 U^{-1}，而右乘以 V：

$$\widetilde{A}U^{-1}XV=U^{-1}XV\widetilde{B}。 \tag{4}$$

換所求矩陣 X 以新的未知矩陣 $\widetilde{X}$（維數仍爲 $m\times n$）

$$\widetilde{X}=U^{-1}XV, \tag{5}$$

我們可以寫方程(4)爲:

$$\tilde{A}\tilde{X}=\tilde{X}\tilde{B}。\qquad (6)$$

我們已經把矩陣方程(1)換爲同形狀的方程(6),但在此時所予矩陣成若唐法式。

與準對角形矩陣 $\tilde{A}$ 和 $\tilde{B}$ 相對應的分 $\tilde{X}$ 爲分塊矩陣:

$$\tilde{X}=(X_{\alpha\beta})\quad(\alpha=1,2,\cdots,u;\ \beta=1,2,\cdots,v)$$

(此處 $X_{\alpha\beta}$ 爲 $p_\alpha\times q_\beta$ 維長方矩陣;$\alpha=1,2,\cdots,u$; $\beta=1,2,\cdots,v$)。

應用分塊矩陣與準對角形矩陣的乘法規則(參考第二章,§5,**1**)乘出方程(6)的左節與右節。那末這個方程就裂分爲 uv 個矩陣方程:

$$[\lambda_\alpha E^{(p_\alpha)}+H^{(p_\alpha)}]X_{\alpha\beta}=X_{\alpha\beta}[\mu_\beta E^{(q_\beta)}+H^{(q_\beta)}]$$
$$(\alpha=1,2,\cdots,u;\ \beta=1,2,\cdots,v),$$

還可以把他們寫爲:

$$(\mu_\beta-\lambda_\alpha)X_{\alpha\beta}=H_\alpha X_{\alpha\beta}-X_{\alpha\beta}G_\beta\ \ (\alpha=1,2,\cdots,u;\ \beta=1,2,\cdots,v);\qquad (7)$$

此處我們引進了簡寫符號

$$H_\alpha=H^{(p_\alpha)},\ G_\beta=H^{(q_\beta)}\quad(\alpha=1,2,\cdots,u;\ \beta=1,2,\cdots,v)。\qquad (8)$$

取方程(7)的任何一個。可能出現兩種情況:

1. $\lambda_\alpha\neq\mu_\beta$。重復運用等式(7) $r-1$ 次❶:

$$(\mu_\beta-\lambda_\alpha)^r X_{\alpha\beta}=\sum_{\sigma+\tau=r}(-1)^\tau H_\alpha^\sigma X_{\alpha\beta}G_\beta^\tau。\qquad (9)$$

注意,由(8)有

$$H_\alpha^{p_\alpha}=G_\beta^{q_\beta}=0。\qquad (10)$$

如果在(9)中取 $r\geqslant p_\alpha+q_\beta-1$,那末位於等式(9)右節的和中每一個項,至少適合次之關係式的某一個

$$\sigma\geqslant p_\alpha,\quad \tau\geqslant q_\beta,$$

故由(10)或有 $H_\alpha^\sigma=0$ 或有 $G_\beta^\tau=0$。再因我們所討論的情形是 $\lambda_\alpha\neq\mu_\beta$,所以從(9)求得:

---

❶ 乘等式(7)的兩節以 $\mu_\beta-\lambda_\alpha$ 且在右節中把每一項的 $(\mu_\beta-\lambda_\alpha)X_{\alpha\beta}$ 換爲 $H_\alpha X_{\alpha\beta}-X_{\alpha\beta}G_\beta$。重復這種步驟至 $r-1$ 次。

$$X_{\alpha\beta}=0\ 。\tag{11}$$

2. $\lambda_\alpha=\mu_\beta$ 。在這一情形方程(7)變爲

$$H_\alpha X_{\alpha\beta}=X_{\alpha\beta}G_\beta\ 。\tag{12}$$

在矩陣 H_α 與 G_β 的第一上對角線中諸元素都等於 1，而所有其餘的元素都等於零。注意矩陣 H_α 與 G_β 的這種特殊結構且設

$$X_{\alpha\beta}=\|\xi_{ik}\|\quad(i=1,2,\cdots,p_\alpha;\ k=1,2,\cdots,q_\beta),$$

我們可以把矩陣方程(12)換爲次之與他相抵的一組純量關係❶：

$$\xi_{i+1,k}=\xi_{i,k-1}\quad(\xi_{i0}=\xi_{p_\alpha+1,k}=0;\ i=1,2,\cdots,p_\alpha;\ k=1,2,\cdots,q_\beta)。\tag{13}$$

等式(13)說明了：

(1)在矩陣 $X_{\alpha\beta}$ 中，位於與主對角線平行的每一條線上的元素，彼此相等；

(2) $\xi_{21}=\xi_{31}=\cdots=\xi_{p_\alpha 1}=\xi_{p_\alpha 2}=\cdots=\xi_{p_\alpha,q_\beta-1}=0$ 。

設 $p_\alpha=q_\beta$ 。在這一情形 $X_{\alpha\beta}$ 是一個方陣。由(1)，(2)知在矩陣 $X_{\alpha\beta}$ 中位於主對角線下面的所有元素都等於零，主對角線上的元素都等於某一個數 $c_{\alpha\beta}$，第一上對角線中諸元素都等於某一個數 $c'_{\alpha\beta}$，諸如此類，亦即

$$X_{\alpha\beta}=\begin{Vmatrix} c_{\alpha\beta} & c'_{\alpha\beta} & \cdots & c_{\alpha\beta}^{(p_\alpha-1)} \\ 0 & c_{\alpha\beta} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & c'_{\alpha\beta} \\ 0 & \cdots & 0 & c_{\alpha\beta} \end{Vmatrix}=T_{p_\alpha};\tag{14}$$

$$(p_\alpha=q_\beta)$$

此處 $c_{\alpha\beta}, c'_{\alpha\beta}, \cdots, c_{\alpha\beta}^{(p_\alpha-1)}$ 爲任意的參數（方程(12)並沒有給予這些參數以任何限制）。

❶ 從矩陣 H_α 與 G_β 的結構，知道在 $X_{\alpha\beta}$ 中除去第一行把所有的行向上移動一個位置後以零填滿其最後一行即得乘積 $H_\alpha X_{\alpha\beta}$；同樣的在 $X_{\alpha\beta}$ 中除去其最右邊的列把所有的列向右邊移動一個位置再以零填滿其第一列即得乘積 $X_{\alpha\beta}G_\beta$（參考第一章，§3，1)。

爲了記號的簡便起見，我們對 ξ_{ik} 並不再行補出添數 α，β。

容易看出，當 $p_\alpha < q_\beta$ 時，

$$X_{\alpha\beta} = (\overbrace{0}^{q_\beta - q_\alpha} \; T_{p_\alpha}), \tag{15}$$

而當 $p_\alpha > q_\beta$ 時，

$$X_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} T_{q_\beta} \\ 0 \end{pmatrix} \}p_\alpha - q_\beta\,。 \tag{16}$$

至於矩陣 (14)，(15) 與 (16)，我們說他們是正高三角形。$X_{\alpha\beta}$ 中任意的參數的個數等於數 p_α 與 q_β 中較小的一個。下面所舉的式樣說明當 $\lambda_\alpha = \mu_\beta$ 時矩陣 $X_{\alpha\beta}$ 的結構（以 a, b, c, d 記任意的參數）：

$$X_{\alpha\beta} = \begin{Vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{Vmatrix}, \quad X_{\alpha\beta} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{Vmatrix}, \quad X_{\alpha\beta} = \begin{Vmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}。$$

$$(p_\alpha = q_\beta = 4) \qquad (p_\alpha = 3,\ q_\beta = 5) \qquad (p_\alpha = 5,\ q_\beta = 3)$$

為了在計算矩陣 $\tilde{X}$ 中任意的參數時可以包含情形 1，以 $d_{\alpha\beta}(\lambda)$ 記初級因子 $(\lambda - \lambda_\alpha)^{p_\alpha}$ 與 $(\lambda - \mu_\beta)^{q_\beta}$ 的最大公因式，而以 $\delta_{\alpha\beta}$ 記多項式 $d_{\alpha\beta}(\lambda)$ 的次數（$\alpha = 1, 2, \cdots, u$; $\beta = 1, 2, \cdots, v$）。在情形 1 中 $\delta_{\alpha\beta} = 0$; 而在情形 2 中有：$\delta_{\alpha\beta} = \min(p_\alpha, q_\beta)$。這樣一來，在兩種情形中 $X_{\alpha\beta}$ 內任意參數的個數都等於 $\delta_{\alpha\beta}$。$\tilde{X}$ 中任意參數的個數為次式所確定

$$N = \sum_{\alpha=1}^{u} \sum_{\beta=1}^{v} \delta_{\alpha\beta}\,。$$

以後，比較合式的，我們以 $X_{\alpha\beta}$ 來記方程（6）的一般解（直到現在為止我們是以符號 $\tilde{X}$ 來記這個解的）。

在這一節中所得出的結果可以述為次之定理：

定理 1. 矩陣方程

$$AX = XB,$$

其中

$$A=\|a_{ik}\|_1^m=U\tilde{A}U^{-1}=U\{\lambda_1E^{(p_1)}+H^{(p_1)},\ \cdots,\ \lambda_uE^{(p_u)}+H^{(p_u)}\}U^{-1},$$

$$B=\|b_{ik}\|_1^n=V\tilde{B}V^{-1}=V\{\mu_1E^{(q_1)}+H^{(q_1)},\ \cdots,\ \mu_vE^{(q_v)}+H^{(q_v)}\}V^{-1},$$

的解為次式所給出

$$X=UX_{\tilde{A}\tilde{B}}V^{-1}\text{。}\tag{17}$$

此處 $X_{\tilde{A}\tilde{B}}$ 是方程

$$\tilde{A}\tilde{X}=\tilde{X}\tilde{B}$$

的一般解，他有次之結構：

寫 $X_{\tilde{A}\tilde{B}}$ 為分塊矩陣

$$X_{\tilde{A}\tilde{B}}=(\overset{q_\beta}{\widetilde{X_{\alpha\beta}}})\}p_\alpha\quad(\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ u;\ \beta=1,\ 2,\ \cdots,\ v);$$

如果 $\lambda_\alpha\neq\mu_\beta$，那末位於 $X_{\alpha\beta}$ 的地方是一個零矩陣，如果有 $\lambda_\alpha=\mu_\beta$，那末位於 $X_{\alpha\beta}$ 的地方是一個任意的正高三角形矩陣。

$X_{\tilde{A}\tilde{B}}$，因而 X 與 N 個任意的參數 $c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_N$ 線性相結合

$$X=\sum_{j=1}^{N}c_jX_j,\tag{18}$$

其中 N 為次式所確定

$$N=\sum_{\alpha=1}^{u}\sum_{\beta=1}^{v}\delta_{\alpha\beta}\tag{19}$$

[此處 $\delta_{\alpha\beta}$ 表示 $(\lambda-\lambda_\alpha)^{p_\alpha}$ 與 $(\lambda-\mu_\beta)^{q_\beta}$ 的最大公因式的次數]。

我們注意，固定在(18)式中的矩陣 $X_1,X_2,\cdots,X_N$ 是原方程(1)的解[如果在 X 中予參數 c_j 以值 1 而予其餘諸參數以值零 $(j=1,\ 2,\ \cdots,N)$，我們就得出矩陣 X_j]。這些解是線性無關的，因為否則對於參數 $c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_N$ 的某些不全為零的值，將使矩陣 X，因而 $X_{\tilde{A}\tilde{B}}$ 等於零，而這是不可能的。這樣一來，等式(19)證明原方程的任一解可以表為 N 個線性無關解的線性組合。

如果 A 與 B 沒有公共的特徵數(特徵多項式 $|\lambda E-A|$ 與 $|\lambda E-B|$ 互質)，那末 $N=\sum_{\alpha=1}^{u}\sum_{\beta=1}^{v}\delta_{\alpha\beta}=0$，因而 $X=0$，亦即在這一情形方程(1)祇有顯明的零解 $X=0$。

註 設矩陣 A 與 B 的元素在某一個數域 K 中。那末不能斷定，在(17)式中所定出的矩陣 $U, V, X_{\tilde{A}\tilde{B}}$ 的元素亦在域 K 中。可以在擴展域 K_1 中選取這些矩陣的元素，K_1 是在域 K 中添加特徵方程 $|\lambda E-A|=0$ 與 $|\lambda E-B|=0$ 的根所得出的。基域的這種樣子的擴展，在化所予矩陣爲若唐法式時常是必要的。

但是矩陣方程(1)與有 mn 個方程的齊次線方程組相抵，在這組方程中以未知矩陣 X 的元素 x_{jk} $(j=1, 2, \cdots, m;\ k=1, 2, \cdots, n)$ 爲其未知量：

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, x_{jk}=\sum_{h=1}^{n} x_{ih}\, b_{hk} \quad (i=1, 2, \cdots, m;\ k=1, 2, \cdots, n)。 \tag{20}$$

我們已經證明，這個方程組有 N 個線性無關解，其中 N 爲(19)式所確定。但是已知，作爲基底的線性無關解，可以在方程(20)的係數所在基域 K 中選取。故在(18)式中，可以這樣的來選取矩陣 $X_1, X_2, \cdots, X_N$，使得他們的元素都在域 K 中。那末在(18)式中給予任意參數以域 K 中所有可能的值，我們就得出適合方程(1)元素在 K 中的所有矩陣 X❶。

§2. 特殊情形：$A=B$. 可易矩陣

討論方程(1)的特殊情形——方程

$$AX=XA, \tag{21}$$

其中 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 是已予的而 $X=\|x_{ik}\|_1^n$ 是未知矩陣。我們得到勿勞別涅斯問題：定出與已予矩陣 A 可易的全部矩陣 X。

化矩陣 A 爲若唐法式：

$$A=U\tilde{A}U^{-1}=U\{\lambda_1E^{(p_1)}+H^{(p_1)}, \cdots, \lambda_uE^{(p_u)}+H^{(p_u)}\}U^{-1}。 \tag{22}$$

那末在(17)式中取 $U=V$, $\tilde{B}=\tilde{A}$ 且簡寫 $X_{\tilde{A}\tilde{A}}$ 爲 $X_{\tilde{A}}$，我們得出方程

❶ 矩陣 $A=\|a_{ij}\|_1^m$ 與 $B=\|b_{kl}\|_1^n$ 在 $m\times n$ 維長方矩陣 X 的空間中定出線性運算子 $F(X)=AX-XB$。這種類型的運算子的研究可在論文[63]中找到。

(21)的所有解，亦即與 A 可易的全部矩陣都有次之形狀：

$$X=UX_{\tilde{A}}U^{-1}, \tag{23}$$

其中 $X_{\tilde{A}}$ 記任一與 $\tilde{A}$ 可易的矩陣。有如上節中所闡明的，對應於若唐矩陣 $\tilde{A}$ 的分塊，裂分 $X_{\tilde{A}}$ 爲 u^2 個子塊

$$X_{\tilde{A}}=(X_{\alpha\beta})_1^u;$$

$X_{\alpha\beta}$ 爲零矩陣或爲任意的正高三角形矩陣，則視 $\lambda_\alpha\neq\lambda_\beta$ 或 $\lambda_\alpha=\lambda_\beta$ 而定。

對於有次諸初級因子的矩陣 A，寫出矩陣 $X_{\tilde{A}}$ 的元素來爲例：

$$(\lambda-\lambda_1)^4,\quad (\lambda-\lambda_1)^3,\quad (\lambda-\lambda_2)^2,\quad \lambda-\lambda_2\quad (\lambda_1\neq\lambda_2)。$$

在這一情形 $X_{\tilde{A}}$ 有這樣的形狀：

$$\left\|\begin{array}{cccc:ccc:cc:c}
a & b & c & d & e & f & g & 0 & 0 & 0\\
0 & a & b & c & 0 & e & f & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & a & b & 0 & 0 & e & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hdashline
0 & h & k & l & m & p & q & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & h & k & 0 & m & p & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & h & 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0\\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & s & t\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & 0\\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & w & z
\end{array}\right\| \quad (a,\ b,\ \cdots,\ z \text{ 是任意的參數})。$$

在 $X_{\tilde{A}}$ 中參數的個數等於 N，其中 $N=\sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{u}\delta_{\alpha\beta}$；此處 $\delta_{\alpha\beta}$ 記多項式 $(\lambda-\lambda_\alpha)^{p_\alpha}$ 與 $(\lambda-\lambda_\beta)^{p_\beta}$ 的最大公因式的次數。

在討論中我們引進矩陣 A 的不變因式：$i_1(\lambda)$，$i_2(\lambda)$，$\cdots$，$i_t(\lambda)$；$i_{t+1}(\lambda)=\cdots=i_n(\lambda)=1$。以 $n_1\geqslant n_2\geqslant\cdots\geqslant n_t>n_{t+1}=\cdots=0$ 記這些多項式的次數。因爲每一個不變因式都是某些兩兩互質的初級因子的乘積，所以對於 N 的公式可以寫爲

$$N=\sum_{g,j=1}^{t}\varkappa_{gj},\tag{24}$$

其中 $\varkappa_{gj}$ 爲多項式 $i_g(\lambda)$ 與 $i_j(\lambda)$ 的最大公因式的次數$(g,j=1,2,\cdots,t)$。但是多項式 $i_g(\lambda)$ 與 $i_j(\lambda)$ 的最大公因式是他們裏面的某一個，故有 $\varkappa_{gj}=\min(n_g,n_j)$。因此我們得出：

$$N=n_1+3n_2+\cdots+(2t-1)n_t\text{。}$$

數 N 是與矩陣 A 可易的線性無關矩陣的個數(這些矩陣的元素可以算在含有矩陣 A 的元素的基域 K 裏面；參考上節末尾的註釋)。我們得到次之定理：

定理 2. 與矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 可易的線性無關矩陣的個數爲次式所確定

$$N=n_1+3n_2+\cdots+(2t-1)n_t,\tag{25}$$

其中 $n_1,n_2,\cdots,n_t$ 爲矩陣 A 的諸不爲常數的不變因式 $i_1(\lambda),i_2(\lambda),\cdots,i_t(\lambda)$ 的次數。

我們注意

$$n=n_1+n_2+\cdots+n_t\text{。}\tag{26}$$

由(25)與(26)推知：

$$N\geqslant n,\tag{27}$$

而且等號＝能成立的充分必要條件是 $t=1$，亦即矩陣 A 的所有初級因子是兩兩互質的。

設 $g(\lambda)$ 爲 λ 的某一個多項式。那末矩陣 $g(A)$ 與 A 可易。提出相反的問題：在什麼情形之下，任一與 A 可易的矩陣，都能表爲 A 的多項式？在此時任一與 A 可易的矩陣，都可表爲線性無關矩陣

$$E,\ A,\ A^2,\ \cdots,\ A^{n_1-1}$$

的線性組合。

在所討論的情形 $N=n_1\leqslant n$；與(27)相比較，我們得出 $N=n_1=n$。這樣一來，我們得到了：

定理 2 的推論 1. 所有與 A 可易的矩陣都能表爲 A 的多項式的充

分必要條件是 $n_1=n$，亦即矩陣 A 的所有初級因子兩兩互質。

與 A 可易的矩陣的多項式，亦與 A 可易。提出這樣的問題：在什麼情形之下，所有與 A 可易的矩陣，都可以表為某一個（同一）矩陣 C 的多項式？我們假定這種情形能夠成立。那末，因為矩陣 C 由於赫密登-凱萊定理適合他自己的特徵方程，所以任一與 A 可易的矩陣，都可以經矩陣

$$E,\ C,\ C^2,\ \cdots,\ C^{n-1}$$

線性表出。

故在所討論的情形 $N\leq n$。與(27)相比較，我們求得 $N=n$。再由(25)與(26)知 $n_1=n$。

定理 2 的推論 2. 所有與 A 可易的矩陣，都能表為同一矩陣 C 的多項式的充分必要條件是 $n_1=n$，亦即 $\lambda E-A$ 的所有初級因子兩兩互質。在這一情形所有與 A 可易的矩陣都能表為 A 的多項式。

我們還要注意可易矩陣的一項重要性質。

定理 3. 如果兩個矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 與 $B=\|b_{ik}\|_1^n$ 可易而且其中的一個，例如 A，有準對角形

$$A=\{\overbrace{A_1}^{s_1},\ \overbrace{A_2}^{s_2}\},\tag{28}$$

其中 A_1 與 A_2 沒有公共的特徵數，那末其另一矩陣亦有同樣的準對角形

$$B=\{\overbrace{B_1}^{s_1},\ \overbrace{B_2}^{s_2}\}。\tag{29}$$

證明　裂分矩陣 B 為與準對角形(28)相對應的分塊形：

$$B=\begin{pmatrix}\overbrace{B_1}^{s_1} & \overbrace{X}^{s_2}\\ Y & B_2\end{pmatrix}。$$

由 $AB=BA$，我們得出四個矩陣等式：

$$1.\ A_1B_1=B_1A_1,\ 2.\ A_1X=XA_2,\ 3.\ A_2Y=YA_1,\ 4.\ A_2B_2=B_2A_2。\tag{30}$$

方程(30)中第二與第三式，有如§1（註釋的前面）所已經闡明的，祇有零解 $X=0$, $Y=0$, 因爲矩陣 A_1 與 A_2 沒有公共的特徵數。這樣一來，我們的論斷已經證明。等式 (30) 中第一與第四式表示矩陣 A_1 與 B_1, A_2 與 B_2 的可易性。

所證明的論斷的幾何說法可述爲：

定理 3′. 如果

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}_1+\boldsymbol{I}_2$$

是整個空間 $\boldsymbol{R}$ 對關於運算子 $\boldsymbol{A}$ 不變的子空間 $\boldsymbol{I}_1$ 與 $\boldsymbol{I}_2$ 的分解式，而且這些子空間（關於 $\boldsymbol{A}$ 的）最小多項式互質，那末這些子空間 $\boldsymbol{I}_1$ 與 $\boldsymbol{I}_2$ 對於任何一個與 $\boldsymbol{A}$ 可易的線性運算子 $\boldsymbol{B}$ 不變。

給予這一論斷的幾何證明。以 $\psi_1(\lambda)$ 與 $\psi_2(\lambda)$ 記子空間 $\boldsymbol{I}_1$ 與 $\boldsymbol{I}_2$ 關於 $\boldsymbol{A}$ 的最小多項式。由於這些多項式的互質，知 $\boldsymbol{R}$ 中所有適合方程 $\psi_1(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的向量 $\boldsymbol{x}$ 都屬於 $\boldsymbol{I}_1$, 而所有適合方程 $\psi_2(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的向量都屬於 $\boldsymbol{I}_2$[1]。設 $\boldsymbol{x}_1\in\boldsymbol{I}_1$。那末 $\psi_1(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。由 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 的可易性得出 $\psi_1(\boldsymbol{A})$ 與 $\boldsymbol{B}$ 的可易性，故有

$$\psi_1(\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{B}\psi_1(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}_1=0,$$

亦卽 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_1\in\boldsymbol{I}_1$。同理可證子空間 $\boldsymbol{I}_2$ 對 $\boldsymbol{B}$ 的不變性。

由所證明的定理推得次之推論：

推論 1. 如果線性運算子 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \cdots, \boldsymbol{L}$ 兩兩可易，那末可以分解整個空間 $\boldsymbol{R}$ 爲對所有運算子 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \cdots, \boldsymbol{L}$ 不變的諸子空間

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}_1+\boldsymbol{I}_2+\cdots+\boldsymbol{I}_w,$$

且可使得這些子空間的任何一個關於運算子 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \cdots, \boldsymbol{L}$ 中任何一個的最小多項式都是不可約多項式的冪次。

因此，作爲特殊情形，我們得出：

推論 2. 如果線性運算子 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \cdots, \boldsymbol{L}$ 兩兩可易而且所有這些運算子的特徵數都在基域 K 中，那末可以分解整個空間 $\boldsymbol{R}$ 爲對所有運算

[1] 參考第七章定理 1（在§2中）。

子 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \cdots, \boldsymbol{L}$ 不變的諸子空間 $\boldsymbol{I}_1, \boldsymbol{I}_2, \cdots, \boldsymbol{I}_w$，在他們裏面的每一個關於運算子 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \cdots, \boldsymbol{L}$ 中任何一個，諸特徵數是相等的。

最後，還要注意這個論斷的一種特殊情形：

推論 3. 如果單構運算子 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \cdots, \boldsymbol{L}$（參考第三章，§ 8）兩兩可易，那末可以從這些運算子的共同的特徵向量來構成空間的基底。

我們還給予最後的論斷一個矩陣的說法：

對於可易單構矩陣可以用相似變換同時將他們化爲對角形的形狀。

§ 3. 方程 $AX-XB=C$

設予矩陣方程

$$AX-XB=C, \tag{31}$$

其中 $A=\|a_{ij}\|_1^m$, $B=\|b_{kl}\|_1^n$ 是已知的 m 與 n 級方陣，$c=\|c_{jk}\|$ 是已知的，$X=\|x_{jk}\|$ 是未知的，都是 $m\times n$ 維長方矩陣。方程(31)，與關於矩陣X的元素，有 mn 個純量方程的線方程組相抵：

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\,x_{jk}-\sum_{l=1}^{n} x_{il}\,b_{lk}=c_{ik} \quad (i=1,\,2,\,\cdots,\,m;\ k=1,\,2,\,\cdots,\,n)。$$

其對應的齊次方程組爲：

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\,x_{jk}-\sum_{l=1}^{n} x_{il}\,b_{lk}=0 \quad (i=1,\,2,\cdots,\,m;\ k=1,\,2,\,\cdots,\,n),$$

寫爲矩陣的形狀是：

$$AX-XB=0。 \tag{32}$$

這樣一來，如果方程(32)祇有一個零解，那末方程(31)亦祇有一組解。但在 § 1 中已經證明，方程 (32) 祇有一個零解的充分必要條件是矩陣 A 與 B 沒有公共的特徵數。因此，如果矩陣 A 與 B 沒有公共的特徵數，那末方程(31)有一組且祇有一組解；如果矩陣 A 與 B 有公共的特徵數，那末與"常數項" C 有關可以有兩種情形出現：或者方程(31)是矛盾的，或者他有無窮多組解，爲次式所給出

$$X = X_0 + X_1,$$

其中 X_0 為方程(31)的一組固定的特殊解，X_1 為齊次方程組(32)的一般解(X_1 的結構已經在 §1 中說明)。

§4. 純量方程 $f(X)=0$

首先討論方程

$$g(X)=0, \tag{33}$$

其中

$$g(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{\alpha_1}(\lambda-\lambda_2)^{\alpha_2}\cdots(\lambda-\lambda_h)^{\alpha_h}$$

是已知的變數 λ 的多項式，而 X 是一個 n 級未知方陣。因為矩陣 X 的最小多項式，亦即其第一不變因式 $i_1(\lambda)$，必須是多項式 $g(\lambda)$ 的因式，所以矩陣 X 的初級因子應當有次之形狀：

$$(\lambda-\lambda_{i_1})^{p_{i_1}},(\lambda-\lambda_{i_2})^{p_{i_2}},\cdots,(\lambda-\lambda_{i_\nu})^{p_{i_\nu}}\begin{pmatrix}i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_\nu=1,\ 2,\ \cdots,\ h,\\ p_{i_1}\leqslant a_{i_1},\ p_{i_2}\leqslant a_{i_2},\ \cdots,\ p_{i_h}\leqslant a_{i_h},\\ p_{i_1}+p_{i_2}+\cdots+p_{i_\nu}=n\end{pmatrix}$$

(足數 $i_1, i_2, \cdots, i_\nu$ 中可能有些是相等的，n 是未知矩陣 X 的已予階)。

表未知矩陣 X 為次之形狀：

$$X=T\{\lambda_{i_1}E^{(p_{i_1})}+H^{(p_{i_1})},\ \cdots,\ \lambda_{i_\nu}E^{(p_{i_\nu})}+H^{(p_{i_\nu})}\}T^{-1} \tag{34}$$

其中 T 為任意的 n 級滿秩矩陣。有已知級的未知矩陣的方程(33)諸解的集合，按照(34)式分為有限個相似矩陣類。

例 1. 給予方程

$$X^m=0。 \tag{35}$$

如果矩陣的某一個冪次等於零，那末稱這個矩陣為冪零的。使矩陣的冪次等於零的諸方次中最小的數稱為所予矩陣的冪零性指標。

顯然，方程(35)的解是有冪零性指標 $\mu\leqslant m$ 的所有冪零矩陣。包含已知階 n 的所有解的公式有次之形狀：

$$X=T\{H^{(p_1)},\ H^{(p_2)},\ \cdots,\ H^{(p_\nu)}\}T^{-1}\ \begin{pmatrix}p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_\nu\leqslant m,\\ p_1+p_2+\cdots+p_\nu=n\end{pmatrix} \tag{36}$$

(T 是任意的滿秩矩陣)。

例 2. 給予方程

$$X^2=X。\tag{37}$$

適合這個方程的矩陣稱爲幺冪的。幺冪矩陣的初級因子祇能是 λ 或 $\lambda-1$。所以幺冪矩陣可以確定爲特徵數等於零或 1 的單構矩陣(亦卽可化爲對角形矩陣)。包含所有已予階的幺冪矩陣的公式有次之形狀

$$X=T\{\underbrace{1,1,\cdots,1,0,\cdots,0}_{n}\}T^{-1},\tag{38}$$

其中 T 爲任意的 n 級滿秩矩陣。

討論更一般的方程

$$f(X)=0,\tag{39}$$

其中 $f(\lambda)$ 爲平面上某一區域 G 中複變量 λ 的正則函數。對於所求的解 $X=\|x_{ik}\|_1^n$，我們要求其特徵數都在區域 G 裏面。寫出函數 $f(\lambda)$ 在區域 G 裏面的所有零點及其重數：

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,$$

$$a_1,\ a_2,\ \cdots。$$

與上面的情形一樣，矩陣 X 的每一個初級因子必須有次之形狀

$$(\lambda-\lambda_i)^{p_i}\quad (p_i\leqslant a_i),$$

故有

$$X=T\{\lambda_{i_1}E^{(p_{i_1})}+H^{(p_{i_1})},\ \cdots,\ \lambda_{i_\nu}E^{(p_{i_\nu})}+H^{(p_{i_\nu})}\}T^{-1}\tag{40}$$

$$(i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_\nu=1,2,\cdots;p_{i_1}\leqslant a_{i_1},\ p_{i_2}\leqslant a_{i_2},\ \cdots,\ p_{i_\nu}\leqslant a_{i_\nu};$$
$$p_{i_1}+p_{i_2}+\cdots+p_{i_\nu}=n)$$

(T 是任意的滿秩矩陣)。

§ 5. 矩陣多項式方程

討論方程

$$A_0X^m+A_1X^{m-1}+\cdots+A_m=0,\tag{41}$$

$$Y^mA_0+Y^{m-1}A_1+\cdots+A_m=0,\tag{42}$$

其中 $A_0,A_1,\cdots,A_m$ 爲已知的，而 X 與 Y 爲未知的 n 級方陣。在上節

中所討論的方程(33)是方程(41),(42)的很特殊的(可以說是很顯易的)情形,祇要在(41)或(42)中取 $A_i=\alpha_i E$, 其中 α_i 爲域中的數而 $i=1, 2, \cdots, m$, 我們就得出方程(33)。

次之定理建立了方程(41),(42)與(33)之間的關係。

定理 4. 矩陣方程

$$A_0X^m+A_1X^{m-1}+\cdots+A_m=0$$

的每一個解都適合純量方程

$$g(X)=0, \tag{43}$$

其中

$$g(\lambda)\equiv|A_0\lambda^m+A_1\lambda^{m-1}+\cdots+A_m|. \tag{44}$$

矩陣方程

$$Y^mA_0+Y^{m-1}A_1+\cdots+A_m=0$$

的任一解適合類似的純量方程。

證明 以 $F(\lambda)$ 記矩陣多項式

$$F(\lambda)=A_0\lambda^m+A_1\lambda^{m-1}+\cdots+A_m.$$

那末方程(41)與(42)可以寫爲(參考第四章, §3):

$$F(X)=0,\ \hat{F}(Y)=0.$$

根據廣義裴所定理(第三章, §3), 如果 X 與 Y 是這些方程的解, 那末矩陣多項式 $F(\lambda)$ 可被 $\lambda E-X$ 所右整除, $\lambda E-Y$ 所左整除:

$$F(\lambda)=Q(\lambda)(\lambda E-X)=(\lambda E-Y)Q_1(\lambda).$$

故有

$$g(\lambda)=|F(\lambda)|=|Q(\lambda)|\Delta(\lambda)=|Q_1(\lambda)|\Delta_1(\lambda), \tag{45}$$

其中 $\Delta(\lambda)=|\lambda E-X|$ 與 $\Delta_1(\lambda)=|\lambda E-Y|$ 爲矩陣 X 與 Y 的特徵多項式。由赫密登-凱萊定理(第四章, §4),

$$\Delta(X)=0,\quad \Delta_1(Y)=0.$$

故由(45)推知:

$$g(X)=g(Y)=0.$$

定理已經證明。

我們注意，赫密登-凱萊定理是所證明的定理的一個特殊情形。事實上，以任何方陣 A 代 λ 都適合方程

$$\lambda E-A=0。$$

故由所證明的定理

$$\Delta(A)=0,$$

其中 $\Delta(\lambda)=|\lambda E-A|$。

定理4可以推廣為次之式樣：

定理5. 如果兩兩可易的 n 級方陣 $X_0, X_1, \cdots, X_m$ 適合矩陣方程

$$A_0X_0+A_1X_1+\cdots+A_mX_m=0 \tag{46}$$

($A_0, A_1, \cdots, A_m$ 是已知的 n 級方陣)，那末這些矩陣 $X_0, X_1, \cdots, X_m$ 適合純量方程

$$g(X_0, X_1, \cdots, X_m)=0, \tag{47}$$

其中

$$g(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_m)=|A_0\xi_0+A_1\xi_1+\cdots+A_m\xi_m|^{❶}。 \tag{48}$$

證明　設❷

$F(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_m)=\|f_{ik}(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_m)\|_1^n=A_0\xi_0+A_1\xi_1+\cdots+A_m\xi_m$；
$\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_m$ 為純量變數。

以 $\hat{F}(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_m)=\|\hat{f}_{ik}(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_m)\|_1^n$ 記矩陣 F 的附加矩陣 [$\hat{f}_{ik}$ 是行列式 $|F(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_m)|=|f_{ik}|_1^n$ 中元素 f_{ki} 的代數餘子式（餘因子）$(i, k=1, 2, \cdots, m)$]。那末矩陣 $\hat{F}$ 的每一個元素 $\hat{f}_{ik}$ $(i, k=1, 2, \cdots, n)$ 都是 $\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_{m-1}$ 的 $n-1$ 次齊次多項式，故可表矩陣 $\hat{F}$ 為

$$\hat{F}=\sum_{j_0+j_1+\cdots+j_m=n-1} F_{j_0j_1\cdots j_m}\xi_0^{j_0}\xi_1^{j_1}\cdots\xi_m^{j_m},$$

其中 $F_{j_0j_1\cdots j_m}$ 為某些 n 級常數矩陣。

由矩陣 $\hat{F}$ 的定義知有恆等式

---

❶ 參考[143]。

❷ $f_{ik}(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_m)$ 是 $\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_m$ 的線性型 $(i, k=1, 2, \cdots, n)$。

$$\widehat{F}F=g(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_m)E。$$

把這個恆等式寫爲次之樣式：

$$\sum_{j_0+j_1+\cdots+j_m=n-1} F_{j_0j_1\cdots j_m}(A_0\xi_0+A_1\xi_1+\cdots+A_m\xi_m)\xi_0^{j_0}\xi_1^{j_1}\cdots\xi_m^{j_m}=$$
$$=g(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_m)E。\qquad (49)$$

在恆等式 (49) 中展開括號且合併同類項，其左節就變爲右節。此時祇有變數 $\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_m$ 的彼此易位而並沒有把變數 $\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_m$ 與矩陣係數 A_i, $F_{j_0j_1\cdots j_m}$ 互易位置。所以等式 (49) 並未破壞，如果我們以兩兩可易的矩陣 $X_0, X_1, \cdots, X_m$ 代換變數 $\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_m$：

$$\sum_{j_0+j_1+\cdots+j_m=n-1} F_{j_0j_1\cdots j_m}(A_0X_0+A_1X_1+\cdots+A_mX_m)X_0^{j_0}X_1^{j_1}\cdots X_m^{j_m}=$$
$$=g(X_0, X_1, \cdots, X_m)。\qquad (50)$$

但由條件 $\qquad A_0X_0+A_1X_1+\cdots+A_mX_m=0$。

故由(50)我們求得：

$$g(X_0, X_1, \cdots, X_m)=0,$$

這就是所要證明的結果。

註 1. 定理 5 仍然有效，如果換方程(46)爲方程

$$X_0A_0+X_1A_1+\cdots+X_mA_m=0。\qquad (51)$$

事實上，可應用定理 5 於方程

$$A_0'X_0+A_1'X_1+\cdots+A_m'X_m=0$$

而後在這個方程中逐項的化爲其轉置矩陣。

註 2. 定理 4 可以作爲定理 5 的特殊情形來得出，祇要取 $X_0, X_1, \cdots, X_m$ 爲

$$X^m, X^{m-1}, \cdots, X, E。$$

我們已經證明方程(41)的每一個解適合純量方程(次數$\leqslant mn$)

$$g(\lambda)=0。$$

但是對於已知階 n 這個方程的矩陣解的集合可分爲有限個相似矩陣類(參考 § 4)。故方程(41)的所有的解都可在形爲

$$T_iD_iT_i^{-1}\qquad (52)$$

的矩陣中去找到(此處 D_i 是已知矩陣;願意時可取 D_i 爲若唐法式。T_i 是任意的 n 級滿秩矩陣; $i=1, 2, \cdots, h$)。在(41)中換 X 爲矩陣(52)且選取 T_i 使其適合方程(41)。對於每一個 T_i 我們都得出線性方程

$$A_0T_iD_i^m+A_1T_iD_i^{m-1}+\cdots+A_mT_i=0 \quad (i=1, 2, \cdots, h)。 \tag{53}$$

我們建議一個求出方程(53)諸解 T_i 的方法,就是換矩陣方程爲關於未知矩陣 T_i 的元素的齊次線性純量方程組來解。把方程(53)的每一個滿秩矩陣解 T_i 代進(52),就給出所予方程(41)的解。同樣的推理可用來處理方程(42)。

在次之兩節中我們討論方程(41)的特殊情形:求矩陣的 m 次方根。

§ 6. 求出滿秩矩陣的 m 次方根

在本節與次節中我們來研究方程

$$X^m=A, \tag{54}$$

其中 A 是已知的,X 是未知的矩陣(都是 n 級的),m 是已予正整數。

在這一節中,我們討論 $|A|\neq 0$ (A 爲滿秩矩陣)的情形。在這一情形矩陣 A 的所有特徵數都不等於零(因爲 $|A|$ 等於這些特徵數的乘積)。

以

$$(\lambda-\lambda_1)^{p_1},\ (\lambda-\lambda_2)^{p_2},\ \cdots,\ (\lambda-\lambda_u)^{p_u} \tag{55}$$

記矩陣 A 的初級因子且化矩陣 A 爲若唐式[1]:

$$A=U\tilde{A}U^{-1}=U\{\lambda_1E_1+H_1, \cdots, \lambda_uE_u+H_u\}U^{-1}。 \tag{56}$$

因爲未知矩陣 X 的特徵數的 m 次乘冪給出矩陣 A 的特徵數,所以矩陣 X 的所有特徵數都不等於零。故在這些特徵數上,$f(\lambda)=\lambda^m$ 的導式不等於零。但在這種情形(參考第六章,§7)矩陣 X 的初級因子在矩陣 X 昇到 m 次冪時並無"裂分"。因此,矩陣 X 的初級因子是:

$$(\lambda-\xi_1)^{p_1},\ (\lambda-\xi_2)^{p_2},\ \cdots,\ (\lambda-\xi_u)^{p_u}, \tag{57}$$

其中 $\xi_j^m=\lambda_j$,亦即 ξ_j 是 λ_j 的某一個 m 次方根 ($\xi_j=\sqrt[m]{\lambda_j}$; $j=1,2,\cdots,u$)。

[1] 此處 $E_j=E^{(p_j)}$, $H_j=H^{(p_j)}$ $(j=1, 2, \cdots, u)$。

現在界說 $\sqrt[m]{\lambda_j E_j+H_j}$ 如次。在 λ-平面上取一個以點 λ_j 爲圓心而不含點零的圓。在這個圓中函數 $\sqrt[m]{\lambda}$ 有 m 個不同的分支。這些分支可以由他們在圓心即點 λ_j 上所取的值來彼此分開。以 $\sqrt[m]{\lambda}$ 記這個分支，他在點 λ_j 上的值與未知矩陣 X 的特徵數 ξ_j 重合，且從這一分支出發，用次之有限級數來界說矩陣函數 $\sqrt[m]{\lambda_j E_j+H_j}$：

$$\sqrt[m]{\lambda_j E_j+H_j}=\lambda_j^{\frac{1}{m}}E_j+\frac{1}{m}\lambda_j^{\frac{1}{m}-1}H_j+\frac{1}{2!}\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\lambda_j^{\frac{1}{m}-2}H_j^2+\cdots。\quad(58)$$

因爲所討論的函數 $\sqrt[m]{\lambda}$ 的導式在點 λ_j 上不等於零，所以矩陣(58)祇有一個初級因子 $(\lambda-\xi_j)^{p_j}$，其中 $\xi_j=\sqrt[m]{\lambda_j}$（此處 $j=1, 2, \cdots, u$）。故知準對角形矩陣

$$\{\sqrt[m]{\lambda_1 E_1+H_1}, \sqrt[m]{\lambda_2 E_2+H_2}, \cdots, \sqrt[m]{\lambda_u E_u+H_u}\}$$

有初級因子(57)，亦即與未知矩陣 X 有相同的初級因子。因此，有這樣的滿秩矩陣 $T(|T|\neq 0)$ 存在，使得

$$X=T\{\sqrt[m]{\lambda_1 E_1+H_1}, \sqrt[m]{\lambda_2 E_2+H_2}, \cdots, \sqrt[m]{\lambda_u E_u+H_u}\}T^{-1}。\quad(59)$$

爲了定出矩陣 T 我們注意，在恆等式

$$(\sqrt[m]{\lambda})^m=\lambda$$

的兩節代 λ 以矩陣 $\lambda_j E_j+H_j(j=1, 2, \cdots, u)$，我們得出：

$$(\sqrt[m]{\lambda_j E_j+H_j})^m=\lambda_j E_j+H_j\quad(j=1, 2, \cdots, u)。$$

現在從(54)與(59)得出：

$$A=T\{\lambda_1 E_1+H_1, \lambda_2 E_2+H_2, \cdots, \lambda_u E_u+H_u\}T^{-1}。\quad(60)$$

比較(56)與(60)，我們求得：

$$T=UX_{\tilde{A}},\quad(61)$$

其中 $X_{\tilde{A}}$ 爲任一與 $\tilde{A}$ 可易的滿秩矩陣（矩陣 $X_{\tilde{A}}$ 的結構在§2中有詳細的敍述）。

在(59)中代 T 以其表示式 $UX_{\tilde{A}}$，我們得出一個包含方程(54)的全部解的公式：

$$X=UX_{\tilde{A}}\{\sqrt[m]{\lambda_1 E_1+H_1}, \sqrt[m]{\lambda_2 E_2+H_2}, \cdots, \sqrt[m]{\lambda_u E_u+H_u}\}X_{\tilde{A}}^{-1}U^{-1}。\quad(62)$$

這個公式的右節的多值性同時有分離性與連續性：這個多值性的分離性（在所予的情形是有限的）是由於在準對角形矩陣諸不同子塊中選取函數 $\sqrt[m]{\lambda}$ 的不同分支所得出（此處即使在 $\lambda_j=\lambda_k$ 時，$\sqrt[m]{\lambda}$ 在對角線上第 j 個與第 k 個子塊中可能取不同的分支）；多值性的連續性是由於含在矩陣 $X_{\tilde{A}}$ 中諸任意參數所得出。

方程 (54) 的所有解都稱為矩陣 A 的 m 次方根且記之以多值符號 $\sqrt[m]{A}$。要注意在一般的情形，$\sqrt[m]{A}$ 不是矩陣 A 的函數（亦即不能表為 A 的多項式形狀）。

註　如果矩陣的所有初級因子都兩兩互質，亦即數 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_u$ 都不相同，那末矩陣 $X_{\tilde{A}}$ 有準對角形

$$X_{\tilde{A}}=\{X_1, X_2, \cdots, X_u\},$$

其中矩陣 X_j 與 $\lambda_j E_j+H_j$ 可易，因而與 $\lambda_j E_j+H_j$ 的任一函數可易，特別的與 $\sqrt[m]{\lambda_j E_j+H_j}$ 可易 $(j=1, 2, \cdots, u)$。故在所討論的情形，公式(62)取次之形狀

$$X=U\{\sqrt[m]{\lambda_1 E_1+H_1}, \sqrt[m]{\lambda_2 E_2+H_2}, \cdots, \sqrt[m]{\lambda_u E_u+H_u}\}U^{-1}。$$

這樣一來，如果矩陣 A 的初級因子兩兩互質，那末 $X=\sqrt[m]{A}$ 的公式祇有分離的多值性。在這一情形 $\sqrt[m]{A}$ 的任一值都可以表為 A 的多項式。

例　假設要找出矩陣

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

的所有平方根，亦即方程

$$X^2=A$$

的所有解。

在所予的情形矩陣 A 已經成若唐法式。故在(62)式中可取 $A=\tilde{A}$, $U=E$。矩陣 $X_{\tilde{A}}$ 的形狀此時為：

$$X_{\tilde{A}}=\begin{Vmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & d & e \end{Vmatrix},$$

其中 a, b, c, d, e 爲任意的參數。

給出所有未知矩陣 X 的解的公式(62)此時取次之形狀:

$$X=\begin{Vmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & d & e \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} \varepsilon & \frac{\varepsilon}{2} & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & d & e \end{Vmatrix}^{-1} \quad (\varepsilon^2=\eta^2=1)。 \tag{63}$$

並不變動 X, 我們可以在(62)式中乘 X_{I} 以這樣的純量, 使得 $|X_{\mathrm{I}}|=1$。在所予的情形,這就使得等式 $a^2e=1$ 成立,故有 $e=a^{-2}$。

我們來計算矩陣 X_{I}^{-1} 的元素。爲此寫出係數矩陣爲 X_{I} 的線性變換:

$$\begin{aligned} y_1&=ax_1+bx_2+cx_3, \\ y_2&=ax_2, \\ y_3&=dx_2+a^{-2}x_3。 \end{aligned}$$

在這組方程中對 x_1, x_2, x_3 解出。那末我們就得出係數矩陣爲逆矩陣 X_{I}^{-1} 的變換:

$$\begin{aligned} x_1&=a^{-1}y_1-(a^{-2}b-cd)y_2-acy_3, \\ x_2&=a^{-1}y_2, \\ x_3&=-ady_2+a^2y_3。 \end{aligned}$$

因此我們求得:

$$X_{\mathrm{I}}^{-1}=\begin{Vmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & d & a^{-2} \end{Vmatrix}^{-1}=\begin{Vmatrix} a^{-1} & cd-a^{-2}b & -ac \\ 0 & a^{-1} & 0 \\ 0 & -ad & a^2 \end{Vmatrix}。$$

(63)式給予:

$$X=\begin{Vmatrix} \varepsilon & (\varepsilon-\eta)acd+\frac{\varepsilon}{2} & a^2c(\eta-\varepsilon) \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & (\varepsilon-\eta)da^{-1} & \eta \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} \varepsilon & (\varepsilon-\eta)vw+\frac{\varepsilon}{2} & (\eta-\varepsilon)v \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & (\varepsilon-\eta)w & \eta \end{Vmatrix}$$

$$(v=a^2c;\ w=a^{-1}d)。 \tag{64}$$

解 X 與兩個任意的參數 v, w 以及兩個任意的符號 ε, η 有關。

§7. 求出降秩矩陣的 m 次方根

轉移到情形 $|A|=0$ (A 爲降秩矩陣)的分析。

有如第一種情形,化矩陣 A 爲若唐法式:

$$\begin{aligned} A=U\{&\lambda_1E^{(p_1)}+H^{(p_1)}, \cdots, \lambda_uE^{(p_u)}+H^{(p_u)}; \\ &H^{(q_1)}, H^{(q_2)}, \cdots, H^{(q_t)}\}U^{-1}; \end{aligned} \tag{65}$$

此處我們以 $(\lambda-\lambda_1)^{p_1}, \cdots, (\lambda-\lambda_u)^{p_u}$ 記矩陣 A 諸對應於非零特徵數的

初級因子,而以$\lambda^{q_1}, \lambda^{q_2}, \cdots, \lambda^{q_t}$記對應於零特徵數的初級因子。

那末

$$A=U\{A_1, A_2\}U^{-1}, \tag{66}$$

其中

$$A_1=\{\lambda_1 E^{(p_1)}+H^{(p_1)}, \cdots, \lambda_u E^{(p_u)}+H^{(p_u)}\},$$
$$A_2=\{H^{(q_1)}, H^{(q_2)}, \cdots, H^{(q_t)}\}。 \tag{67}$$

我們注意,A_1是滿秩矩陣($|A_1|\neq 0$),而A_2是冪零性指標為$\mu=$ $=\max(q_1, q_2, \cdots, q_t)$的冪零矩陣($A_2^\mu=0$)。

由原方程(54)得出矩陣A與未知矩陣X的可易性,因而得出他們的相似矩陣

$$U^{-1}AU=\{A_1, A_2\} \text{ 與 } U^{-1}XU \tag{68}$$

的可易性。

有如§2(定理3)中所已經證明,從矩陣(68)的可易性與矩陣A_1,A_2沒有公共特徵數這一事實,(68)中第二個矩陣有對應的準對角形

$$U^{-1}XU=\{X_1, X_2\}。 \tag{69}$$

以矩陣A與X的相似矩陣

$$\{A_1, A_2\} \text{ 與 } \{X_1, X_2\}$$

代進方程(54),我們換方程(54)為兩個方程:

$$X_1^m=A_1, \tag{70}$$

$$X_2^m=A_2。 \tag{71}$$

因為$|A_1|\neq 0$,故對於方程(70)可以應用上節的結果。所以可由公式(62)求得X_1:

$$X_1=X_{A_1}\{\sqrt[m]{\lambda_1 E^{(p_1)}+H^{(p_1)}}, \cdots, \sqrt[m]{\lambda_u E^{(p_u)}+H^{(p_u)}}\}X_{A_1}^{-1}。 \tag{72}$$

這樣一來,祇要討論方程(71),亦卽祇要求出冪零矩陣A_2的所有m次方根,而且A_2是若唐法式:

$$A_2=\{H^{(q_1)}, H^{(q_2)}, \cdots, H^{(q_t)}\}。 \tag{73}$$

$\mu=\max(q_1, q_2, \cdots, q_t)$為矩陣$A_2$的冪零性指標。從$A_2^\mu=0$與(71)我們得出:

$$X_2^{m\mu}=0。$$

最後這個等式說明未知矩陣 X_2 亦是冪零的，其冪零性指標為 ν，且有 $m(\mu-1)<\nu\leqslant m\mu$。化矩陣 X_2 為若唐式：

$$X_2=T\{H^{(v_1)}, H^{(v_2)}, \cdots, H^{(v_s)}\}T^{-1} \tag{74}$$

$$(v_1, v_2, \cdots, v_s\leqslant\nu)。$$

把這一等式的兩節昇到 m 次乘冪。我們得出：

$$A_2=X_2^m=T\{[H^{(v_1)}]^m, [H^{(v_2)}]^m, \cdots, [H^{(v_s)}]^m\}T^{-1}。 \tag{75}$$

現在我們來弄清楚，矩陣$[H^{(v)}]^m$有些什麼初級因子❶。以 $\boldsymbol{H}$ 記基底為 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_v$ 的 v-維向量空間中有所予矩陣 $H^{(v)}$ 的線性運算子。那末從矩陣 $H^{(v)}$ 的形狀（在矩陣 $H^{(v)}$ 中第一上對角線內諸元素都等於1而所有其餘的元素都等於零）得出

$$\boldsymbol{He}_1=\boldsymbol{0}, \boldsymbol{He}_2=\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{He}_v=\boldsymbol{e}_{v-1}。 \tag{76}$$

這些等式證明了，對於運算子 $\boldsymbol{H}$，向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_v$ 構成若唐向量鏈，其所對應的初級因子為 λ^v。

等式(76)可以寫為：

$$\boldsymbol{He}_j=\boldsymbol{e}_{j-1} \quad (j=1, 2, \cdots, v; e_0=0)。$$

顯然有

$$\boldsymbol{H}^m\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{e}_{j-m} \quad (j=1, 2, \cdots, v, \boldsymbol{e}_0=\boldsymbol{e}_{-1}=\cdots=\boldsymbol{e}_{-m+1}=0)。 \tag{77}$$

表數 v 為次之形狀：

$$v=km+r \quad (r<m),$$

其中 k，r 為非負整數。裂分基底向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_v$為次之樣式：

$$\begin{array}{llll}
\boldsymbol{e}_1, & \boldsymbol{e}_2, & \cdots, & \boldsymbol{e}_m, \\
\boldsymbol{e}_{m+1}, & \boldsymbol{e}_{m+2}, & \cdots, & \boldsymbol{e}_{2m}, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\boldsymbol{e}_{(k-1)m+1}, & \boldsymbol{e}_{(k-1)m+2}, & \cdots, & \boldsymbol{e}_{km}, \\
\boldsymbol{e}_{km+1}, & \boldsymbol{e}_{km+2}, & \cdots, & \boldsymbol{e}_{km+r}。
\end{array} \tag{78}$$

❶ 第六章，§7 末尾的定理 9 已經給予這個問題的答案。此處我們必須用另一方法來研究這個問題，因為我們不僅要求出矩陣$[H^{(v)}]^m$的初級因子，而且要求出演化矩陣$[H^{(v)}]^m$為若唐式的矩陣 $T_{v,m}$。

在這個表式中，我們有 m 個列：前 r 個列的每一列中含有 $k+1$ 個向量，其餘諸列中含有 k 個向量。等式(77)說明了，每一列向量對於運算子 H^m 構成向量的若唐鏈。如果對於向量(78)的序數不照行來順次記出而按列來順次記出，那末我們得出這樣的新基底，使得運算子 H^m 的矩陣有次之若唐法式：

$$\{\underbrace{H^{(k+1)},\cdots,H^{(k+1)}}_{r},\quad \underbrace{H^{(k)},\cdots,H^{(k)}}_{m-r}\}\text{❶},$$

故有

$$[H^{(v)}]^m=P_{v,m}\{\underbrace{H^{(k+1)},\cdots,H^{(k+1)}}_{r},\quad \underbrace{H^{(k)},\cdots,H^{(k)}}_{m-r}\}P_{v,m}^{-1},\tag{79}$$

其中矩陣 $P_{v,m}$（從一個基底到另一基底的演化矩陣）有次之形狀（參考第三章，§ 4）：

$$P_{v,m}=\left\|\begin{array}{l}\overbrace{1\ \ 0\cdots0}^{m}\ \ 0\cdots\\ 0\ \ 0\cdots0\ \ 1\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ 0\ \ 0\cdots0\\ 0\ \ 1\cdots0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right\|\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}m\text{。}\tag{80}$$

矩陣 $H^{(v)}$ 有一個初級因子 $\lambda^{(v)}$。把矩陣 $H^{(v)}$ 昇到 m 次冪時這個初級因子就有“裂分”。有如(79)式所說明，矩陣 $[H^{(v)}]$ 有次諸初級因子：

$$\underbrace{\lambda^{k+1},\cdots,\lambda^{k-1}}_{r},\quad \underbrace{\lambda^{k},\cdots,\lambda^{k}}_{m-r}\text{。}$$

現在回到等式(75)，假設：

$$v_i=k_im+r_i\quad(0\leqslant r_i<m,\ k_i\geqslant 0;\ i=1,2,\cdots,s)\text{。}\tag{81}$$

❶ 在 $k=0$ 時，諸子塊 $\underbrace{H^{(k)},\cdots,H^{(k)}}_{m-r}$ 不會出現而這個矩陣的形狀爲 $\{\underbrace{H^{(1)},\cdots,H^{(1)}}_{r}\}$。

那末由於(79),等式(75)可以寫爲:

$$A_2=X_2^m=TP\{\underbrace{H^{(k_1+1)},\cdots,H^{(k_1+1)}}_{r_1},\quad\underbrace{H^{(k_1)},\cdots,H^{(k_1)}}_{m-r_1},$$

$$\underbrace{H^{(k_2+1)},\cdots,H^{(k_2+1)}}_{r_2},\quad H^{(k_2)},\cdots\}P^{-1}T^{-1},\tag{82}$$

其中 $$P=\{P_{v_1,m},P_{v_1,m},\cdots,P_{v_s,m}\}。$$

比較(82)與(73),我們看到,如不計次序,諸子塊

$$H^{(k_1+1)},\cdots,H^{(k_1+1)},H^{(k_1)},\cdots,H^{(k_1)},H^{(k_2+1)},\cdots,H^{(k_2+1)},\cdots\tag{83}$$

必須與次諸子塊重合:

$$H^{(q_1)},H^{(q_2)},\cdots,H^{(q_t)}。\tag{84}$$

我們約定稱初級因子組 $\lambda^{v_1},\lambda^{v_2},\cdots,\lambda^{v_s}$ 爲對於 X_2 可能,如果把矩陣昇到 m 次冪後,這些初級因子可以裂分來產生矩陣 A_2 的已知初級因子組:$\lambda^{q_1},\lambda^{q_2},\cdots,\lambda^{q_t}$。可能初級因子組的組數常爲有限,因爲

$$\max(v_1,v_2,\cdots,v_s)\leqslant m\mu,\quad v_1+v_2+\cdots+v_s=n_2\tag{85}$$

(n_2 爲矩陣 A_2 的級)。

在每一個具體的情形對於 X_2 的可能初級因子組可以很容易的由有限次計算來定出。

我們來證明,對於每一可能初級因子組 $\lambda^{v_1},\lambda^{v_2},\cdots,\lambda^{v_s}$ 都有方程(71)的對應解存在,且來定出所有的這些解。在這一情形有演化矩陣 Q 存在,使得

$$\{H^{(k_1+1)},\cdots,H^{(k_1+1)},H^{(k_1)},\cdots,H^{(k_1)},H^{(k_2+1)},\cdots\}=Q^{-1}A_2Q。\tag{86}$$

矩陣 Q 在準對角形矩陣中實行諸子塊的置換,使基底中諸向量得到適當的序數。所以矩陣 Q 是可以作爲已知的。應用(86),我們從(82)得出:

$$A_2=TPQ^{-1}A_2QP^{-1}T^{-1}。$$

故有 $$TPQ^{-1}=X_{A_2}$$

或

$$T = X_{A_2} Q P^{-1}, \tag{87}$$

其中 X_{A_2} 是與 A_2 可易的任意矩陣。

在(74)中代 T 以其表示式(87)，我們有：

$$X_2 = X_{A_2} Q P^{-1} \{H^{(v_1)}, H^{(v_2)}, \cdots, H^{(v_s)}\} P Q^{-1} X_{A_2}^{-1}。 \tag{88}$$

由(69)，(72)與(88)，我們得出包含所要求出的所有解的一般公式：

$$X = U\{X_{A_1}, X_{A_2} Q P^{-1}\} \cdot \{\sqrt[m]{\lambda_1 E^{(p_1)} + H^{(p_1)}}, \cdots, \sqrt[m]{\lambda_u E^{(p_u)} + H^{(p_u)}}, \\ H^{(v_1)}, \cdots, H^{(v_s)}\} \cdot \{X_{A_1}^{-1}, P Q^{-1} X_{A_2}^{-1}\} U^{-1}。 \tag{89}$$

讀者要注意，降秩矩陣的 m 次方根不一定常能存在。他的存在與對於矩陣 X_2 的可能初級因子組的存在有關。

易知，例如，方程

$$X^m = H^{(p)}$$

在 $m > 1$，$p > 1$ 時是沒有解的。

例　要求出矩陣

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

的平方根，亦卽求出方程

$$X^2 = A$$

的所有解。在所予的情形 $A = A_2$，$X = X_2$，$m = 2$，$t = 2$，$q_1 = 2$，$q_2 = 1$。矩陣 X 祇能有一個初級因子 λ^3。故 $s = 1$，$v_1 = 3$，$k_1 = 1$，$r_1 = 1$ 而且[參考(80)]。

$$P = P_{3,2} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} = P^{-1}, \quad Q = E。$$

此外，有如§6末尾的例，可以在(88)式中設

$$X_{A_2} = \begin{Vmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & d & a^{-2} \end{Vmatrix}, \quad X_{A_2}^{-1} = \begin{Vmatrix} a^{-1} & cd - a^{-2}b & -ac \\ 0 & a^{-1} & 0 \\ 0 & -ad & a^2 \end{Vmatrix}。$$

從這個公式我們得出：

$$X = X_2 = X_{A_2} P^{-1} H^{(3)} P X_{A_2}^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{-1} & 0 \end{Vmatrix},$$

其中 $\alpha = ca^{-1} - a^2 d$ 與 $\beta = a^3$ 都是任意的參數。

§8. 矩陣的對數

討論矩陣方程

$$e^X = A。\tag{90}$$

這個方程的所有解稱爲矩陣 A 的(自然)對數且記之以 $\ln A$。

矩陣 A 的特徵數 λ_j 與矩陣 X 的特徵數 ξ_j 之間有關係式 $\lambda_j = e^{\xi_j}$；故如方程(90)有解,那末矩陣 A 的所有特徵數都不等於零,因而矩陣 A 是滿秩的($|A| \neq 0$)。這樣一來，對於方程(90)有解存在的必要條件是 $|A| \neq 0$。下面我們將看到這個條件亦是充分的。

故設 $|A| \neq 0$。寫出矩陣 A 的初級因子:

$$(\lambda-\lambda_1)^{p_1},\ (\lambda-\lambda_2)^{p_2},\ \cdots,\ (\lambda-\lambda_u)^{p_u}$$
$$(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_u \neq 0,\ p_1+p_2+\cdots+p_u = n)\tag{91}$$

對應於這些初級因子,化矩陣 A 爲若唐法式:

$$A = U\tilde{A}U^{-1} =$$
$$= U\{\lambda_1 E^{(p_1)} + H^{(p_1)},\ \lambda_2 E^{(p_2)} + H^{(p_2)},\ \cdots,\ \lambda_u E^{(p_u)} + H^{(p_u)}\}U^{-1}。\tag{92}$$

因爲函數 e^ξ 的導式對於所有值 ξ 都不等於零,故(參考第六章,§7末尾)從矩陣 X 轉移到矩陣 $A = e^X$ 時,初級因子不能裂分,亦即矩陣 X 有初級因子

$$(\lambda-\xi_1)^{p_1},\ (\lambda-\xi_2)^{p_2},\ \cdots,\ (\lambda-\xi_u)^{p_u},\tag{93}$$

其中 $e^{\xi_j} = \lambda_j (j=1, 2, \cdots, u)$, 亦即 ξ_j 是值 $\ln\lambda_j$ 的一個 $(j=1, 2, \cdots, u)$。

在變數 λ 的複平面中我們取一個圓心在點 λ_j 半徑 $< |\lambda_j|$ 的圓，且以 $f_j(\lambda) = \ln\lambda$ 記函數 $\ln\lambda$ 在所討論的圓中的這一分支,使其在點 λ_j 所取的值等於矩陣 X 的特徵數 ξ_j $(j=1, 2, \cdots, u)$。此後設:

$$\ln(\lambda_j E^{(p_j)} + H^{(p_j)}) = f_j(\lambda_j E^{(p_j)} + H^{(p_j)}) = \ln\lambda_j E^{(p_j)} + \lambda_j^{-1} H^{(p_j)} + \cdots\tag{94}$$

因爲 $\ln\lambda$ 的導式(在 λ 平面的有限部分)永遠不等於零,所以矩陣(94)祇有一個初級因子 $(\lambda-\xi_j)^{p_j}$。由於這一準對角形矩陣

$$\{\ln(\lambda_1 E^{(p_1)} + H^{(p_1)}),\ \ln(\lambda_2 E^{(p_2)} + H^{(p_2)}),\ \cdots,\ \ln(\lambda_u E^{(p_u)} + H^{(p_u)})\}\tag{95}$$

與未知矩陣 X 有相同的初級因子，故有這樣的矩陣 $T(|T|\neq 0)$ 存在，使得

$$X=T\{\ln(\lambda_1 E^{(p_1)}+H^{(p_1)}),\ \cdots,\ \ln(\lambda_u E^{(p_u)}+H^{(p_u)})\}T^{-1}。\tag{96}$$

為了定出矩陣 T，我們注意

$$A=e^X=T\{\lambda_1 E^{(p_1)}+H^{(p_1)},\ \cdots,\ \lambda_u E^{(p_u)}+H^{(p_u)}T^{-1}。\tag{97}$$

比較(97)與(92)，我們求得：

$$T=UX_{\tilde{A}},\tag{98}$$

其中 $X_{\tilde{A}}$ 是與矩陣 $\tilde{A}$ 可易的任意矩陣。在 (96) 中，代 T 以其表示式 (98)，我們得出包含矩陣的所有對數的一般公式：

$$X=UX_{\tilde{A}}\{\ln(\lambda_1 E^{(p_1)}+H^{(p_1)}),$$

$$\ln(\lambda_2 E^{(p_2)}+H^{(p_2)}),\ \cdots,\ \ln(\lambda_u E^{(p_u)}+H^{(p_u)})\}X_{\tilde{A}}^{-1}U^{-1},\tag{99}$$

註　如果矩陣 A 的所有初級因子兩兩互質，那末在等式 (99) 的右節可以除去因式 $X_{\tilde{A}}$ 與 $X_{\tilde{A}}^{-1}$（參考 §6 中類似的註）。

第九章　U-空間中線性運算子

§1. 緒言

在第三與第七章中我們曾經研究任意 n 維向量空間的線性運算子。這種空間的所有基底，彼此的地位是均等的。已予線性運算子在每一基底中對應於某一矩陣。在不同的基底中，同一運算子所對應的矩陣，都彼此相似。這樣一來，在 n 維向量空間中線性運算子的研究給予了可能性來揭露相似矩陣類中諸矩陣所同時具有的性質。

在本章的開始，我們在 n 維向量空間中引進一種度量，就是對於每兩個向量都與某一個數——他們的"無向積"——有一種特殊的關係。藉助於無向積我們定出向量的"長"與兩個向量間"角的餘弦"。這種度量給我們帶來了 U-空間，如果基域 K 是所有複數的域，帶來了歐幾里得空間，如果 K 是所有實數的域。

在本章中，我們要研究與度量空間相結合的線性運算子的性質。對於度量空間並不是所有基底都是地位均等的。但是所有正交基底的地位卻是均等的。從一個正交基底變到另一個正交基在 U-空間(歐幾里得空間)中要藉助於特殊的——U-(正交)——變換來得出。所以 U-空間(歐幾里得空間)中，在兩個不同的基底裏面，對應於同一線性運算子的兩個矩陣，彼此 U-相似(正交相似)。這樣一來，在 n 維度量空間中研究線性運算子，就是研究矩陣的這種性質，當其從已予矩陣變到其 U-相似或正交相似矩陣時，並無變動的性質。這就很自然的使我們來研究特殊的(規範，安密達，U-，對稱，反對稱，正交)矩陣類的性質。

§2. 空間的度量

討論複數域上空間 $\boldsymbol{R}$ 的向量。設對 $\boldsymbol{R}$ 中每兩個向量 $\boldsymbol{x}$ 與 $\boldsymbol{y}$，取定其次序後，對應於某一複數，稱爲這兩個向量的無向積，且記之以 $(\boldsymbol{xy})$

或(xy)。再者，設"無向積"有次諸性質：

對於 $\boldsymbol{R}$ 中任何向量 x, y, z 與任一複數 α，都有：

$$\left.\begin{aligned} &1. \quad (xy)=\overline{(yx)}❶, \\ &2. \quad (\alpha x, y)=\alpha(xy), \\ &3. \quad (x+y, z)=(xz)+(yz) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

在這一情形我們說在空間 $\boldsymbol{R}$ 中帶進了安密達度量。

我們還要注意，由 1，2 與 3，對於 $\boldsymbol{R}$ 中任何 x, y, z 都有：

2'.　$(x, \alpha y)=\bar{\alpha}(xy)$，

3'.　$(x, y+z)=(x, y)+(x, z)$。

從 1 推知，對於任何向量 x，無向積 (xx) 都是實數。這個數稱為向量 x 的範數且記之以 Nx：$Nx=(xx)$。

如果對於 $\boldsymbol{R}$ 中任何向量都有：

$$4.\quad Nx=(xx)\geqslant 0, \qquad (2)$$

那末安密達度量稱為非負的。如果還有：

$$5.\quad Nx=(xx)>0 \text{ 如其 } x\neq 0, \qquad (3)$$

那末安密達度量稱為恆正的。

定義 1.　有恆正安密達度量的向空間 $\boldsymbol{R}$ 稱為 U-空間❷。

在本章中我們要討論有限維 U-空間❸。

向量 x 的長是指❹ $\sqrt{Nx}=|x|=\sqrt{(x,x)}$。由 2 與 5 知每一個不等於零的向量有正的長而且祇有零向量的長始能等於零。向量 x 稱為標準的(亦稱么向量或垂直素)，如果 $|x|=1$。為了"標準化"任一向量 $x\neq 0$，祇要乘這個向量以任一複數 λ，其絕對值 $|\lambda|=\frac{1}{|x|}$。

❶　數上面的橫線是指換原數為其共軛複數。

❷　有任意度量的(不一定恆正的) n 維向量空間的研究可以在論文[92]還有書[21](有柯召譯本)的第九第十章中找到。

❸　在本章 §2-7 的所有情形中，如果沒有特別提出空間的有限維性時，所有的討論對於無限維空間仍然有效。

❹　此處符號 $\sqrt{\ }$ 記方根的非負(算術)值。

與平常的三維向量空間相類似，兩個向量 $\boldsymbol{x}$ 與 $\boldsymbol{y}$ 稱爲正交的（記之以 $\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}$），如果 $(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y})=0$。在此時由 1, 3, 3′ 得出：

$$N(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{y}\boldsymbol{y})=N\boldsymbol{x}+N\boldsymbol{y},$$

亦卽（商高定理）！

$$|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2=|\boldsymbol{x}|^2+|\boldsymbol{y}|^2\quad(\boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y})。$$

設 U-空間 $\boldsymbol{R}$ 有有限維數 n。在 $\boldsymbol{R}$ 中取任一基底 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$。以 x_i 與 y_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 記向量 $\boldsymbol{x}$ 與 $\boldsymbol{y}$ 在這個基底中的對應坐標：

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{e}_i,\quad \boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{n}y_i\boldsymbol{e}_i。$$

那末由 2, 3, 2′ 與 3′，有

$$(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y})=\sum_{i,k=1}^{n}h_{ik}x_i\bar{y}_k,\tag{4}$$

其中

$$h_{ik}=(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_k)\quad(i,k=1,2,\cdots,n)。\tag{5}$$

特別的，

$$N\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x})=\sum_{i,k=1}^{n}h_{ik}x_i\bar{x}_k。\tag{6}$$

由 1 與（5）得出：

$$h_{ki}=\bar{h}_{ik}\quad(i,k=1,2,\cdots,n)。\tag{7}$$

型 $\sum_{i,k=1}^{n}h_{ik}x_i\bar{x}_k$，其中 $h_{ki}=\bar{h}_{ik}$ $(i,k=1,2,\cdots,n)$ 者，稱爲安密達型❶。這樣一來，向量的範數亦卽他的長的平方，就表爲他的坐標的安密達型。故有“安密達度量”的名稱。由 4 知位於等式（6）右節的型是非負的，對於變數 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的所有值都有：

$$\sum_{i,k=1}^{n}h_{ik}x_i\bar{x}_k\geqslant 0。\tag{8}$$

由於補充條件 5，這個型是恆正的，亦卽（8）式中的 = 號祇在所有 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都等於零時始能成立。

❶ 與這個表示式相對應的，位於等式（4）右節的表示式，稱爲安密達雙線性型（關於値 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 與 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的）。

定義 2. 向量組 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_m$ 稱爲法正交的，如果

$$(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_k)=\delta_{ik}=\begin{cases}0 & \text{如其 } i\neq k,\\ 1 & \text{如其 } i=k,\end{cases}\quad (i, k=1, 2, \cdots, m)。\tag{9}$$

在 $m=n$ 時，其中 n 爲空間的維數，我們得出空間的法正交基底。

在 §7 中我們將證明，在每一個 n 維 U-空間中都有法正交基底存在。

設 x_i 與 y_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ 各爲向量 $\boldsymbol{x}$ 與 $\boldsymbol{y}$ 在法正交基底中的坐標。那末由於(4)，(5)與(9)，我們有

$$\left.\begin{aligned}(\boldsymbol{xy})&=\sum_{i=1}^{n}x_i\bar{y}_i,\\ N\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{xx})&=\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2,\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

我們在 n 維空間 $\boldsymbol{R}$ 中任意固定某一個基底。此時每一個度量間的基底都與某一個安密達恆正型 $\sum_{i,k=1}^{n} h_{ik}x_i\bar{x}_k$ 相結合，而且反轉來，根據(4)每一個這種型確定 $\boldsymbol{R}$ 中某一個安密達恆正度量。但是所有這些度量並不給予 n 維 U-空間以主要的差別。事實上，設對兩個這樣的度量各取無向積：$(\boldsymbol{xy})$與$(\boldsymbol{xy})'$。關於這些度量定出 $\boldsymbol{R}$ 中法正交基底：$\boldsymbol{e}_i$ 與 $\boldsymbol{e}_i'$ $(i=1, 2, \cdots, n)$。把 $\boldsymbol{R}$ 內在這些基底中有相同坐標的向量 $\boldsymbol{x}$ 與 $\boldsymbol{x}'$ 彼此相對應$(\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}')$。這個對應是仿射的❶。此外，由(10)有：

$$(\boldsymbol{xy})=(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}')'。$$

這樣一來，如不計空間的仿射變換時，n 維向量空間所有的安密達恆正度量都彼此重合。

如果基本數域 K 是實數域，那種適合公式 1, 2, 3, 4 與 5 的度量稱爲歐幾里得度量。

定義 3. 有正歐幾里得度量的實數域上向量空間 $\boldsymbol{R}$ 稱爲歐幾里得空間。

如果 x_i 與 y_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ 是在 n 維歐幾里得空間某一基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 中向量 $\boldsymbol{x}$ 與 $\boldsymbol{y}$ 的坐標，那末

$$(\boldsymbol{xy})=\sum_{i,k=1}^{n}s_{ik}x_iy_k,\quad N\boldsymbol{x}=|\boldsymbol{x}|^2=\sum_{i,k=1}^{n}s_{ik}x_ix_k。$$

❶ 是即變 $\boldsymbol{R}$ 中向量 $\boldsymbol{x}$ 爲 $\boldsymbol{R}$ 中向量 $\boldsymbol{x}'$ 的運算子 A 是線性滿秩的。

此處 $s_{ik}=s_{ki}$ $(i,k=1,2,\cdots,n)$都是實數❶。表示式 $\sum_{i,k=1}^{n} s_{ik}x_i x_k$ 稱為 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次型。由度量的恆正性推知，解析的給出這個度量的二次型 $\sum_{i,k=1}^{n} s_{ik}x_i x_k$ 是恆正的，亦即 $\sum_{i,k=1}^{n} s_{ik}x_i x_k>0$，如果 $\sum_{i=1}^{n} x_i^2>0$。

對於法正交基底有

$$(\boldsymbol{xy})=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad N\boldsymbol{x}=|\boldsymbol{x}|^2=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 。\tag{11}$$

當 $n=3$ 時我們得出三維歐幾里得空間中對於兩個向量的無向積與向量長的平方的已知公式。

§3. 向量線性相關性的格蘭姆判定

設歐幾里得或 U–空間 $\boldsymbol{R}$ 中向量 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ 線性相關，亦即有這樣的不全等於零的數 $c_1, c_2, \cdots, c_m$❷存在，使得

$$c_1\boldsymbol{x}_1+c_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{x}_m=0 。\tag{12}$$

順次左乘這些等式的兩節以 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ 我們得出：

$$\left.\begin{array}{l}(\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_1)\bar{c}_1+(\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2)\bar{c}_2+\cdots+(\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_m)\bar{c}_m=0,\\ (\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_1)\bar{c}_1+(\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_2)\bar{c}_2+\cdots+(\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_m)\bar{c}_m=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ (\boldsymbol{x}_m\boldsymbol{x}_1)\bar{c}_1+(\boldsymbol{x}_m\boldsymbol{x}_2)\bar{c}_2+\cdots+(\boldsymbol{x}_m\boldsymbol{x}_m)\bar{c}_m=0 。\end{array}\right\}\tag{13}$$

視 $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \cdots, \bar{c}_m$ 為齊次線性方程組(13)的非零解，而方程(13)的行列式為

$$\Gamma(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m)=\begin{vmatrix}(\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_1) & (\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2) & \cdots & (\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_m)\\ (\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_1) & (\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_2) & \cdots & (\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_m)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (\boldsymbol{x}_m\boldsymbol{x}_1) & (\boldsymbol{x}_m\boldsymbol{x}_2) & \cdots & (\boldsymbol{x}_m\boldsymbol{x}_m)\end{vmatrix}, \tag{14}$$

故此行列式必須等於零：

$$\Gamma(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m)=0 。$$

行列式 $\Gamma(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m)$ 稱為向量 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ 所組成的格蘭

❶ $s_{ik}=(e_i e_k)$ $(i, k=1, 2, \cdots, n)$。

❷ 在歐幾里得空間的情形，$c_1, c_2, \cdots, c_m$ 都是實數。

姆行列式。

反之，設格蘭姆行列式(14)等於零。那末方程組(13)有非零解 $\bar{c}_1$，$\bar{c}_2$，…，$\bar{c}_m$。等式(13)可以寫為：

$$\left.\begin{array}{l}(\boldsymbol{x}_1,\ c_1\boldsymbol{x}_1+c_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{x}_m)=0,\\(\boldsymbol{x}_2,\ c_1\boldsymbol{x}_1+c_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{x}_m)=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\(\boldsymbol{x}_m,\ c_1\boldsymbol{x}_1+c_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{x}_m)=0\text{。}\end{array}\right\}\qquad(13')$$

順次乘這些等式以 c_1，c_2，…，c_m 而後相加，我們得出：

$$N(c_1\boldsymbol{x}_1+c_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{x}_m)=0;$$

故由度量的恆正性，知有

$$c_1\boldsymbol{x}_1+c_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{x}_m=0,$$

亦即，向量 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_m$ 線性相關。

我們證明了：

定理 1. 為了使得向量 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_m$ 線性相關，充分必要的，是由這些向量所組成的格蘭姆行列式等於零。

我們要注意格蘭姆行列式的次之性質。

如果格蘭姆行列式的任一主子式等於零，那末這個格蘭姆行列式亦等於零。

事實上，主子式是部分向量的格蘭姆行列式。由主子式的等於零得出這些向量的線性相關性，因此全部向量是線性相關的。

例　給予實變數 t 的 n 個複函數 $f_1(t)$，$f_2(t)$，…，$f_n(t)$ 且都在閉隔間 $[\alpha\beta]$ 中片狀連續。要定出在什麼條件之下，他們是線性相關的。為此我們在 $[\alpha\beta]$ 中片狀連續函數空間裏面引進恆正度量，即取

$$(f,g)=\int_\alpha^\beta f(t)\overline{g(t)}\,dt\text{。}$$

那末應用格蘭姆判定(定理 1)到所予的函數就得出所求的條件：

$$\begin{vmatrix}\int_\alpha^\beta f_1(t)\overline{f_1(t)}\,dt & \cdots & \int_\alpha^\beta f_1(t)\overline{f_n(t)}\,dt\\\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\\\int_\alpha^\beta f_n(t)\overline{f_1(t)}\,dt & \cdots & \int_\alpha^\beta f_n(t)\overline{f_n(t)}\,dt\end{vmatrix}=0\text{。}$$

§4. 正射影

設在 U-空間或歐幾里得空間 $\boldsymbol{R}$ 中，給予任一向量 $\boldsymbol{x}$ 與某一基底爲 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ 的子空間 $\boldsymbol{S}$。我們要證明，向量 $\boldsymbol{x}$ 可以(而且是唯一的)表爲和的形狀:

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_S+\boldsymbol{x}_N,\\ &\boldsymbol{x}_S\in\boldsymbol{S}\ \text{而}\ \boldsymbol{x}_N\perp\boldsymbol{S}\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

其中

(記號⊥是表示向量的正交性；對於子空間的正交性是了解爲對於這個子空間中所有向量的正交性)；$\boldsymbol{x}_S$ 是向量在子空間 $\boldsymbol{S}$ 上的正射影，$\boldsymbol{x}_N$ 是射出向量。

圖 5

例　設 $\boldsymbol{R}$ 爲三維歐幾里得向量空間，而 $m=2$。所有的向量都從定點 O 引出。此時 S 爲一通過 O 的平面；x_S 爲向量 x 在平面 S 上的正射影；x_N 爲從向量 x 的末端到平面 S 上的垂線(圖 5)；$h=|x_N|$ 爲向量 x 的末端至平面 S 的距離。

爲了建立分解式(15)，表所求的 $\boldsymbol{x}_S$ 爲形狀

$$\boldsymbol{x}_S=c_1\boldsymbol{x}_1+c_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+c_m\boldsymbol{x}_m, \tag{16}$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 爲某些複數[1]。

爲了定出這些數，我們從次之關係式出發:

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_S, \boldsymbol{x}_k)=0\ \ (k=1, 2, \cdots, m)。 \tag{17}$$

在(17)中代 $\boldsymbol{x}_S$ 以其表示式(16)，我們得出:

$$\left.\begin{aligned}&(\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_1)c_1+\cdots+(\boldsymbol{x}_m\boldsymbol{x}_1)c_m+(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}_1)\cdot(-1)=0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &(\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_m)c_1+\cdots+(\boldsymbol{x}_m\boldsymbol{x}_m)c_m+(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}_m)\cdot(-1)=0,\\ &\boldsymbol{x}_1c_1+\cdots+\qquad\boldsymbol{x}_mc_m+\qquad\boldsymbol{x}_S\cdot(-1)=0\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

視這組等式爲有非零解 $c_1, c_2, \cdots, c_m, -1$ 的齊次線方程組，其係數

[1] 在歐幾里得空間中，$c_1, c_2, \cdots, c_m$ 都是實數。

行列式要等於零(預先對其主對角線摺轉)[1]:

$$\begin{vmatrix} (\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_1) & \cdots & (\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_m) & \boldsymbol{x}_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\boldsymbol{x}_m\boldsymbol{x}_1) & \cdots & (\boldsymbol{x}_m\boldsymbol{x}_m) & \boldsymbol{x}_m \\ (\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}_1) & \cdots & (\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}_m) & \boldsymbol{x}_S \end{vmatrix} = 0。\tag{19}$$

從這個行列式中,分出含有 $\boldsymbol{x}_S$ 的項,我們得到(很容易了解的方便的記法):

$$\boldsymbol{x}_S = -\frac{\begin{vmatrix} & & \boldsymbol{x}_1 \\ & \Gamma & \vdots \\ & & \boldsymbol{x}_m \\ (\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}_1) & \cdots\ (\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}_m) & 0 \end{vmatrix}}{\Gamma},\tag{20}$$

其中 $\Gamma=\Gamma(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m)$ 為向量 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ 的格蘭姆行列式(由於這些向量的線性無關性知 $\Gamma\neq 0$)。從(15)與(20)求得:

$$\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_S = \frac{\begin{vmatrix} & & \boldsymbol{x}_1 \\ & \Gamma & \vdots \\ & & \boldsymbol{x}_m \\ (\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}) & \cdots\ (\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}_m) & \boldsymbol{x} \end{vmatrix}}{\Gamma}。\tag{21}$$

公式(20)與(21)表出向量 $\boldsymbol{x}$ 在子空間 S 上的射影 $\boldsymbol{x}_S$ 與經過所予向量 $\boldsymbol{x}$ 與基子空間 S 的射出向量 $\boldsymbol{x}_N$。

還要注意一個重要公式。以 h 記向量 $\boldsymbol{x}_N$ 的長。那末由(15)與(21)得:

$$h^2 = (\boldsymbol{x}_N\boldsymbol{x}_N) = (\boldsymbol{x}_N\boldsymbol{x}) = \frac{\begin{vmatrix} & & (\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}) \\ & \Gamma & \vdots \\ & & (\boldsymbol{x}_m\boldsymbol{x}) \\ (\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}_1) & \cdots\ (\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}_m) & (\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}) \end{vmatrix}}{\Gamma},$$

[1] 位於等式(19)左節的行列式表示一個向量,其第 i 個坐標是在最後一列將諸向量 $x_1, \cdots, x_m, x_S$ 換為其第 i 個坐標($i=1, 2, \cdots, n$)來得出的;這些坐標是在某一個任意的基底中取定的。為了說明從(18)轉移到(19)的合理性,祇要在(18)的最後一個等式與(19)的最後一列中,換向量 $x_1, x_2, \cdots, x_m, x_S$ 為其第 i 個坐標就能看出。

亦卽

$$h^2=\frac{\Gamma(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{x})}{\Gamma(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m)}。 \tag{22}$$

長 h 還可以有次之解釋：

從一點引出向量 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{x}$ 且以這些向量爲邊構成一個 $m+1$ 維的平行多面體。h 是從邊 $\boldsymbol{x}$ 的末端到經過邊 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ 的底面 S 的這一平行多面體的高。

設 $\boldsymbol{y}$ 爲 S 中任一向量，而 $\boldsymbol{x}$ 爲 R 中任一向量。如果所有向量都從 n 維點空間的原點引出，那末 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$ 與 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_S|$ 各等於從向量 $\boldsymbol{x}$ 的末端到超越平面 S❶ 的斜高與高的值。故在寫出高不大於斜高時，我們有❷：

$$h=|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_S|\leqslant|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$$

（祇在 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}_S$ 時始有等號）。這樣一來，在所有的向量 $\boldsymbol{y}\in S$ 之間，向量 $\boldsymbol{x}_S$ 到所予向量 $\boldsymbol{x}\in R$ 有最小的偏差。值 $h=\sqrt{N(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_S)}$ 是近似法 $\boldsymbol{x}\approx\boldsymbol{x}_S$ 的測差平方❸。

§5. 格蘭姆行列式的幾何意義與一些不等式

1. 討論任意的向量 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m$。首先假設這些向量是線性無關的。在這一情形，由這些向量中任意的一些向量所構成的格蘭姆行列式都不等於零。那末根據(22)，有

$$\frac{\Gamma(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_{p+1})}{\Gamma(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_p)}=h_p^2>0 \quad (p=1, 2, \cdots, m-1) \tag{23}$$

而把這些不等式與不等式

$$\Gamma(\boldsymbol{x}_1)=(\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_1)>0 \tag{24}$$

逐項相乘，我們得出：

---

❶ 參考本節開始時的例子。

❷ $N(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=N(\boldsymbol{x}_N+\boldsymbol{x}_S-\boldsymbol{y})=N\boldsymbol{x}_N+N(\boldsymbol{x}_S-\boldsymbol{y})\geqslant N(\boldsymbol{x}_N)=h^2$。

❸ 關於度量函數空間對已予近似函數的應用可參考[2]。

$$\Gamma(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m) > 0\text{。}$$

這樣一來，對於線性無關的向量，格蘭姆行列式是正的，而對於線性相關的向量等於零。負的格蘭姆行列式是不會有的。

爲了簡便計，引進記號 $\Gamma_p = \Gamma(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_p)$ $(p=1, 2, \cdots, m)$。那末由(23)與(24)，有：

$$\sqrt{\Gamma_1} = |\boldsymbol{x}_1| = V_1,$$
$$\sqrt{\Gamma_2} = V_1 h_1 = V_2,$$

其中 V_2 爲由 $\boldsymbol{x}_1$ 與 $\boldsymbol{x}_2$ 所構成的平行四邊形的面積。再者，

$$\sqrt{\Gamma_3} = V_2 h_2 = V_3,$$

其中 V_3 爲由向量 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ 所構成的平行六面體的體積。繼續進行，我們得出：

$$\sqrt{\Gamma_4} = V_3 h_3 = V_4,$$

一般的有

$$\sqrt{\Gamma_m} = V_{m-1} h_{m-1} = V_m\text{。} \tag{25}$$

很自然的，稱 V_m 爲由向量 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ 爲邊所構成的 m 維平行多面體的體積❶。

以 $x_{1k}, x_{2k}, \cdots, x_{nk}$ 記 $\boldsymbol{R}$ 中對於某一法正交基底來說的向量 $\boldsymbol{x}_k (k=1, 2, \cdots, m)$ 的坐標，且設

$$X = \| x_{ik} \| \quad (i=1, 2, \cdots, n;\ k=1, 2, \cdots, m)\text{。}$$

那末根據(10)，我們有：

$$\Gamma_m = |X'\overline{X}|$$

因而[參考公式(25)]

$$V_m^2 = \Gamma_m = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_m \le n} \mathrm{mod} \begin{vmatrix} x_{i_1 1} & x_{i_1 2} & \cdots & x_{i_1 m} \\ x_{i_2 1} & x_{i_2 2} & \cdots & x_{i_2 m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{i_m 1} & x_{i_m 2} & \cdots & x_{i_m m} \end{vmatrix}^2\text{。} \tag{26}$$

❶ 公式(25)給予 m 維平行多面體體積的歸納的定義。

這個等式有次之幾何意義:

平行多面體體積的平方等於其在所有 m 維坐標子空間上射影的體積平方和。特別是在 $m=n$ 時由(26)得出:

$$V_n = \mathrm{mod} \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}。\tag{27}$$

藉助於公式 (20),(21),(22),(26),(27),解決了 n 維歐幾里得與 U-解析幾何中的一系列的基本度量問題。

2. 回到分解式(15)。由他直接得出:

$$(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}_S+\boldsymbol{x}_N,\ \boldsymbol{x}_S+\boldsymbol{x}_N) = (\boldsymbol{x}_S, \boldsymbol{x}_S) + (\boldsymbol{x}_N, \boldsymbol{x}_N) \geqslant (\boldsymbol{x}_N\boldsymbol{x}_N) = h^2,$$

結合(22)就給出不等式(對於任何向量 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{x}$)

$$\Gamma(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{x}) \leqslant \Gamma(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m)\Gamma(\boldsymbol{x});\tag{28}$$

而且等號成立的充分必要條件是與向量$\boldsymbol{x}$與向量 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ 正交。

故不難得出阿達馬不等式

$$\Gamma(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m) \leqslant \Gamma(\boldsymbol{x}_1)\Gamma(\boldsymbol{x}_2)\cdots\Gamma(\boldsymbol{x}_m),\tag{29}$$

其中等號成立的充分必要條件是向量 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ 兩兩正交。不等式(29)可表爲次之顯明的幾何現象:

平行多面體的體積不超過其邊長的乘積,而且祇在其爲長方多面體時始能等於這一乘積。

可以給予阿達馬不等式以其平常的式樣,如在(29)中取 $m=n$ 且引進在某一法正交基底中由向量 $\boldsymbol{x}_k$ $(k=1, 2, \cdots, n)$ 的坐標 $x_{1k}, x_{2k}, \cdots, x_{nk}$ 所構成的所討論的行列式 Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix}。$$

那末由(27)與(29)得出

$$|\Delta|^2\leqslant\sum_{i=1}^n|x_{i1}|^2\sum_{i=1}^n|x_{i2}|^2\cdots\sum_{i=1}^n|x_{in}|^2。\tag{29'}$$

3．爲了建立與格蘭姆行列式相關的另一不等式，利用次之很容易驗證的公式：

如果 $\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{z}_k\in\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{y}_i\perp\boldsymbol{z}_k$ $(i, k=1, 2, \cdots, m)$，那末

$$\Gamma(\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{y}_2+\boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_m+\boldsymbol{z}_m)=$$

$$=\sum_{\mu=0}^{p}\sum_{\substack{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_\mu\leqslant m\\ 1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_{m-\mu}\leqslant m\\ (i\neq j)}}\Gamma(\boldsymbol{y}_{i_1}, \boldsymbol{y}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{y}_{i_\mu})\Gamma(\boldsymbol{z}_{j_1}, \boldsymbol{z}_{j_2}, \cdots, \boldsymbol{z}_{j_{m-\mu}})\text{[1]}。\tag{30}$$

設 S 爲 $\boldsymbol{R}$ 中任一子空間而 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ 爲 $\boldsymbol{R}$ 中任何向量。對於這些向量應用分解式(15)：

$$\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{x}_{iS}+\boldsymbol{x}_{iN}\ (\boldsymbol{x}_{iS}\in S, \boldsymbol{x}_{iN}\perp S;\ i=1, 2, \cdots, m)。$$

在(30)式中各換 $\boldsymbol{y}_i$ 與 $\boldsymbol{z}_i$ 爲 $\boldsymbol{x}_{iS}$ 與 $\boldsymbol{x}_{iN}$ $(i=1, 2, \cdots, m)$，我們得出：

$$\Gamma(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m)=\Gamma(\boldsymbol{x}_{1S}, \boldsymbol{x}_{2S}, \cdots, \boldsymbol{x}_{mS})+$$
$$+\sum_{i=1}^m\Gamma(\boldsymbol{x}_{1S}, \cdots, \boldsymbol{x}_{i-1,S}\,\boldsymbol{x}_{i+1,S}\cdots, \boldsymbol{x}_{mS})\Gamma(\boldsymbol{x}_{iS})+\cdots$$

因爲這個等式的右節中所有的項都是非負的，所以

$$\Gamma(\boldsymbol{x}_{1S}, \boldsymbol{x}_{2S}, \cdots, \boldsymbol{x}_{mS})\leqslant\Gamma(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m),\tag{31}$$

而且如果 $\Gamma(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m)\neq0$，那末祇有在 $\boldsymbol{x}_{iN}=0$ $(i=1, 2, \cdots, m)$ 時，等號始能成立。如果 $\Gamma(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m)=0$，那末由(31)得出 $\Gamma(\boldsymbol{x}_{1S}, \boldsymbol{x}_{2S}, \cdots, \boldsymbol{x}_{mS})=0$。

由於(25)可表不等式(31)爲次之幾何現象：

平行多面體在子空間 S 上正射影的體積不超過所予平行多面體的體積；祇有當其射出平行多面體落在 S 中或其本身的體積等於零時，這些體積始能和等。

4．現在來建立一個包含不等式(28)與不等式(29)的廣義的阿達馬不等式：

---

[1] 此處 $j_1, j_2, \cdots, j_{m-\mu}$ 是足數組 $i_1, i_2, \cdots, i_m$ 的補足數組。

$$\Gamma(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m) \leqslant \Gamma(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_p)\Gamma(\boldsymbol{x}_{p+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_m), \qquad (32)$$

而且等號成立的充分必要條件是向量 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_p$ 的每一個都同向量 $\boldsymbol{x}_{p+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ 中任何一個正交，或者行列式 $\Gamma(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_p)$，$\Gamma(\boldsymbol{x}_{p+1}, \cdots \boldsymbol{x}_m)$ 中至少有一個等於零。

不等式(32)有次之幾何意義：

平行多面體的體積不超過兩個互補"邊"的體積的乘積，而等於這一乘積的充分必要條件是這些"邊"互相正交或者在乘積中至少有一個體積等於零。

回到不等式(32)的推理。如果 $\Gamma(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_p)=0$，那末關係式(32)的等號常能成立。設 $\Gamma(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_p) \neq 0$。那末向量 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_p$ 線性無關，因而構成一個 p 維子空間 $\boldsymbol{S}$ 的基底。在 $\boldsymbol{S}$ 中取向量 $\boldsymbol{x}_{p+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ 的射影：

$$\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}_{kS} + \boldsymbol{x}_{kN} \ (\boldsymbol{x}_{kS} \in \boldsymbol{S}, \ \boldsymbol{x}_{kN} \perp \boldsymbol{S}; \ k = p+1, \cdots, m)。$$

在(30)式中取

$$\boldsymbol{y}_i = \begin{cases} \boldsymbol{x}_i & (i \leqslant p), \\ \boldsymbol{x}_{iS} & (i > p), \end{cases} \quad \boldsymbol{z}_i = \begin{cases} 0 & (i \leqslant p), \\ \boldsymbol{x}_{iN} & (i > p), \end{cases} \quad (i = 1, 2, \cdots, m)。$$

那末(30)式就給予：

$$\Gamma(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m) = \Gamma(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_p)\Gamma(\boldsymbol{x}_{p+1,S}, \cdots, \boldsymbol{x}_{mS})。$$

因此，應用關係式

$$\Gamma(\boldsymbol{x}_{p+1,S}, \cdots, \boldsymbol{x}_{mS}) \leqslant \Gamma(\boldsymbol{x}_{p+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_m),$$

我們就得出廣義的阿達馬不等式(32)。

5. 廣義阿達馬不等式(32)可以給出解析的形式。

設 $\sum_{i,k=1}^{n} h_{ik} x_i \bar{x}_k$ 為任一安密達僭正型。視 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 為 n 維向量空間 $\boldsymbol{R}$ 內在基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 中向量 $\boldsymbol{x}$ 的坐標，且取型 $\sum_{i,k=1}^{n} h_{ik} x_i \bar{x}_k$ 為 $\boldsymbol{R}$ 中基本度量型（參考本章，§ 2）。那末 R 是一個 U-空間。對於基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 取廣義阿達馬不等式：

$$\Gamma(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n) \leqslant \Gamma(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_p)\Gamma(\boldsymbol{e}_{p+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n)。$$

設 $H=\|h_{ik}\|_1^n$ 且注意 $(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_k)=h_{ik}(i, k=1, 2, \cdots, n)$，我們可以寫最後的不等式爲：

$$H\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix} \leqslant H\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & p\\ 1 & 2 & \cdots & p\end{pmatrix} H\begin{pmatrix}p+1 & \cdots & n\\ p+1 & \cdots & n\end{pmatrix} \quad (p<n); \qquad (33)$$

而且等號成立的充分必要條件是 $h_{ik}=h_{ki}=0$ $(i=1, 2, \cdots, p;\ k=p+1, \cdots, n)$。

不等式(33)對於任一安密達恆正型的係數矩陣 $H=\|h_{ik}\|_1^n$ 都能成立。特別的，不等式(33)能夠成立，如果 H 是二次恆正型 $\sum_{i, k=1}^{n} h_{ik}x_i x_k$ 的實係數矩陣❶。

6. 讀者要注意**布尼亞柯夫斯克不等式**。

對於任何向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in \boldsymbol{R}$ 都有

$$|(\boldsymbol{xy})|^2 \leqslant N\boldsymbol{x}N\boldsymbol{y}, \qquad (34)$$

而且祇是在向量 $\boldsymbol{x}$ 與 $\boldsymbol{y}$ 僅差一純量因子時，等號始能成立。

布尼亞柯夫斯克不等式的正確性可以從已經建立的次之不等式來立即推出：

$$\Gamma(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{xx}) & (\boldsymbol{xy}) \\ (\boldsymbol{yx}) & (\boldsymbol{yy}) \end{vmatrix} \geqslant 0。$$

與三維歐幾里得空間中向量的無向積相類似的，在 n 維 U-空間中可以引進由次之關係式❷所界說的向量 $\boldsymbol{x}$ 與 $\boldsymbol{y}$ 間的"角" θ：

$$\cos\theta = \frac{|(\boldsymbol{xy})|^2}{N\boldsymbol{x}\,N\boldsymbol{y}}。$$

由布尼亞柯夫斯克不等式，知 θ 有實數值。

---

❶ 廣義阿達馬不等式的解析推理曾在書[7]，§8中述及。

❷ 在歐幾里得空間中，向量 $\boldsymbol{x}$ 與 $\boldsymbol{y}$ 間的角 θ 爲次式所確定：

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{xy})}{|\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}|}。$$

§6. 正交向量序列

1. 以$[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_p]$記含有向量$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_p$的最小子空間。這個子空間是由向量$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_p$的所有可能的線性組合$c_1\boldsymbol{x}_1+c_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+c_p\boldsymbol{x}_p$所構成的($c_1, c_2, \cdots, c_p$為複數)[1]。如果向量$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_p$線性無關,那末他們構成子空間$[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_p]$的基底。在此時這個子空間是$p$維的。

含有有限的相同個數的向量或同含無限多個向量的兩個向量序列:

$\boldsymbol{X}$: $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \cdots$,

$\boldsymbol{Y}$: $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \cdots$,

稱為相抵的,如果對於所有可能的p都有

$$[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_p] \equiv [\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_p] \quad (p=1, 2, \cdots,)$$

向量序列

$\boldsymbol{X}$: $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots$

稱為滿秩的,如果對於任何p,向量$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_p$都是線性無關的。

向量序列稱為正交的,如果這一序列中任何兩個向量都是互相正交的。

正交化一個向量序列是了解為換這一向量序列為其相抵的正交序列。

定理 2. 每一個滿秩向量序列都可以使其正交化。在不計純量因子時,正交化後的向量序列中諸向量是唯一確定的。

證明 1. 我們先來證明定理的第二部分。設有兩個正交序列$\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots (\boldsymbol{Y})$與$\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots (\boldsymbol{Z})$都與同一滿秩序列$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots (\boldsymbol{X})$相抵。那末序列$\boldsymbol{Y}$與$\boldsymbol{Z}$彼此相抵。故對任何一個$p$都有數$c_{p1}, c_{p2}, \cdots, c_{pp}$存在,使得

[1] 在歐幾里得空間中,這些都是實數。

$$\boldsymbol{z}_p=c_{p1}\boldsymbol{y}_1+c_{p2}\boldsymbol{y}_2+\cdots+c_{p,p-1}\boldsymbol{y}_{p-1}+c_{pp}\boldsymbol{y}_p\quad(p=1,\ 2,\ \cdots)。$$

在這一等式的兩節對於 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_{p-1}$ 順次來取無向積且注意序列 $\boldsymbol{Y}$ 的正交性與關係式

$$\boldsymbol{z}_p\perp[\boldsymbol{z}_1,\ \boldsymbol{z}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{z}_{p-1}]\equiv[\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{y}_{p-1}],$$

我們得出：$c_{p1}=c_{p2}=\cdots=c_{p,p-1}=0$，因而

$$\boldsymbol{z}_{pp}=c_{pp}\boldsymbol{y}_p\quad(p=1,\ 2,\ \cdots)。$$

2. 對於任一滿秩向量序列 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots(\boldsymbol{X})$ 來具體實行正交化是由次之方法所得出的。

設 $\boldsymbol{S}_p\equiv[\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_p]$，$\Gamma_p=\Gamma(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_p)$ $(p=1, 2, \cdots)$。把向量 $\boldsymbol{x}_p$ 正射影於子空間 $\boldsymbol{S}_{p-1}$ $(p=1,\ 2,\ \cdots)$ ❶：

$$\boldsymbol{x}_p=\boldsymbol{x}_{pS_{p-1}}+\boldsymbol{x}_{pN},\ \boldsymbol{x}_{pS_{p-1}}\in S_{p-1},\ \boldsymbol{x}_{pN}\perp\boldsymbol{S}_{p-1}\quad(p=1,\ 2,\ \cdots)。$$

命：

$$\boldsymbol{y}_p=\lambda_p\boldsymbol{x}_{pN}\quad(p=1,\ 2,\ \cdots;\ \boldsymbol{x}_{1N}=\boldsymbol{x}_1),$$

其中 $\lambda_p(p=1,\ 2,\ \cdots)$ 是任意不為零的數。

那末(很容易看出)

$$\boldsymbol{Y}:\ \boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}_2,\ \cdots$$

是與序列 $\boldsymbol{X}$ 相抵的正交序列。定理 2 已經證明。

根據(21)，

$$\boldsymbol{x}_{pN}=\frac{\begin{vmatrix} & & \boldsymbol{x}_1\\ & \Gamma_{p-1} & \vdots\\ & & \boldsymbol{x}_{p-1}\\ (\boldsymbol{x}_p\boldsymbol{x}_1)\cdots & (\boldsymbol{x}_p\boldsymbol{x}_{p-1}) & \boldsymbol{x}_p\end{vmatrix}}{\Gamma_{p-1}}\quad(p=1,\ 2,\ \cdots;\ \Gamma_0=1)。$$

取 $\lambda_p=\Gamma_{p-1}$ $(p=1,\ 2,\ \cdots;\ \Gamma_0=1)$，我們對於正交化序列中向量得出次諸公式：

$$\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{y}_2=\begin{vmatrix}(\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_1) & \boldsymbol{x}_1\\ (\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{x}_1) & \boldsymbol{x}_2\end{vmatrix},\cdots,$$

❶ 在 $p=1$ 時我們取：$x_{1S_0}=0$，$x_{1N}=x_1$。

$$\cdots,\ \boldsymbol{y}_p=\begin{vmatrix}(\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_1) & \cdots(\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_{p-1}) & \boldsymbol{x}_1\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\\ (\boldsymbol{x}_{p-1}\boldsymbol{x}_1) & \cdots(\boldsymbol{x}_{p-1}\boldsymbol{x}_{p-1}) & \boldsymbol{x}_{p-1}\\ (\boldsymbol{x}_p\boldsymbol{x}_1) & \cdots(\boldsymbol{x}_p\boldsymbol{x}_{p-1}) & \boldsymbol{x}_p\end{vmatrix},\cdots \tag{35}$$

由於(22)，我們得出：

$$N\boldsymbol{y}_p=\Gamma_{p-1}^2 N\boldsymbol{x}_{pN}=\Gamma_{p-1}^2\cdot\frac{\Gamma_p}{\Gamma_{p-1}}=\Gamma_{p-1}\Gamma_p\ (p=1,2,\cdots;\ \Gamma_0=1)。 \tag{36}$$

故如命

$$\boldsymbol{z}_p=\frac{\boldsymbol{y}_p}{\sqrt{\Gamma_{p-1}\Gamma_p}}\ (p=1,2,\cdots), \tag{37}$$

我們就得出與所予序列 X 相抵的法正交序列 Z。

例 在區間$[-1,+1]$中片狀連續的實函數空間裏面，以等式

$$(f,g)=\int_{-1}^{+1}f(x)g(x)dx$$

來定出其無向積。

討論滿秩"向量"序列

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ \cdots$$

把他們按照公式(35)來正交化：

$$y_0=1,\ y_m=\begin{vmatrix}\frac{1}{1} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \cdots & 1\\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{7} & \cdots & x\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{7} & 0 & \cdots & x^2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & x^m\end{vmatrix}\quad (m=1,2,\cdots)。$$

在不計常數因子時，這些彼此正交的多項式與已知的拉讓得多項式一致❶：

$$P_0(x)=1,P_m(x)=\frac{1}{2^m m!}\ \frac{d^m(x^2-1)^m}{dx^m}\ (m=1,2,\cdots)。$$

同一冪序列 $1,x,x^2,x^3,\cdots$ 在另一度量

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)\tau(x)dx\ \ [\tau(x)\geqslant 0\ (a\leqslant x\leqslant b)]$$

時給予另一正交多項式序列。

例如，當 $a=-1$，$b=1$ 而 $\tau(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 時，我們得出切比雪夫多項式：

❶ 參考[16]，第84與以後諸頁。

$$T_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n \arccos x)。$$

在 $a=-\infty, b=+\infty$ 而 $\tau(x)=e^{-x^2}$ 時，我們得出切比雪夫-安密達多項式，諸如此類❶。

2. 還要注意對於法正交向量序列 $z_1, z_2, \cdots (Z)$ 的所謂培色爾不等式。設予任一向量 x。以 ξ_p 記這一向量在垂直素 z_p 上的射影：

$$\xi_p=(xz_p) \quad (p=1,2,\cdots)。$$

那末向量 x 在子空間 $S_p=[z_1, z_2, \cdots, z_p]$ 上的射影可表爲次之形狀[參考(20)]：

$$x_{S_p}=\xi_1 z_1+\xi_2 z_2+\cdots+\xi_p z_p \quad (p=1,2,\cdots)。$$

但 $Nx_{S_p}=|\xi_1|^2+|\xi_2|^2+\cdots+|\xi_p|^2 \leqslant Nx$。所以對於任何 p 都有

$$|\xi_1|^2+|\xi_2|^2+\cdots+|\xi_p|^2 \leqslant Nx。 \tag{38}$$

這是培色爾不等式。

對於 n 維有限維空間，這個不等式有很明顯的幾何意義。當 $p=n$ 時他變爲商高等式

$$|\xi_1|^2+|\xi_2|^2+\cdots+|\xi_n|^2=|x|^2。$$

對於無限維空間與無限序列 Z，由 (38) 得出級數 $\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2$ 的收斂性與不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2 \leqslant Nx=|x|^2。$$

建立級數

$$\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k z_k。$$

這個級數(對於任何 p)的第 p 個部分

$$\xi_1 z_1+\xi_2 z_2+\cdots+\xi_p z_p$$

等於向量 x 在子空間 $S_p=[z_1, z_2, \cdots, z_p]$ 上的射影 x_{S_p}，故爲向量 x 在這一子空間中最好的近似值：

$$N\left(x-\sum_{k=1}^{p}\xi_k z_k\right) \leqslant N\left(x-\sum_{k=1}^{p}c_k z_k\right),$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_p$ 爲任何複數。我們來算出其對應的偏差 δ_p 的平方：

❶ 有關他們的更詳細的敍述可參考[16]，第二章，§9 與[19]。

$$\delta_p^2=N\left(\boldsymbol{x}-\sum_{k=1}^{p}\xi_k\boldsymbol{z}_k\right)=\left(\boldsymbol{x}-\sum_{k=1}^{p}\xi_k\boldsymbol{z}_k,\ \boldsymbol{x}-\sum_{k=1}^{p}\xi_k\boldsymbol{z}_k\right)=N\boldsymbol{x}-\sum_{k=1}^{p}|\xi_k|^2。$$

故有
$$\lim_{p\to\infty}\delta_p^2=N\boldsymbol{x}-\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2。$$

如果
$$\lim_{p\to\infty}\delta_p=0,$$

那末我們說級數 $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\boldsymbol{z}_k$ 平均收斂(對範數收斂)於向量 $\boldsymbol{x}$。

在這一情形對於 $\boldsymbol{R}$ 中向量 $\boldsymbol{x}$ 有次之等式(在無限維空間的商高定理!)

$$N\boldsymbol{x}=|\boldsymbol{x}|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2。\tag{39}$$

如果對於 $\boldsymbol{R}$ 中任一向量 $\boldsymbol{x}$, 級數 $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\boldsymbol{z}_k$ 都平均收斂於向量 $\boldsymbol{x}$, 那末法正交向量序列 $\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots$ 稱為完全的。在這一情形,於(39)中換 $\boldsymbol{x}$ 以 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ 且對 $N(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$, $N\boldsymbol{x}$ 與 $N\boldsymbol{y}$ 應用等式(39)三次,很容易得出:

$$(\boldsymbol{x}\boldsymbol{y})=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\bar{\eta}_k\quad[\xi_k=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}_k),\ \eta_k=(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}_k);\ k=1,2,\cdots]。\tag{40}$$

例

討論所有在閉隔間$[0, 2\pi]$中片狀連續的複函數 $f(t)$ (t 為實變數)的空間。函數 $f(t)$ 的範數為次之等式所規定

$$Nf=\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt。$$

與這一定義相對應的兩個函數 $f(t)$ 與 $g(t)$ 的無向積有次之公式

$$(f,g)=\int_0^{2\pi}f(t)\overline{g(t)}dt。$$

取函數的無限序列

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikt}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)。$$

這些函數構成一個正交序列,因為

$$\int_0^{2\pi}e^{i\mu t}e^{-i\nu t}dt=\int_0^{2\pi}e^{i(\mu-\nu)t}dt=\begin{cases}0 & (\mu\neq\nu),\\ 2\pi & (\mu=\nu)。\end{cases}$$

級數

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}f_ke^{ikt}\quad\left(f_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)e^{-ikt}dt;\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right)$$

在隔間 $[0, 2\pi]$ 中平均收斂於函數 $f(t)$。這個級數稱為函數 $f(t)$ 的富里葉級數,而係數

$f_k(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 稱爲 $f(t)$ 的富里葉係數。

在富里葉級數論中證明了函數組 e^{ikt} $(k=0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 是完全的❶。

完全的這一條件給予派賽伐爾等式[參考等式(40)]。

$$\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt\int_0^{2\pi}\overline{g(t)}e^{ikt}dt.$$

如果 $f(t)$ 是實函數,那末 f_0 是實數,而 f_k 與 f_{-k} 爲共軛複數 $(k=1, 2, \cdots)$。命

$$f_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt=\frac{1}{2}(a_k+ib_k),$$

其中

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\,dt,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin kt\,dt\ (k=0, 1, 2, \cdots),$$

卽得:

$$f_k e^{ikt}+f_{-k}e^{-ikt}=a_k\cos kt+b_k\sin kt\quad(k=1, 2, \cdots)。$$

故對實函數 $f(t)$,富里葉級數取次之形狀:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)\left(\begin{array}{l} a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\,dt, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad k=0, 1, 2, \cdots \\ b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin kt\,dt, \end{array}\right)。$$

§7. 法正交基底

在歐幾里得空間或 U-空間 $\boldsymbol{R}$ 中任一有限維空間 $\boldsymbol{S}$ 的基底都是向量的滿秩序列,故由上節的定理 2 可以把他正交化與標準化。這樣一來,在任一有限維子空間 $\boldsymbol{S}$ 中(特別是整個空間 $\boldsymbol{R}$ 中,如果他是有限維的),都有法正交基底存在。

設 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 爲空間 $\boldsymbol{R}$ 的法正交基底。以 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 記任意向量 $\boldsymbol{x}$ 在這一基底中的坐標:

$$\boldsymbol{x}=\sum_{k=1}^{n} x_k\boldsymbol{e}_k。$$

右乘這個等式的兩節以 $\boldsymbol{e}_k$ 且注意到基底的法正交性,易知:

$$x_k=(\boldsymbol{x}\boldsymbol{e}_k)\quad(k=1, 2, \cdots, n),$$

亦卽在法正交基底中,向量的每一坐標等於他在基底的對應垂直系上

❶ 例如參考[16],第二章。

的射影

$$x=\sum_{k=1}^{n}(xe_k)e_k。\tag{41}$$

設 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 與 $x_1', x_2', \cdots, x_n'$ 爲 U-空間 $\boldsymbol{R}$ 中同一向量 x 在兩個不同的法正交基底 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 與 $e_1', e_2', \cdots, e_n'$ 中的對應坐標。坐標的變換公式有次之形狀：

$$x_i=\sum_{k=1}^{n}u_{ik}x_k'(i=1, 2, \cdots, n)。\tag{42}$$

此處，構成矩陣 $U=\|u_{ik}\|_1^n$ 的第 k 個列的係數 $u_{1k}, u_{2k}, \cdots, u_{nk}$，不難看出是向量 e_k' 在基底 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 中的坐標。故把基底 $e_1', e_2', \cdots, e_n'$ 的正交性寫爲坐標的條件，我們得出關係式

$$\sum_{i=1}^{n}u_{ik}\bar{u}_{il}=\delta_{kl}=\begin{cases}1 & (k \neq l),\\ 0 & (k=l)。\end{cases}\tag{43}$$

係數適合條件(43)的變換(42)稱爲 U-變換，而其對應矩陣 U 稱爲 U-矩陣。這樣一來，在 n 維 U-空間中從一個法正交基底轉移到另一個法正交基底時，其向量坐標的變換是一個 U-變換。

設予一個 n 維歐幾里得空間 $\boldsymbol{R}$。從 $\boldsymbol{R}$ 中一個法正交基底轉移到另一個法正交基底時，要施行坐標的變換

$$x_i=\sum_{k=1}^{n}v_{ik}x_k' \quad (i=1, 2, \cdots, n),\tag{44}$$

其係數間有次之關係式

$$\sum_{i=1}^{n}v_{ik}v_{il}=\delta_{kl} \quad (k, l=1, 2, \cdots, n)。\tag{45}$$

這種坐標變換稱爲正交的，而其對應矩陣 V 稱爲正交矩陣。

注意一種有趣味的正交化方法的矩陣寫法。設 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 爲任一元素爲複數的滿秩矩陣($|A|\neq 0$)。討論有法正交基底 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 的 U-空間 $\boldsymbol{R}$ 且以次諸等式來定出線性無關的向量 $a_1, a_2, \cdots, a_n$

$$a_k=\sum_{i=1}^{n}a_{ik}e_i \quad (k=1, 2, \cdots, n)。$$

對向量 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 來進行正交化。得出 $\boldsymbol{R}$ 中法正交基底 $u_1, u_2, \cdots, u_n$。設此時

$$u_k=\sum_{i=1}^{n} u_{ik}e_i \quad (k=1, 2, \cdots, n)。$$

那末

$$[a_1, a_2, \cdots, a_p]=[u_1, u_2, \cdots, u_p] \quad (p=1, 2, \cdots, n),$$

亦卽

$$a_1=c_{11}u_1,$$

$$a_2=c_{12}u_1+c_{22}u_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n=c_{1n}u_1+c_{2n}u_2+\cdots+c_{nn}u_n,$$

其中 c_{ik} $(i, k=1, 2, \cdots, n;\ i\leqslant k)$ 是某些複數。

當 $i>k$ 時取 $c_{ik}=0$ $(i, k=1, 2, \cdots, n)$ 我們有

$$a_k=\sum_{p=1}^{n} c_{pk}u_p \quad (k=1, 2, \cdots, n)。$$

轉移到坐標的關係且引進高三角形矩陣 $C=\|c_{ik}\|_1^n$ 與 U-矩陣 $U=\|u_{ik}\|_1^n$，我們得出：

$$a_{ik}=\sum_{p=1}^{n} u_{ip}c_{pk} \quad (i, k=1, 2, \cdots, n)。$$

或

$$A=UC \qquad (*)$$

根據這一公式，任一滿秩矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 都可以表爲一個 U-矩陣 U 對一個高三角形矩陣 C 的乘積。

因爲，在不計純量因子 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ $(|\varepsilon_i|=1;\ i=1, 2, \cdots, n)$ 時，正交化方法唯一的確定向量 $u_1, u_2, \cdots, u_n$，所以在公式(*)中，如不計對角形因子 $M=\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n\}$，則其因子 U 與 C 都是唯一確定的：

$$U=U_1M, \quad C=M^{-1}C_1。$$

這是可以直接來驗證的。

註 1. 如果 A 是實矩陣，那末在公式(*)中可以取實因子 U 與 C。此時 U 是一個正交矩陣。

註 2. 公式(*)對於降秩矩陣 $A(|A|=0)$ 仍然有效。這可以取 $A=\lim\limits_{m\to\infty} A_m$，其中 $|A_m|\neq 0(m=1, 2, \cdots)$ 來證明。

此時 $A_m=U_mC_m(m=1, 2, \cdots)$。從序列 U_m 中選取收斂子序列 U_{m_p} $(\lim\limits_{p\to\infty} U_{m_p}=U)$ 且取極限，由等式 $A_{m_p}=U_{m_p}C_{m_p}$ 當 $p\to\infty$ 時，我們得出所求的分解式 $A=UC$。但在 $|A|=0$ 的情形，卽使不計對角形因子 M，因子 U 與 C 不是唯一決定的。

註 3. 代替(*)式可以有公式

$$A=DW \qquad (**)$$

其中 D 爲低三角形，而 W 爲一個 U-矩陣。事實上，應用上面所建立的公式(*)於轉置矩陣 A'，

$$A'=UC,$$

再取 $W=U'$, $D=C'$, 我們就得出(**)❶。

§8. 關聯運算子

設在 n 維 U-空間 $\boldsymbol{R}$ 中給予任一線性運算子。

定義 4. 線性運算子 $\boldsymbol{A}^*$ 稱爲關於運算子 $\boldsymbol{A}$ 的關聯運算子，充分必要的，是對於 $\boldsymbol{R}$ 中任二向量 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ 次之等式都能成立:

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{y})。\tag{46}$$

我們來證明，對於每一個線性運算子 $\boldsymbol{A}$ 都有關聯運算子 $\boldsymbol{A}^*$ 存在，而且祇有一個。在證明時，於 $\boldsymbol{R}$ 中選取某一法正交基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$。那末[參考(41)]對於所求的運算子 $\boldsymbol{A}^*$ 與 $\boldsymbol{R}$ 中任一向量 $\boldsymbol{y}$ 都應當適合等式

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{y}=\sum_{k=1}^{n}(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_k。$$

由(46)，這個等式可以寫爲:

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{y}=\sum_{k=1}^{n}(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_k。\tag{47}$$

現在讓我們承認等式(47)爲運算子 $\boldsymbol{A}^*$ 的定義。

容易驗證，這樣界說的運算子 $\boldsymbol{A}^*$ 是線性的，且對於 $\boldsymbol{R}$ 中任二向量 $\boldsymbol{x}$ 與 $\boldsymbol{y}$，等式(46)都能適合。此外，等式(47)唯一的確定運算子 $\boldsymbol{A}^*$。這樣一來，我們就證明了關聯運算子 $\boldsymbol{A}^*$ 的存在與其唯一性。

設 $\boldsymbol{A}$ 爲 U-空間的線性運算子，而 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 爲在法正交基底 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{e}_n$ 中對應於這個運算子的矩陣。應用公式(41)於向量 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_k=$ $=\sum_{i=1}^{n}a_{ik}\boldsymbol{e}_i$，我們得出:

$$a_{ik}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_k,\ \boldsymbol{e}_i)\quad (i,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)。\tag{48}$$

現在設關聯運算子 $\boldsymbol{A}^*$ 在同一基底中對應於矩陣 $A^*=\|a_{ik}^*\|_1^n$。那末由公式(48)

❶ 從矩陣 U 是一個 U 矩陣知矩陣 U' 亦是一個 U 矩陣，因爲條件(43)可以寫爲矩陣的形式: $U'\bar{U}=E$，即得: $U\bar{U}'=E$。

$$a^*_{ik}=(A^*e_k,\ e_i)\quad(i,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)。\tag{49}$$

從(48)與(49)結合(46)得出：

$$a^*_{ik}=\bar{a}_{ki}\quad(i,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

亦卽

$$A^*=\bar{A}'。$$

矩陣 A^* 是 A 的複共軛轉置矩陣。這種矩陣稱爲關於 A 的關聯矩陣。

這樣一來，在法正交基底中，關聯運算子對應於關聯矩陣。

從關聯運算子的定義推得其次諸性質：

1° $(A^*)^*=A$,

2° $(A+B)^*=A^*+B^*$,

3° $(\alpha A)^*=\bar{\alpha}A^*$ （α 是一個純量），

4° $(AB)^*=B^*A^*$。

現在引進一個重要的概念。設 S 爲 R 中任一子空間。以 T 記 R 中與 S 正交的所有向量 y 的集合。易知，T 亦是 R 的子空間，而且 R 中每一個向量 x 都可以唯一的表爲和 $x=x_S+x_T$ 的形狀，其中 $x_S\in S$, $x_T\in T$, 亦卽次之分解式是成立的

$$R=S+T,\quad S\perp T。$$

應用前節中分解式(15)於 R 中任一向量 x，我們得出這一個分解式。T 稱爲 S 的正交補空間。顯然，S 亦是 T 的正交補空間。我們寫出 $S\perp T$ 是了解爲 S 中任何向量都與 T 中任一向量正交。

現在我們可以述及關聯運算子的基本性質：

5° 如果某一個子空間 S 對 A 不變，那末這個子空間的正交補空間 T 將對 A^* 不變。

事實上，設 $x\in S$, $y\in T$。那末由 $Ax\in S$ 得 $(Ax,\ y)=0$，故由(46)知 $(x,\ A^*y)=0$。因爲 x 是 S 中任一向量，所以 $A^*y\in T$，這就是所要證明的結果。

引進次之定義：

定義 5. 兩組向量 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m$ 與 $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_m$ 稱爲雙法正

交的，如果

$$(\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{y}_k)=\delta_{ik} \quad (i, k=1, 2, \cdots, m), \tag{50}$$

其中 δ_{ik} 爲克朗南格符號。

現在我們來證明次之論斷：

6° 如果 A 是一個單構線性運算子，那末關聯運算子 A^* 亦是單構的，而且可以這樣來選取運算子 A 與 A^* 的完全特徵向量組 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_r$ 與 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_n$ 使得他們是雙法正交的：

$$A\boldsymbol{x}_i=\lambda_i \boldsymbol{x}_i, \quad A^*\boldsymbol{y}_i=\mu_i \boldsymbol{y}_i, \quad (\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{y}_k)=\delta_{ik} \quad (i, k=1, 2, \cdots, n)。$$

事實上，設 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 爲運算子 A 的完全特徵向量組。引進記號

$$S_k=[\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{x}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_n] \quad (k=1, 2, \cdots, n)。$$

討論 $n-1$ 維子空間 S_k 的一維正交補空間 $T_k=[\boldsymbol{y}_k]$ $(k=1, 2, \cdots, n)$。此時 T_k 對 A^* 不變：

$$A^*\boldsymbol{y}_k=\mu_k \boldsymbol{y}_k, \quad \boldsymbol{y}_k \neq 0 \quad (k=1, 2, \cdots, n)。$$

由 $S_k \perp \boldsymbol{y}_k$ 得出：$(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{y}_k) \neq 0$，因爲否則向量 $\boldsymbol{y}_k$ 必須等於零。乘 $\boldsymbol{x}_k$, $\boldsymbol{y}_k (k=1, 2, \cdots, n)$ 以適當的數值因子，我們得出：

$$(\boldsymbol{x}_i \boldsymbol{y}_k)=\delta_{ik} \quad (i, k=1, 2, \cdots, n)。$$

由向量組 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 與 $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{y}_n$ 的雙法正交性，知道每一組向量都是線性無關的。

還要注意這樣的命題：

7° 如果運算子 A 與 A^* 有共同的特徵向量，那末對應於公共特徵向量的這些運算子的特徵數是複共軛的。

事實上，設 $A\boldsymbol{x}=\lambda \boldsymbol{x}$, $A^*\boldsymbol{x}=\mu \boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0})$。那末，在(46)中取 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$，就有 $\lambda(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})=\bar{\mu}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$，故得 $\lambda=\bar{\mu}$。

§9. U-空間中規範運算子

定義 6. 線性運算子 A 稱爲規範的，如果他與他的關聯運算子可

易：

$$AA^*=A^*A。\tag{51}$$

定義 7. 線性運算子 H 稱爲安密達運算子，如果他與他的關聯運算子相等：

$$H^*=H。\tag{52}$$

定義 8. 線性運算子 U 稱爲 U-運算子如果他的逆等於他的關聯運算子：

$$UU^*=E。\tag{53}$$

注意，U-運算子亦可以界說爲安密達空間中等度量運算子，亦即保持度量不變的運算子。

事實上，設對 R 中任二向量 x 與 y，

$$(Ux,\ Uy)=(x,\ y)。\tag{54}$$

那末根據(46)　　$(U^*Ux,\ y)=(x,\ y)$，

故由向量 y 的任意性，有

$$U^*Ux=x,$$

亦卽 $U^*U=E$ 或 $U^*=U^{-1}$。反之，由(53)可以得出(54)。

從(53)或(54)推知，1° 兩個 U-運算子的乘積仍然是一個 U-運算子，2° 么運算子 E 是一個 U-運算子與 3° U-運算子的逆運算子亦是一個 U-運算子。故所有 U-運算子的集合構成一個羣❶。這個羣稱爲 U-羣。

安密達運算子與 U-運算子都是規範運算子的特殊形狀。

定理 3. 任何線性運算子 A 常可表爲次之形狀：

$$A=H_1+iH_2,\tag{55}$$

其中 H_1 與 H_2 都是安密達運算子（運算子 A 的"安密達分量"）。安密達分量爲所予運算子 A 所唯一確定。運算子 A 是規範的充分必要的條件爲其安密達分量 H_1 與 H_2 彼此可易。

❶ 參考第一章，§3，3 的第四個足註。

證明 設(55)式成立。那末

$$A^*=H_1-iH_2\text{。}\tag{56}$$

由(55)與(56)求得:

$$H_1=\frac{1}{2}(A+A^*),\quad H_2=\frac{1}{2i}(A-A^*)\text{。}\tag{57}$$

反之,(57)式定出安密達運算子 H_1 與 H_2,他們同 A 有等式(55)的關係。

現在設 A 爲規範運算子: $AA^*=A^*A$ 。那末由(57)得: $H_1H_2=$ $=H_2H_1$ 。反之,由 $H_1H_2=H_2H_1$ 與(55),(56)得: $AA^*=A^*A$ 定理即已證明。

表任一線性運算子 A 成(55)的形狀類似於表任一複數 z 爲 x_1+ix_2 的形狀,其中 x_1, x_2 爲二實數。

設在某一個法正交基底中運算子 A, H 與 U 各對應於矩陣 A, H, U 。那末運算子等式

$$AA^*=A^*A,\ H^*=H,\ UU^*=E\tag{58}$$

就對應於矩陣等式

$$AA^*=A^*A,\quad H^*=H,\quad UU^*=E\text{。}\tag{59}$$

所以我們確定規範矩陣爲與其關聯矩陣可易的矩陣,安密達矩陣爲與其關聯矩陣相等的矩陣,最後,U-矩陣爲與其關聯逆矩陣相等的矩陣。

故在法正交基底中,規範運算子,安密達運算子,U-運算子各對應於規範矩陣,安密達矩陣與 U-矩陣。

由(59)知安密達矩陣 $H=\|h_{ik}\|_1^n$ 爲其元素間的關係式

$$h_{ki}=\bar{h}_{ik}\quad(i,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

所確定,亦即安密達矩陣常爲某一安密達型的係數矩陣(參考§1)。

由(59)知 U-矩陣 $U=\|u_{ik}\|_1^n$ 爲其元素間的關係式

$$\sum_{j=1}^{n}u_{ij}\bar{u}_{kj}=\delta_{ik}\quad(i,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\tag{60}$$

所確定。因爲由 $UU^*=E$ 得出 $U^*U=E$,故由(60)得出相抵的關係

式：

$$\sum_{j=1}^{n} u_{ji}\bar{u}_{jk}=\delta_{ik} \quad (i,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)。 \tag{61}$$

等式(60)表出矩陣 $U=\|u_{ik}\|_1^n$ 中行的"法正交性"，而等式(61)表出其諸列的法正交性❶。

U-矩陣是某一個 U-變換的係數矩陣(參考§7)。

§10. 規範運算子，安密達運算子，U-運算子的影譜

首先建立可易運算子的一個性質，述爲次引的形式。

引1. 可易運算子 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA})$ 常有公共的特徵向量。

證明 設 $\boldsymbol{x}$ 是運算子 $\boldsymbol{A}$ 的特徵向量：$\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$。那末由運算子 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 的可易性，得

$$\boldsymbol{AB}^k\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{B}^k\boldsymbol{x} \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)。 \tag{62}$$

設在向量序列

$$\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{Bx},\ \boldsymbol{B}^2\boldsymbol{x},\ \cdots$$

中前 p 個向量線性無關，而第 $p+1$ 個向量 $\boldsymbol{B}^p\boldsymbol{x}$ 爲其前諸向量的線性組合。那末子空間 $\boldsymbol{S}\equiv[\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{Bx},\ \cdots,\ \boldsymbol{B}^{p-1}\boldsymbol{x}]$ 對 $\boldsymbol{B}$ 不變，故在這一子空間 $\boldsymbol{S}$ 中有運算子 $\boldsymbol{B}$ 的特徵向量 $\boldsymbol{y}$ 存在：$\boldsymbol{By}=\mu\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$。另一方面，等式(62)說明向量 $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{Bx},\ \cdots,\ \boldsymbol{B}^{p-1}\boldsymbol{x}$ 都是對應於同一特徵數 λ 的運算子 $\boldsymbol{A}$ 的特徵向量。故這些向量的任一線性組合，特別是向量 $\boldsymbol{y}$，是對應於特徵數 λ 的運算子 $\boldsymbol{A}$ 的特徵向量。這樣一來，就證明了運算子 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 有公共的特徵向量存在。

設 $\boldsymbol{A}$ 是 n 維安密達空間 $\boldsymbol{R}$ 中任一規範運算子。此時運算子 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{A}^*$ 彼此可易，故有公共特徵向量 $\boldsymbol{x}_1$。那末(參考§8，7°)

$$\boldsymbol{Ax}_1=\lambda_1\boldsymbol{x}_1,\quad \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}_1=\bar{\lambda}_1\boldsymbol{x}_1 \quad (\boldsymbol{x}_1\neq\boldsymbol{0})。$$

以 $\boldsymbol{S}_1$ 記含有向量 $\boldsymbol{x}_1$ 的一維子空間($\boldsymbol{S}_1=[\boldsymbol{x}_1]$)，而以 $\boldsymbol{T}_1$ 記 $\boldsymbol{R}$ 中

❶ 這樣一來，矩陣 U 中列的法正交性是行的法正交性的結果，反之亦然。

S_1 的正交補空間：

$$R=S_1+T_1,\ \ S_1\perp T_1\,。$$

因爲 S_1 對 A 與 A^* 不變，故（參考 § 8, 5°）T_1 亦對這些運算子不變。因此，可易運算子 A 與 A^* 在 T_1 中由於引 1 有公共特徵向量 x_2：

$$Ax_2=\lambda_2 x_2,\ \ A^*x_2=\bar{\lambda}_2 x_2\ \ (x_2\neq 0)\,。$$

顯然，$x_1\perp x_2$。命 $S_2=[x_1, x_2]$ 與

$$R=S_2+T_2,\ \ S_2\perp T_2,$$

同理，在 T_2 中得出運算子 A 與 A^* 的公共特徵向量 x_3。顯然有 $x_1\perp x_3$ 與 $x_2\perp x_3$。繼續施行這一方法，我們得出運算子 A 與 A^* 的兩兩正交的 n 個公共特徵向量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$：

$$\left.\begin{array}{l} Ax_k=\lambda_k x_k,\ \ A^*x_k=\bar{\lambda}_k x_k\ \ (x_k\neq 0), \\ \quad 在\ i\neq k\ 時有\ (x_i x_k)=0, \end{array}\right\}(i, k=1, 2, \cdots, n)\,。\tag{63}$$

可以使向量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 標準化而仍然保持等式(63)不變。

這樣一來，我們證明了，規範運算子常有完全法正交[1]特徵向量組。

因爲由 $\lambda_k=\lambda_l$ 常可得出 $\bar{\lambda}_k=\bar{\lambda}_l$，故由等式(63)推知：

1° 如果 A 是一個規範運算子，那末運算子 A 的每一個特徵向量都是其關聯運算子 A^* 的特徵向量，亦卽如果 A 是規範運算子，那末運算子 A 與 A^* 有相同的特徵向量。

現在相反的，設已知線性運算子 A 有完全法正交特徵向量組：

$$Ax_k=\lambda_k x_k,\ \ (x_i x_k)=\delta_{ik}\ \ (i, k=1, 2, \cdots, n)\,。$$

我們要證明，在此時 A 是一個規範運算子。事實上，設

$$y_l=A^*x_l-\bar{\lambda}_l x_l\,。$$

那末 $(x_k y_l)=(x_k, A^*x_l)-\lambda_l(x_k x_l)=(Ax_k, x_l)-\lambda_l(x_k x_l)=$

$$=(\lambda_k-\lambda_l)\delta_{kl}=0\ \ (k, l=1, 2, \cdots, n)\,。$$

---

[1] 對於完全法正交向量組，在此處及以後，我們都了解爲 n 個向量的法正交組，其中 n 爲空間的維數。

故得：　$y_l=A^*x_l-\bar{\lambda}_l x_l=0\ (l=1,2,\cdots,n)$，

亦卽(63)中諸等式全能成立。

但此時

$$AA^*x_k=\lambda_k\bar{\lambda}_k x_k,\ A^*Ax_k=\lambda_k\bar{\lambda}_k x_k\ (k=1,2,\cdots,n),$$

故有

$$AA^*=A^*A。$$

這樣一來，我們得出規範運算子 A（平行於"外部的"：$AA^*=A^*A$）的次之"內部的"（影譜的）特徵：

定理 4. 線性運算子是規範的充分必要條件爲這一運算子有完全法正交特徵向量組。

特別的，我們證明了，規範運算子永遠是一個單構運算子。

設 A 是有特徵數 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的規範運算子。用拉格蘭日內插公式從次諸條件定出兩個多項式$p(\lambda)$與$q(\lambda)$：

$$p(\lambda_k)=\bar{\lambda}_k,\ q(\bar{\lambda}_k)=\lambda_k\ (k=1,2,\cdots,n)。$$

那末由(63)，得：

$$A^*=p(A),\ A=q(A^*) \tag{64}$$

亦卽

2° 對於規範運算子 A，運算子 A 與 A^* 的每一個都可以表爲其另一個的運算子多項式；而且這兩個多項式都爲運算子 A 的已知特徵數所確定。

設 S 爲 R 中對於規範運算子 A 不變的子空間，而 $R=S+T$，$S\perp T$。那末根據 §8，5°，子空間 T 對 A^* 不變。但是 $A=q(A^*)$，其中 $q(\lambda)$ 是一個多項式。故 T 對所予運算子 A 亦是不變的。這樣一來，

3° 如果 S 是對於規範運算子 A 不變的子空間，而 T 是 S 的正交補空間，那末 T 亦是對 A 不變的子空間。

現在我們來討論安密達運算子的影譜。因爲安密達運算子 H 是規範運算子的特種形狀，故由已經證明的結果，他有完全法正交特徵向量

組：

$$Hx_k=\lambda_k x_k,\ (x_k x_l)=\delta_{kl}\ (k,\ l=1,\ 2,\ \cdots,\ n)。\tag{65}$$

從 $H^*=H$ 得出：

$$\bar{\lambda}_k=\lambda_k\ (k=1,2,\cdots,n),\tag{66}$$

亦卽安密達運算子 H 的所有特徵數都是實數。

不難看出，相反的，特徵數全爲實數的規範運算子是一個安密達運算子。事實上，由(65)，(66)與

$$H^*x_k=\lambda_k x_k\ (k,=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

得出：

$$H^*x_k=Hx_k\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

亦卽

$$H^*=H\ 。$$

這樣一來，我們得出安密達運算子（平行於"外部的"：$H^*=H$）的次之"內部的"特徵：

定理 5. 線性運算子 H 是安密達的充分必要條件爲其有特徵數全爲實數的完全法正交特徵向量組。

現在來討論 U-運算子的影譜。因爲 U-運算子 U 是規範的，故有法正交特徵向量組

$$Ux_k=\lambda_k x_k,\ (x_k x_l)=\delta_{kl}\ (k,\ l=1,\ 2,\ \cdots,\ n)。\tag{67}$$

此處

$$U^*x_k=\bar{\lambda}_k x_k\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)。\tag{68}$$

從 $UU^*=E$ 求得：

$$\lambda_k\bar{\lambda}_k=1\ 。\tag{69}$$

反之，由(67)，(68)，(69)得出：$UU^*=E$ 。這樣一來，在規範運算子間，U-運算子是這樣選出的，他的所有特徵數的模都等於 1 。

我們得出 U-運算子(平行於"外部的"：$UU^*=E$) 的次之"內部的"特徵：

定理 6. 線性運算子是一個 U-運算子的充分必要條件爲其有特徵數的模全等於 1 的完全法正交特徵向量組。

因爲在法正交基底中,規範矩陣,安密達矩陣 ,U-矩陣各爲規範運算子,安密達運算子,U-運算子所確定,所以我們得出次諸命題:

定理 4'. 矩陣 A 是規範的充分必要條件爲其 U-相似於對角形矩陣:

$$A = U \| \lambda_i \delta_{ik} \|_1^n U^{-1} \quad (U^* = U^{-1})。 \tag{70}$$

定理 5'. 矩陣 H 是安密達的充分必要條件爲其 U-相似於對角線上全爲實數的對角形矩陣:

$$H = U \| \lambda_i \delta_{ik} \|_1^n U^{-1} \quad (U^* = U^{-1};\ \lambda_i = \bar{\lambda}_i;\ i = 1, 2, \cdots, n)。 \tag{71}$$

定理 6'. 矩陣 U 是一個 U-矩陣的充分必要條件爲其 U-相似於對角線上諸元素的模全等於 1 的對角形矩陣:

$$U = U_1 \| \lambda_i \delta_{ik} \|_1^n U_1^{-1} \quad (U_1^* = U_1^{-1};\ |\lambda_i| = 1;\ i = 1, 2, \cdots, n)。 \tag{72}$$

§11. 非負與恆正安密達運算子

引進次之定義:

定義 9. 安密達運算子 H 稱爲非負的,如果對於 R 中任一向量 x 都有

$$(Hx, x) \geqslant 0,$$

稱爲恆正的,如果對於 R 中任一向量 $x \neq 0$ 都有

$$(Hx, x) > 0 。$$

如果給予向量 x 以其在法正交基底中坐標 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,那末易知(Hx, x)表示變數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的安密達型,而且非負(恆正)運算子對應於非負(恆正)安密達型(參考 § 1)。

從運算子 H 的特徵向量中選取法正交基底 $x_1, x_2, \cdots, x_n$:

$$Hx_k = \lambda_k x_k, \quad (x_k x_l) = \delta_{kl} \quad (k, l = 1, 2, \cdots, n)。 \tag{73}$$

那末命 $x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k$,我們就有:

$$(Hx, x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |\xi_k|^2 \quad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

因此，立刻得出非負與恆正運算子的"內部的"特徵：

定理 7. 安密達運算子是非負（恆正）的充分必要條件爲其特徵數全是非負的（正數）。

從所述結果推知，恆正安密達運算子是一個滿秩非負安密達運算子。

設 $\boldsymbol{H}$ 是一個非負安密達運算子。對於他有 $\lambda_k \geqslant 0\,(k=1,2,\cdots,n)$ 的等式(73)。設 $\rho_k=\sqrt{\lambda_k}\geqslant 0\ (k=1,2,\cdots,n)$ 且以等式

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_k=\rho_k\boldsymbol{x}_k\quad(k=1,2,\cdots,n) \tag{74}$$

確定運算子 $\boldsymbol{F}$。那末 $\boldsymbol{F}$ 亦是一個非負運算子，而且

$$\boldsymbol{F}^2=\boldsymbol{H}。 \tag{75}$$

與 $\boldsymbol{H}$ 以等式(75)相結合的非負安密達運算子 $\boldsymbol{F}$ 稱爲運算子 $\boldsymbol{H}$ 的算術的二次根且記之以：

$$\boldsymbol{F}=\sqrt{\boldsymbol{H}}。$$

如果 $\boldsymbol{H}$ 是恆正的運算子，那末 $\boldsymbol{F}$ 亦是恆正的。

以等式

$$g(\lambda_k)=\rho_k\ (=\sqrt{\lambda_k})\quad(k=1,2,\cdots,n) \tag{76}$$

定出拉格蘭日內插多項式 $g(\lambda)$。那末由(73)，(74)與(76)得出：

$$\boldsymbol{F}=g(\boldsymbol{H})。 \tag{77}$$

這個等式證明了，$\sqrt{\boldsymbol{H}}$ 是 $\boldsymbol{H}$ 的多項式，且爲所予非負安密達運算子 $\boldsymbol{H}$ 所唯一確定［多項式 $g(\lambda)$ 的係數與運算子 $\boldsymbol{H}$ 的特徵數有關］。

例如運算子 $\boldsymbol{AA}^*$ 與 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$ 都是非負安密達運算子，其中 $\boldsymbol{A}$ 爲已知空間中任一線性運算子。事實上，對於任一向量 $\boldsymbol{x}$，都有

$$(\boldsymbol{AA}^*\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x})\geqslant 0,$$
$$(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})\geqslant 0。$$

如果運算子 $\boldsymbol{A}$ 是滿秩的，那末 $\boldsymbol{AA}^*$ 與 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$ 都是恆正安密達運算子。

運算子 $\boldsymbol{AA}^*$ 與 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$ 有時稱爲運算子 $\boldsymbol{A}$ 的左與右範數。$\sqrt{\boldsymbol{AA}^*}$

與 $\sqrt{A^*A}$ 稱爲運算子 A 的左與右模。

至於規範運算子的左與右範數，因而其左與右模是彼此相等的[1]。

§12. U-空間中線性運算子的極分解式．凱萊公式

證明次之定理[2]：

定理 8. 在 U-空間中常可表任一線性運算子 A 爲次之形狀：

$$A=HU, \tag{78}$$

$$A=U_1H_1, \tag{79}$$

其中 H, H_1 爲非負安密達運算子，而 U, U_1 爲 U-運算子。運算子 A 是一個規範運算子的充分必要條件，是在分解式(78)〔或(79)〕中因子 H 與 U (H_1 與 U_1) 彼此可易。

證明　由分解式(78)與(79)，知 H 與 H_1 是運算子 A 的左與右模。事實上，

$$AA^*=HUU^*H=H^2,\quad A^*A=H_1U_1^*U_1H_1=H_1^2。$$

我們注意，祗要建立分解式(78)就已足夠，因爲應用這分解式於運算子 A^*，我們得出 $A^*=HU$，因而

$$A=U^{-1}H,$$

亦卽關於運算子 A 的分解式(79)。

首先對於特殊情形，A 是一個滿秩運算子 ($|A|\neq 0$)，來建立分解式(78)。命：

$$H=\sqrt{AA^*}\ (此處\ |H|^2=|A|^2\neq 0),\quad U=H^{-1}A$$

且驗證 U 是一個 U-運算子：

$$UU^*=H^{-1}AA^*H^{-1}=H^{-1}H^2H^{-1}=E。$$

我們注意，與所討論的情形，在分解式 (78) 中不僅第一個因子 H

---

[1] 關於規範運算子的詳細研究可參考〔616〕。在這一工作中建立了充分必要的條件，使得兩個規範運算子的乘積仍然是一個規範運算子。

[2] 參考〔616〕，84 頁。

而且第二個因子 U 都爲所予滿秩運算子所唯一確定。

現在來討論一般的情形，運算子 A 可能是降秩的。

首先注意，運算子 A 的右範數的完全法正交特徵向量組，經這個運算子 A 的變換後，仍然是一組正交向量。事實上，設

$$A^*Ax_k=\rho_k^2x_k\ [(x_kx_l)=\delta_{kl},\ \rho_k\geqslant 0;\ k,\ l=1,\ 2,\ \cdots,\ n]。$$

那末 $$(Ax_k,\ Ax_l)=(A^*Ax_k,x_l)=\rho_k^2(x_kx_l)=0\ \ (k\neq l)。$$

此處 $$|Ax_k|^2=(Ax_k,\ Ax_k)=\rho_k^2\ \ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)。$$

故有這樣的法正交向量組 $z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n$ 存在，便得

$$Ax_k=\rho_kz_k\ [(z_kz_l)=\delta_{kl};\ k,\ l=1,\ 2,\ \cdots,\ n]。\tag{80}$$

以等式

$$Ux_k=z_k,\ \ Hz_k=\rho_kz_k\tag{81}$$

來定出線性運算子 H 與 U。由(80)與(81)我們求得：

$$A=HU。$$

此時由於(81)知 H 是一個非負安密達運算子，因爲他有完全法正交特徵向量組 $z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n$ 與非負特徵數 $\rho_1,\ \rho_2,\ \cdots,\ \rho_n$ 又知 U 是一個 U-運算子，因爲他變法正交向量組 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ 爲法正交組 $z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n$。

這樣一來，可以算作已經證明了，對於任何線性運算子 A 分解式(78)與(79)都能成立，而且安密達因子 H 與 H_1 常爲所予運算子 A 所唯一確定（他們是運算子 A 的左與右模），而 U-因子 U 與 U_1 祇是在滿秩的 A 這一情形始爲 A 所唯一確定。

從(78)容易求得：

$$AA^*=H^2,\ \ A^*A=U^{-1}H^2U。\tag{82}$$

如果 A 是一個規範運算子 $(AA^*=A^*A)$，那末由(82)推知：

$$H^2U=UH^2。\tag{83}$$

因爲 $H=\sqrt{H^2}=g(H^2)$（參考 §11），故由(83)得出 U 與 H 的可易性。反之，如果 H 與 U 彼此可易，那末由(82)推知，A 是一個規範

運算子。定理已經證明❶。

我想可以不必特別提出，與運算子等式(78)與(79)相伴的有對應的矩陣等式。

分解式(78)與(79)類似於表複數 z 爲 $z=ru$ 的形狀，其中 $r=|z|$，而 $|u|=1$。

現在假設 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 是任一 U-運算子 $\boldsymbol{U}$ 的完全法正交特徵向量組。那末

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}_k = e^{if_k}\boldsymbol{x}_k, \quad (\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{x}_l)=\delta_{kl} \ (k, l=1, 2, \cdots, n), \tag{84}$$

其中 $f_k(k=1, 2, \cdots, n)$ 爲實數。以等式

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}_k = f_k\boldsymbol{x}_k \quad (k=1, 2, \cdots, n) \tag{85}$$

定出安密達運算子 $\boldsymbol{F}$。由(84)與(85)得出：❷

$$\boldsymbol{U}=e^{i\boldsymbol{F}}。 \tag{86}$$

這樣一來，U-運算子 $\boldsymbol{U}$ 常可表爲(86)的形狀，其中 $\boldsymbol{F}$ 是一個安密達運算子。反之，如果 $\boldsymbol{F}$ 是一個安密達運算子，那末 $U=e^{iF}$ 是一個 U-運算子。

以(86)式代進分解式(78)與(79)給出次諸等式：

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{H}e^{i\boldsymbol{F}}, \tag{87}$$

$$\boldsymbol{A}=e^{i\boldsymbol{F}_1}\boldsymbol{H}_1, \tag{88}$$

其中 $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{F}_1$ 都是安密達運算子，而且 $\boldsymbol{H}$ 與 $\boldsymbol{H}_1$ 是非負的。

分解式(87)與(88)類似於複數 z 的 $z=re^{i\varphi}$ 形的表示式，其中 $r\geqslant 0$，r 與 φ 都是實數。

註　在等式(86)中運算子 $\boldsymbol{F}$ 並不爲所予運算子 $\boldsymbol{U}$ 所唯一確定。事

---

❶ 如果把線性運算子 $\boldsymbol{A}$ 與其左模 $\boldsymbol{H}=\sqrt{\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*}$ 的特徵數 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 與 $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$ (數 $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$ 由於(82)亦是右模 $\boldsymbol{H}_1=\sqrt{\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}}$ 的特徵數)調動序數，使得

$$|\lambda_1|\geqslant|\lambda_2|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n|, \quad \rho_1\geqslant\rho_2\geqslant\cdots\geqslant\rho_n,$$

那末(參考[152]，還有[124]與[138b])次之**華愛爾不等式**就能成立：

$$|\lambda_1|\leqslant\rho_1, \ |\lambda_1|+|\lambda_2|\leqslant\rho_1+\rho_2, \ \cdots, \ |\lambda_1|+\cdots+|\lambda_n|\leqslant\rho_1+\cdots+\rho_n。$$

❷ $e^{iF}=r(\boldsymbol{F})$，其中 $r(\lambda)$ 是函數 $e^{i\lambda}$ 在點 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 上的拉格蘭日內插多項式。

實上,運算子 F 是爲諸數 $f_k(k=1, 2, \cdots, n)$ 所確定的,而對於這些數的每一個都可以加上 2π 的任何倍數使得原始等式 (84) 無何變動。選取 2π 的適當的倍數來加上,我們可以使得由 $e^{if_k}=e^{if_l}$ 常能得出:$f_k=$ $=f_l\ (1\leqslant k,\ l\leqslant n)$。那末可以從等式

$$g(e^{if_k})=f_k \quad (k=1, 2, \cdots, n) \tag{89}$$

定出內插多項式 $g(\lambda)$。由(84),(85)與(89)得出:

$$F=g(U)=g(e^{iF})。 \tag{90}$$

全相類似的可以標準化 F_1 的選取,使得

$$F_1=h(U_1)=h(e^{iF_1}), \tag{91}$$

其中 $h(\lambda)$ 是一個多項式。

由於 (90) 與 (91) 以及 H 與 U (H_1 與 U_1) 的可易性推得 H 與 F (H_1 與 F_1) 的可易性,反之亦然。故由定理 8,和運算子 A 是規範的充分必要條件是這樣的,如果祇要適當的標準化運算子 $F(F_1)$ 的特徵數,在(87)式中H與 F [或在(88)式中 H_1 與 F_1] 就彼此可易。

隱伏於(86)式後面的有這樣的事實,函數相關性

$$\mu=e^{if} \tag{92}$$

化實數軸上任意 n 個數 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 爲圓周 $|\mu|=1$ 上的某些數 μ_1, $\mu_2, \cdots, \mu_n$, 反之亦然。

可以換超越相關性(92)爲有理相關性

$$\mu=\frac{1+if}{1-if}, \tag{93}$$

他亦變實軸 $f=\bar{f}$ 爲圓周 $|\mu|=1$; 而且使實軸上的無窮遠點變爲 $\mu=-1$ 由(93)求得:

$$f=i\frac{1-\mu}{1+\mu}。 \tag{94}$$

重復上面化到(86)式的推理,我們由 (93) 與 (94) 得出兩個互逆公式:

$$\left.\begin{aligned} U &= (E+iF)(E-iF)^{-1}, \\ F &= i(E-U)(E+U)^{-1}。\end{aligned}\right\} \tag{95}$$

我們已經得出凱萊公式。這些公式在任一安密達運算子 F 與沒有 $-1$❶這個特徵數的 U-運算子 U 之間建了一個一一對應。

在 (86), (87), (88) 與 (95) 式中把所有的運算子換爲對應的矩陣後，自然是仍舊成立的。

§13. 歐幾里得空間中線性運算子

討論 n 維歐幾里得空間 R。設在 R 中給予任一線性運算子 A。

定義 10. 線性運算子 A' 稱爲運算子 A 的轉置運算子，如果對於 R 中任何向量 x 與 y 都有：

$$(Ax, y) = (x, A'y)。\tag{96}$$

同 §8 中對於 U-空間中關聯運算子的處理全相類似的，可以建立轉置運算子的存在性與唯一性。

轉置運算子有次諸性質：

1° $(A')' = A$,

2° $(A+B)' = A' + B'$,

3° $(\alpha A)' = \alpha A'$ (α 爲一實數),

4° $(AB)' = B'A'$。

引進一系列的定義。

定義 11. 線性運算子 A 稱爲規範的，如果

$$AA' = A'A。$$

定義 12. 線性運算子 S 稱爲對稱的，如果

$$S' = S。$$

---

❶ 可以換異點 -1 爲任一數 μ_0 ($|\mu|=1$)。爲了這一目的，代替 (93) 式應當取一個線性分式函數，使其表實數軸 $f=\bar{f}$ 爲圓周 $|\mu|=1$ 且變點 $f=\infty$ 爲點 $\mu=\mu_0$。此時變更 (94) 與 (95) 式爲相對應的形狀。

定義 13. 對稱運算子 $\boldsymbol{S}$ 稱爲非負的，如果對於 $\boldsymbol{R}$ 中任何向量 $\boldsymbol{x}$ 都有

$$(\boldsymbol{S}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})\geqslant 0 。$$

定義 14. 對稱運算子 $\boldsymbol{S}$ 稱爲恆正的，如果對於 $\boldsymbol{R}$ 中任何向量 $\boldsymbol{x}\neq 0$ 都有

$$(\boldsymbol{S}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})>0 。$$

定義 15. 線性運算子 $\boldsymbol{K}$ 稱爲反對稱的，如果

$$\boldsymbol{K}'=-\boldsymbol{K} 。$$

任何線性運算子 $\boldsymbol{A}$ 常可唯一的表爲次之形狀：

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{S}+\boldsymbol{K}, \tag{97}$$

其中 $\boldsymbol{S}$ 是一個對稱的，而 $\boldsymbol{K}$ 是一個反對稱的運算子。

事實上，由(97)得出：

$$\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{S}-\boldsymbol{K} 。 \tag{98}$$

由(97)與(98)推知：

$$\boldsymbol{S}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}'),\quad \boldsymbol{K}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}')。 \tag{99}$$

反之，(99) 式定出對稱運算子 $\boldsymbol{S}$ 與反對稱運算子 $\boldsymbol{K}$，而且他們適合等式(97)。

$\boldsymbol{S}$ 與 $\boldsymbol{K}$ 稱爲運算子 $\boldsymbol{A}$ 的對稱分量與反對稱分量。

定義 16. 運算子 $\boldsymbol{O}$ 稱爲正交的，如果他保持空間的度量，亦卽對於 $\boldsymbol{R}$ 中任二向量 $\boldsymbol{x}$ 與 $\boldsymbol{y}$ 都有

$$(\boldsymbol{O}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{O}\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})。 \tag{100}$$

由(96)可把等式(100)寫爲：$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{O}'\boldsymbol{O}\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})$。故知：

$$\boldsymbol{O}'\boldsymbol{O}=\boldsymbol{E} 。 \tag{101}$$

反之，由(101)推得(100)(對於任意向量 $\boldsymbol{x}$ 與 $\boldsymbol{y}$ 來說[1])。由(101)得出：$|\boldsymbol{O}|^2=1$，亦卽

[1] 在歐幾里得空間中正交運算子構成一個羣(這個羣稱爲正交羣)。

$$|O| = \pm 1 。$$

我們稱正交運算子 $\boldsymbol{O}$ 爲第一種運算子，如果 $|O|=1$，稱爲第二種運算子，如果 $|O|=-1$ 。

對稱的，反對稱的，正交的運算子都是規範運算子的特殊形狀。

在已予歐幾里得空間中取任一法正交基底。設在這一基底中，線性運算子 $\boldsymbol{A}$ 對應於矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$（此處所有 a_{ik} 都是實數）。讀者不難證明，在同一基底中轉置運算子 $\boldsymbol{A}'$ 對應於轉置矩陣 $A'=\|a'_{ik}\|_1^n$，其中 $a'_{ik}=a_{ki}$ $(i, k=1,2,\cdots,n)$。故知在法正交基底中，規範運算子 $\boldsymbol{A}$ 對應於規範矩陣 $A(AA'=A'A)$，對稱運算子 $\boldsymbol{S}$ 對應於對稱矩陣 $S=\|s_{ik}\|_1^n$ $(S'=S)$，反對稱運算子 $\boldsymbol{K}$ 對應於反對稱矩陣 $K=\|k_{ij}\|_1^n$ $(K'=-K)$，最後，正交運算子 $\boldsymbol{O}$ 對應於正交矩陣 O $(OO'=E)$ [1]。

類似於 § 8 中對於關聯運算子所做的工作，在此處建立次之命題：

如果 $\boldsymbol{R}$ 中某一子空間 $\boldsymbol{S}$ 對稱線性運算子 $\boldsymbol{A}$ 不變，那末 $\boldsymbol{R}$ 中 $\boldsymbol{S}$ 的正交補空間 $\boldsymbol{T}$ 對運算子 $\boldsymbol{A}'$ 不變。

爲了研究歐幾里得空間 $\boldsymbol{R}$ 中線性運算子，我們擴展歐幾里得空間 $\boldsymbol{R}$ 爲某一個 U-空間 $\widetilde{\boldsymbol{R}}$ 。這種擴展可以用次之方式得出：

1° $\boldsymbol{R}$ 中諸向量稱爲"實"向量。

2° 引進"複"向量 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y}$ 的討論，其中 $\boldsymbol{x}$ 與 $\boldsymbol{y}$ 爲實向量，亦卽 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}$ 。

3° 很自然的界說複向量的加法運算與其對複數的乘法。那末所有複向量的集合構成一個含有 $\boldsymbol{R}$ 爲其子空間的複數域上 n 維向量空間 $\widetilde{\boldsymbol{R}}$ 。

4° 在 $\widetilde{\boldsymbol{R}}$ 中引進安密達度量，使得他在 $\boldsymbol{R}$ 中與其歐幾里得度量重合。讀者容易驗證，所求的安密達度量可由次之方式給出：

如果 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+i\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+i\boldsymbol{v}$ $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R})$，那末

---

[1] 從事於正交矩陣的結構的研究工作有 [686, 85a, 61a]。有如正交運算子，我們稱正交矩陣爲第一種或二種矩陣，須視 $|O|=+1$ 或 $|O|=-1$ 而定。

$$(zw)=(xu)+(yv)+i[(yu)-(xv)]。$$

如命 $\bar{z}=x-iy$, $\bar{w}=u-iv$, 我們有:

$$(\bar{z}\bar{w})=(\overline{zw})。$$

如果選取實基底,亦卽在 R 中的基底, 那末 $\tilde{R}$ 表示在這個基底中有複坐標的所有向量的集合,而 R 為有實坐標的所有向量的集合。

R 中每一個線性運算子 A 都可唯一的擴展爲 $\tilde{R}$ 中線性運算子:

$$A(x+iy)=Ax+iAy 。$$

在 $\tilde{R}$ 的所有線性運算子之間,那些從 R 中運算子經過這種擴展所得出的運算子,是為變 R 為 R 所決定的 $(AR\subset R)$。這種運算子稱爲實運算子。

在實基底中,實運算子確定實矩陣,亦卽元素爲實數的矩陣。

實運算子 A 變複共軛向量 $z=x+iy$ 與 $\bar{z}=x-iy$ $(x, y\in R)$ 為仍然是複共軛的向量:

$$Az=Ax+iAy, \ A\bar{z}=Ax-iAy \ (Ax, Ay\in R)。$$

運算子的長期方程的係數全爲實數,故如有 p 重根 λ, 則必有 p 重根 $\bar{\lambda}$。由 $Az=\lambda z$ 得出: $A\bar{z}=\bar{\lambda}\bar{z}$, 亦卽對應於共軛特徵數的是共軛特徵向量[1]。

二維子空間 $[z, \bar{z}]$ 有實基底: $x=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$, $y=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$, R 中有這個基底的平面稱爲對應於特徵數耦 $\lambda, \bar{\lambda}$ 的運算子 A 的不變平面。

設 $\lambda=\mu+i\nu$。那末易知,

$$Ax=\mu x-\nu y,$$

$$Ay=\nu x+\mu y 。$$

討論有特徵數:

$$\lambda_{2k-1}=\mu_k+i\nu_k, \ \lambda_{2k}=\mu_k-i\nu_k, \ \lambda_l=\mu_l \ (k=1,2,\cdots,q;\ l=2q+1,\cdots,n)$$

的單構實運算子 A, 其中 μ_k, ν_k, μ_l 都是實數而且 $\nu_k\neq 0(k=1,2,\cdots,q)$。

[1] 如果實運算子 A 的特徵數 λ 對應於線性無關的特徵向量 $z_1, z_2, \cdots, z_p$, 那末特徵數 $\bar{\lambda}$ 就對應於線性無關的特徵向量 $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \cdots, \bar{z}_p$。

那末對應於這些特徵數的特徵向量 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 可以這樣選取，使得：

$$z_{2k-1}=\boldsymbol{x}_k+i\boldsymbol{y}_k,\ z_{2k}=\boldsymbol{x}_k-i\boldsymbol{y}_k,\ z_l=\boldsymbol{x}_l\ (k=1,2,\cdots,q;\ l=2q+1,\cdots,n)。\tag{102}$$

向量

$$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_q, \boldsymbol{y}_q, \boldsymbol{x}_{2q+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_n \tag{103}$$

構成歐幾里得空間 $\boldsymbol{R}$ 的基底。此處

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k=\mu_k\boldsymbol{x}_k-\nu_k\boldsymbol{y}_k,\\ &\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_k=\nu_k\boldsymbol{x}_k+\mu_k\boldsymbol{y}_k,\\ &\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_l=\mu_l\boldsymbol{x}_l\end{aligned}\begin{pmatrix}k=1,2,\cdots,q\\ l=2q+1,\cdots,n\end{pmatrix} \tag{104}$$

在基底(103)中運算子 $\boldsymbol{A}$ 對應於實準對角形

$$\left\{\begin{Vmatrix}\mu_1 & \nu_1\\ -\nu_1 & \mu_1\end{Vmatrix},\cdots,\begin{Vmatrix}\mu_q & \nu_q\\ -\nu_q & \mu_q\end{Vmatrix},\ \mu_{2q+1},\ \cdots,\ \mu_n\right\}。\tag{105}$$

這樣一來，對於歐幾里得空間中每一個單構運算子 $\boldsymbol{A}$ 有這樣的基底存在，使得在這一基底中運算子 $\boldsymbol{A}$ 對應於 (105) 形矩陣。故知每一個單構實矩陣實-相似於 (105) 形標準矩陣：

$$A=T\left\{\begin{Vmatrix}\mu_1 & \nu_1\\ -\nu_1 & \mu_1\end{Vmatrix},\cdots,\begin{Vmatrix}\mu_q & \nu_q\\ -\nu_q & \mu_q\end{Vmatrix},\ \mu_{2q+1},\ \cdots,\ \mu_n\right\}T^{-1}(T=\overline{T})。\tag{106}$$

$\boldsymbol{R}$ 中 $\boldsymbol{A}$ 的轉置運算子 $\boldsymbol{A}'$ 在擴展後變爲 $\widetilde{\boldsymbol{R}}$ 中 $\boldsymbol{A}$ 的關聯運算子 $\boldsymbol{A}^*$。因此，$\boldsymbol{R}$ 中規範的，對稱的，反對稱的，正交的運算子經擴展後各變爲 $\widetilde{\boldsymbol{R}}$ 中規範的，安密達，以 i 乘安密達的運算子與 U-實運算子。

不難證明，對於歐幾里得空間中規範運算子 $\boldsymbol{A}$，可以選取標準基底即法正交基底(103)，使得在這一基底中等式(104)能夠成立[1]。故實規範矩陣常能實正交-相似於(105)形矩陣：

[1] 從安密達度量中基底(102)的法正交性得出在對應的歐幾里得度量中基底(103)的法正交性。

$$A=O\left\{\begin{Vmatrix} \mu_1 & \nu_1 \\ -\nu_1 & \mu_1 \end{Vmatrix},\cdots,\begin{Vmatrix} \mu_q & \nu_q \\ -\nu_q & \mu_q \end{Vmatrix},\ \mu_{2q+1},\ \cdots,\ \mu_n\right\}O^{-1} \quad (107)$$

$$(O=O'^{-1}=\bar{O})。$$

在歐幾里得空間中對稱運算子 S 的特徵數都是實數，因爲在擴展後這個運算子變爲一個安密達運算子。所以對於對稱運算子 S,在(104)式中可以取 $q=0$ 。我們就得出：

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{x}_l=\mu_l\boldsymbol{x}_l\ \ [(\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{x}_l)=\delta_{kl};\ k,\ l=1,\ 2,\ \cdots,\ n]。 \quad (108)$$

在歐幾里得空間中對稱運算子 S 常有對應於實特徵數的法正交特徵向量組[1]。所以實對稱矩陣常能實正交-相似於對角形矩陣：

$$S=O\{\mu_1,\ \mu_2,\ \cdots,\ \mu_n\}O^{-1}\ \ (O=O'^{-1}=\bar{O})。 \quad (109)$$

在歐幾里得空間中反對稱運算子 $\boldsymbol{K}$ 的特徵數都是純虛數（在擴展後這個運算子等於 i 與安密達運算子的乘積）。對於反對稱運算子在(104)式中可取：

$$\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_q=\mu_{2q+1}=\cdots=\mu_n=0,$$

此後這一公式有次之形狀：

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}_k=-\nu_k\boldsymbol{y}_k,\\ &\boldsymbol{K}\boldsymbol{y}_k=\nu_k\boldsymbol{x}_k,\ \ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ q;\ l=2q+1,\ \cdots,\ n)。\\ &\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}_l=\boldsymbol{0}\end{aligned} \quad (110)$$

因爲 $\boldsymbol{K}$ 是一個規範運算子，基底(103)可以作爲是法正交的。這樣一來，每一個實反對稱矩陣都實正交-相似於標準反對稱矩陣：

$$K=O\left\{\begin{Vmatrix} 0 & \nu_1 \\ -\nu_1 & 0 \end{Vmatrix},\cdots,\begin{Vmatrix} 0 & \nu_q \\ -\nu_q & 0 \end{Vmatrix},\ 0,\cdots,\ 0\right\}O^{-1}\,(O=O'^{-1}=\bar{O})。 \quad (111)$$

在歐幾里得空間中正交運算子 $\boldsymbol{O}$ 的特徵數的模都等於 1（在擴展後這個運算子變爲 U-運算子）。所以對於正交運算子，在(104)式中可以取．

---

[1] 對稱運算子 S 是非負的，如果在(108)中所有 $\mu_l\geqslant 0$，而是恆正的，於果在 (108) 中所有 $\mu_l>0$ 。

$$\mu_k^2+\nu_k^2=1,\ \mu_l=\pm 1\ (k=1,2,\cdots,q;\ l=2q+1,\cdots,n)。$$

此時基底(103)可以作爲是法正交的。(104)式可以表爲次之形狀：

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{O}\boldsymbol{x}_k=\cos\varphi_k\boldsymbol{x}_k-\sin\varphi_k\boldsymbol{y}_k,\\ \boldsymbol{O}\boldsymbol{y}_k=\sin\varphi_k\boldsymbol{x}_k+\cos\varphi_k\boldsymbol{y}_k,\\ \boldsymbol{O}\boldsymbol{x}_l=\pm\boldsymbol{x}_l \end{array}\right. \begin{pmatrix} k=1,2,\cdots,q;\\ l=2q+1,\cdots,n \end{pmatrix}。\tag{112}$$

從所說的結果，知道每一個實正交一相似於標準正交矩陣：

$$O=O_1\left\{\left\|\begin{matrix}\cos\varphi_1 & \sin\varphi_1\\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1\end{matrix}\right\|,\cdots,\left\|\begin{matrix}\cos\varphi_q & \sin\varphi_q\\ -\sin\varphi_q & \cos\varphi_q\end{matrix}\right\|,\ \pm1,\cdots,\ \pm1\right\}O_1^{-1}$$
$$(O_1=O_1'^{-1}=\overline{O}_1)。\tag{113}$$

例　討論在三維空間中繞點 O 的有限旋轉。他變有向線段 $\overrightarrow{OA}$ 爲有向線段 $\overrightarrow{OB}$，故可视爲（由所有可能的線段 $\overrightarrow{OA}$ 所構成的）三維向量空間中一個運算子 $\boldsymbol{O}$。這個運算子是線性的而且是正交的。這個運算子的行列式等於 1，因爲運算子 $\boldsymbol{O}$ 在空間中並不改變旋轉方向。故 $\boldsymbol{O}$ 爲第一種正交運算子。公式(112)對於他有次之形狀：

$$\boldsymbol{O}x_1=\cos\varphi_1x_1-\sin\varphi_1y_1,$$
$$\boldsymbol{O}y_1=\sin\varphi_1x_1+\cos\varphi_1y_1,$$
$$\boldsymbol{O}x_2=\pm x_2。$$

由等式 $|\boldsymbol{O}|=1$ 知 $\boldsymbol{O}x_2=x_2$。這就説明了，經過 O 點與向量 x_2 平行的直線上所有的點都沒有動。這樣一來，我們得出了歐拉-達拉姆倍爾定理：

把剛體繞一個固定的點作任一有限旋轉，等於把他繞一條經過這個點的不動的軸旋轉某一個角 φ。

§14. 歐幾里得空間中運算子的極分解式與凱萊公式

1. 在§12中已經建立 U-空間内線性運算子的極分解式。完全相類似的我們可以得出歐幾里得空間中線性運算子的極分解式。

定理 9. 線性運算子 $\boldsymbol{A}$ 常可表爲次形的乘積

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{O},\tag{114}$$

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}_1\boldsymbol{S}_1,\tag{115}$$

其中 $\boldsymbol{S}$ 與 $\boldsymbol{S}_1$ 爲非負對稱運算子，而 $\boldsymbol{O}$ 與 $\boldsymbol{O}_1$ 爲正交運算子，而且 $\boldsymbol{S}=\sqrt{\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}'}=g(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}'),\boldsymbol{S}_1=\sqrt{\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}}=h(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})$，其中 $g(\lambda)$，$h(\lambda)$ 爲實係

數多項式。

當且僅當 A 為規範運算子時，因子 S 與 O（因子 S_1 與 O_1）始彼此可易❶。

對於矩陣有類似的命題。

注意(114)與(115)式的幾何內容。以向量為 n 維歐幾里得點空間中從坐標原點所引出的線段。那末每一個向量是空間中某一點的動徑。施行運算子 O（或 O_1）的正交變換是這個空間中一個"旋轉"，因為他保持歐幾里得度量而且不變坐標原點的位置❷。對稱運算子 S(或 S_1)使 n 維空間"膨脹"(亦即,沿 n 個互相垂直的方向,一般的是以不同的引伸係數 $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$ 來"引伸",其中 $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$ 是任意的非負數)。根據(114)與(115)式，n 維歐幾里得空間中任一齊次線性變換都可以由順次施行某一個旋轉與某一個膨脹(在任一次序)來得出。

2. 與在前節中對於 U–運算子所做的相類似的，現在來討論歐幾里得空間 R 中正交運算子的某些表示法。

設 K 為任一反對稱運算子 $(K'=-K)$ 與

$$O=e^{K}。 \tag{116}$$

那末 O 是第一種正交運算子。事實上，

$$O'=e^{K'}=e^{-K}=O^{-1}$$

且有

$$|O|=1❸。$$

我們來證明任何第一種正交運算子都可以表為(116)的形狀。為了這一目的,取其對應的正交矩陣 O。因為有 $|O|=1$，故由(113)式，

---

❶ 有如定理8所述,運算子 S 與 S_1 為所予的 A 所唯一確定。如果 A 是一個滿秩運算子,那末正交因子 O 與 O_1 亦為 A 所唯一確定。

❷ 在 $|O|=1$ 時,這是一個眞實的旋轉;在 $|O|=-1$ 時,這是一個與對於某一坐標平面取鏡像相合併的旋轉。

❸ 如果 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 是運算子 K 的特徵數,那末 $\mu_1=e^{k_1}, \mu_2=e^{k_2}, \cdots, \mu_n=e^{k_n}$ 是運算子 $O=e^{K}$ 的特徵數;此處 $|O|=\mu_1\mu_2\cdots\mu_n=e^{\sum_{i=1}^{n}k_i}=1$，因為 $\sum_{i=1}^{n}k_i=0$。

得❶

$$O=O_1\left\{\begin{Vmatrix}\cos\varphi_1 & \sin\varphi_1\\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1\end{Vmatrix},\cdots,\begin{Vmatrix}\cos\varphi_q & \sin\varphi_q\\ -\sin\varphi_q & \cos\varphi_q\end{Vmatrix},+1,\cdots,+1\right\}O_1^{-1}$$

$$(O_1=O_1'^{-1}=\bar{O}_1)。\tag{117}$$

以次之等式來定出反對稱矩陣 K:

$$K=O_1\left\{\begin{Vmatrix}0 & \varphi_1\\ -\varphi_1 & 0\end{Vmatrix},\cdots,\begin{Vmatrix}0 & \varphi_q\\ -\varphi_q & 0\end{Vmatrix},0,\cdots,0\right\}O_1^{-1}。\tag{118}$$

因爲
$$e^{\begin{Vmatrix}0 & \varphi\\ -\varphi & 0\end{Vmatrix}}=\begin{Vmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{Vmatrix},$$

故由(117)與(118)得出:

$$O=e^{K}。\tag{119}$$

從矩陣等式(119)可推得運算子等式(116)。

爲了表出第二種正交運算子,在討論中引進在某一法正交基底 $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 中爲等式

$$\boldsymbol{W}\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{W}\boldsymbol{e}_{n-1}=\boldsymbol{e}_{n-1},\ \boldsymbol{W}\boldsymbol{e}_n=-\boldsymbol{e}_n\tag{120}$$

所決定的特殊運算子 $\boldsymbol{W}$。

$\boldsymbol{W}$ 是一個第二種正交運算子。如果 $\boldsymbol{O}$ 是任何一個第二種正交運算子,那末 $\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{O}$ 與 $\boldsymbol{O}\boldsymbol{W}^{-1}$ 是第一種運算子,故可表爲 $e^{\boldsymbol{K}}$ 與 $e^{\boldsymbol{K}_1}$ 的形狀,其中 $\boldsymbol{K}$ 與 $\boldsymbol{K}_1$ 爲反對稱運算子。所以對於第二種正交運算子得出公式

$$\boldsymbol{O}=\boldsymbol{W}e^{\boldsymbol{K}}=e^{\boldsymbol{K}_1}\boldsymbol{W}。\tag{121}$$

在(120)式中可以這樣來選取基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 使得他與(110)與(112)式中基底 $\boldsymbol{x}_k$, $\boldsymbol{y}_k$, $\boldsymbol{x}_l$ ($k=1, 2, \cdots, q$; $l=2q+1, \cdots, n$) 重合。這樣定出的運算子 $\boldsymbol{W}$ 與 $\boldsymbol{K}$ 可易; 故 (121) 中兩個公式可以合併爲一

❶ 在第一種正交矩陣,O 的特徵數中,有偶數個等於 -1。對角形矩陣 $\begin{Vmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{Vmatrix}$ 可以寫爲 $\begin{Vmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{Vmatrix}$ 的形狀,其中 $\varphi=\pi$。

個:

$$O=We^{K}\ (W=W'=W^{-1};\ K'=-K,\ WK=KW)。\quad (122)$$

我們還要討論歐幾里得空間中結合正交運算子與反對稱運算子的凱萊公式。容易驗證,公式

$$O=(E-K)(E+K)^{-1} \quad (123)$$

變反對稱運算子 K 為正交運算子 O 。由(123)可以用 O 表出 K:

$$K=(E-O)(E+O)^{-1}。\quad (124)$$

公式(124)與(123)在反對稱運算子與沒有特徵數 -1 的正交運算子之間建立了一個一一對應。代替(123)與(124)可以取次諸公式:

$$O=-(E-K)(E+K)^{-1}, \quad (125)$$

$$K=(E+O)(E-O)^{-1}。\quad (126)$$

在此時數 $+1$ 有特殊點的作用。

3. 對應於定理 9 的實矩陣的極分解式,容許得出基本公式(107),(109),(111),(113),而不必同前面所做的一樣,用一個 U-空間來包含歐幾里得空間。諸基本公式的第二種推理所依據的是次之定理:

定理 10. 如果兩個實規範矩陣相似:

$$B=T^{-1}AT\ (AA'=A'A,\ BB'=B'B,\ A=\bar{A},\ B=\bar{B}), \quad (127)$$

那末這兩個矩陣是實正交-相似的:

$$B=O^{-1}AO \quad (O=\bar{O}=O'^{-1})。\quad (128)$$

證明 因為規範 A 與 B 有相同的特徵數,所以(參考本章,§ 10 的 2°)有這樣的多項式 $g(\lambda)$ 存在,使得

$$A'=g(A),\ B'=g(B)。$$

故從(127)推得等式

$$g(B)=T^{-1}g(A)T$$

可以寫為:

$$B'=T^{-1}A'T \quad (129)$$

轉置這一等式中兩節的矩陣,我們得出:

$$B=T'AT'^{-1}。\quad (130)$$

比較(127)與(130)給予:

$$TT'A = ATT' 。\tag{131}$$

現在應用矩陣 T 的極分解式:

$$T = SO,\tag{132}$$

其中 $S = \sqrt{TT'} = h(TT')$ [$h(\lambda)$ 為一多項式]是對稱矩陣,而 O 為實正交矩陣。因由(131)知矩陣 A 與 TT' 可易,所以他亦與矩陣 $S = h(TT')$ 可易。故以(132)的 T 的表示式代入(127)中,卽得:

$$B = O^{-1}S^{-1}ASO = O^{-1}AO .$$

定理已經證明。

討論實標準矩陣

$$\left\{\left\| \begin{matrix} \mu_1 & \nu_1 \\ -\nu_1 & \mu_1 \end{matrix} \right\|, \cdots, \left\| \begin{matrix} \mu_q & \nu_q \\ -\nu_q & \mu_q \end{matrix} \right\|, \mu_{2q+1}, \cdots, \mu_n \right\}。\tag{133}$$

矩陣(133)是規範的且有特徵數 $\mu_1 \pm i\nu_1, \cdots, \mu_q \pm i\nu_q, \mu_{2q+1}, \cdots, \mu_n$。因為規範矩陣是單構的,可以任何有與以上相同的特徵數的規範矩陣相似於(由於定理 10 是實正交-相似於)矩陣(133)。這樣一來,就得到(107)式。

全相類似的可以得出(109),(111),(113)式。

§ 15. 可易規範運算子

在 § 10 中我們已經證明,在 n 維 U-空間中兩個可易運算子 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 常有公共的特徵向量。用歸納法可以證明,這一結果不僅對於兩個運算子能夠成立,卽對任意有限多個可易運算子亦能成立。事實上,如果給予 m 個兩兩可易的運算子 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_m$, 在其前 $m-1$ 個裏面有公共特徵向量 $\boldsymbol{x}$, 那末逐字重復引 1 (§ 10) 的推理 [以任一 $\boldsymbol{A}_i$ 作為 $\boldsymbol{A}$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$, 而以運算子 $\boldsymbol{A}_m$ 作為 $\boldsymbol{B}$], 我們得出運算子 $\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2, \cdots, \boldsymbol{A}_m$ 的公共特徵向量 $\boldsymbol{y}$ 。

所證明的結果對於無限多個可易運算子亦能成立,因為這種集合

祇能含有有限個 ($\leqslant n^2$) 線性無關運算子，而他們的公共特徵向量就是所予集合中所有運算子的公共特徵向量。

現在假設給予任意有限個或無限多個兩兩可易的規範運算子 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\cdots$ 他們有公共特徵向量 $\boldsymbol{x}_1$。以 $\boldsymbol{T}_1$ 記 $\boldsymbol{R}$ 中正交於 $\boldsymbol{x}_1$ 的所有向量所構成的 $n-1$ 維子空間。根據 § 10, 3°. 子空間 $\boldsymbol{T}_1$ 對運算子 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\cdots$ 不變。故所有這些運算子在 $\boldsymbol{T}_1$ 中有公共的特徵向量 $\boldsymbol{x}_2$。討論平面 $[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2]$ 的正交補空間 $\boldsymbol{T}_2$，在他裏面分出向量 $\boldsymbol{x}_3$，諸如此類. 這樣一來，對於運算子 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\cdots$，我們得出公共的正交特徵向量組 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{x}_n$ 可以使這些向量標準化。我們證明了

定理 11. 如果在 U–空間 $\boldsymbol{R}$ 中給予有限個或無限多個兩兩可易的規範運算子 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\cdots$，那末所有這些運算子有公共的完全法正交特徵向量組 $\boldsymbol{z}_1$, $\boldsymbol{z}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{z}_n$:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_i=\lambda_i\boldsymbol{z}_i,\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{z}_i=\lambda_i'\boldsymbol{z}_i,\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{z}_i=\lambda''_i\boldsymbol{z}_i, \cdots [(\boldsymbol{z}_i\boldsymbol{z}_k)=\delta_{ik};\ i, k=1, 2, \cdots, n]。\tag{134}$$

這個定理有矩陣的說法:

定理 11′. 如果給予有限個或無限多個兩兩可易的規範矩陣，那末有同一 U–變換存在使所有這些矩陣都變爲對角形，亦卽有這樣的 U–矩陣 U 存在，使得:

$$\left.\begin{aligned} &A=U\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}U^{-1},\ B=U\{\lambda_1', \cdots, \lambda_n'\}U^{-1}, \\ &C=U\{\lambda_1'', \cdots, \lambda_n''\}U^{-1}, \cdots (U=U^{*-1})。\end{aligned}\right\}\tag{135}$$

現在設在歐幾里得空間 R 中給予了可易規範運算子。以 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\cdots$ 記他們裏面的線性無關運算子 (個數有限)。有如 § 13 中所做的一樣，包含 $\boldsymbol{R}$ 於 U–空間 $\widetilde{\boldsymbol{R}}$ 中(保持 $\boldsymbol{R}$ 的度量)。那末根據定理 11, 運算子 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\cdots$ 在 $\widetilde{\boldsymbol{R}}$ 中有公共的完全法正交特徵向量組 $\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \cdots, \boldsymbol{z}_n$. 亦卽等式(134)能夠成立。

討論運算子 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\cdots$ 的任意線性組合:

$$\boldsymbol{P}=\alpha\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{B}+\gamma\boldsymbol{C}+\cdots$$

對於任何實數值 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$, 運算子 $\boldsymbol{P}$ 是 $\widetilde{\boldsymbol{R}}$ 中實($\boldsymbol{A}\boldsymbol{R}\subset\boldsymbol{R}$)規範運算子,且有

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{P}\boldsymbol{z}_j=\Lambda_j\boldsymbol{z}_j,\ \Lambda_j=\alpha\lambda_j+\beta\lambda_j'+\gamma\lambda_j''+\cdots\\ \left[(\boldsymbol{z}_j\boldsymbol{z}_k)=\delta_{jk};\ j,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n\right]。\end{array}\right\} \qquad (136)$$

運算子 $\boldsymbol{P}$ 的特徵數 Λ_j $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 是關於 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ 的線性型。由於運算子 $\boldsymbol{P}$ 是實運算子，這些線性型可以分成複共軛對與實係數型;給予特徵向量以適當的序數,我們有:

$$\begin{array}{c}\Lambda_{2k-1}=M_k+iN_k,\ \Lambda_{2k}=M_k-iN_k,\ \Lambda_l=M_l\\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ q;l=2q+1,\ \cdots,\ n),\end{array} \qquad (137)$$

其中 M_k, N_k, M_l 為 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ 的實係數線性型。

同這些相對應的，我們可以在(136)中視向量 $\boldsymbol{z}_{2k-1}$ 與 $\boldsymbol{z}_{2k}$ 複共軛，而 $\boldsymbol{z}_l$ 為實向量:

$$\begin{array}{c}\boldsymbol{z}_{2k-1}=\boldsymbol{x}_k+i\boldsymbol{y}_k,\ \boldsymbol{z}_{2k}=\boldsymbol{x}_k-i\boldsymbol{y}_k,\ \boldsymbol{z}_l=\boldsymbol{x}_l\\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ q;\ l=2q+1,\ \cdots,\ n)。\end{array} \qquad (138)$$

那末易知,實向量

$$\boldsymbol{x}_k,\ \boldsymbol{y}_k,\ \boldsymbol{x}_l\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ q;\ l=2q+1,\ \cdots,\ n) \qquad (139)$$

構成 $\boldsymbol{R}$ 中法正交基底。此處有標準基底[1]:

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_k=M_k\boldsymbol{x}_k-N_k\boldsymbol{y}_k,\\ \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}_k=N_k\boldsymbol{x}_k+M_k\boldsymbol{y}_k,\\ \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}_l=M_l\boldsymbol{x}_l\end{array}\right. \left(\begin{array}{l}k=1,\ 2,\ \cdots,\ q,\\ l=2q+1,\cdots,\ n\end{array}\right)。 \qquad (140)$$

因為所予集合中所有運算子都可以從 $\boldsymbol{P}$ 給予特殊值 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ 來得出,所以與這些參數無關的基底(139)是所有已予運算子的共同標準基底。

我們證明了

定理 12. 如果在歐幾里得空間 $\boldsymbol{R}$ 中給予任何可易規範線性運算子的集合,那末所有這些運算子有共同的法正交標準基底 $\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{y}_k, \boldsymbol{x}_l$:

[1] 等式(140)可以從等式(136),(137)與(138)來得出。

$$\left.\begin{array}{lll} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k=\mu_k\boldsymbol{x}_k-\nu_k\boldsymbol{y}_k, & \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_k=\mu_k'\boldsymbol{x}_k-\nu_k'\boldsymbol{y}_k, & \cdots, \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_k=\nu_k\boldsymbol{x}_k+\mu_k\boldsymbol{y}_k, & \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_k=\nu_k'\boldsymbol{x}_k+\mu_k'\boldsymbol{y}_k, & \cdots, \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_l=\mu_l\boldsymbol{x}_l, & \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_l=\mu_l'\boldsymbol{x}_l & \cdots, \end{array}\right\} \tag{141}$$

引進定理 12 的矩陣說法：

定理 12′. 任意可易實規範矩陣 $A, B, C, \cdots$ 的集合，可以藉助於同一實正交變換 O 化爲標準形狀：

$$\left.\begin{array}{l} A=O\left\{\left\|\begin{matrix}\mu_1 & \nu_1\\ -\nu_1 & \mu_1\end{matrix}\right\|,\cdots,\left\|\begin{matrix}\mu_q & \nu_q\\ -\nu_q & \mu_q\end{matrix}\right\|,\ \mu_{2q+1},\ \cdots,\ \mu_k\right\}O^{-1} \\ B=O\left\{\left\|\begin{matrix}\mu_1' & \nu_1'\\ -\nu_1' & \mu_1'\end{matrix}\right\|,\cdots,\left\|\begin{matrix}\mu_q' & \nu_q'\\ -\nu_q' & \mu_q'\end{matrix}\right\|,\ \mu_{2q+1}',\ \cdots,\ \mu_n'\right\}O^{-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\}。 \tag{142}$$

註 如果運算子 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \cdots$（矩陣 $A, B, C, \cdots$）中任何一個，例如 $\boldsymbol{A}$ (A)，是對稱的，那末在對應的(141)式[對應的(142)]式中所有的 ν 都等於零。在反對稱的情形所有的 μ 都等於零。如果 $\boldsymbol{A}$ 是正交運算子（A 是正交矩陣），那末 $\mu_k=\cos\varphi_k$, $\nu_k=\sin\varphi_k$, $\mu_l=\pm1$ ($k=1, 2, \cdots, q$; $l=2q+1, \cdots, n$)。

第十章　二次型與安密達型

§1. 二次型中變數的變換

1. 關於 n 個變數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齊次多項式稱爲二次型。二次型常可表爲次之形狀：

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k \quad (a_{ik}=a_{ki};\ i, k=1, 2, \cdots, n),$$

其中 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 是一個對稱矩陣。

以 x 記單列矩陣 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 且用以縮寫二次型

$$A(x, x)=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k, \tag{1}$$

我們可以寫爲：

$$A(x, x)=x'Ax\text{❶}。 \tag{2}$$

如果 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 是一個實對稱矩陣，那末稱型(1)爲實二次型。在這一章中我們主要的是討論實二次型。

行列式 $|A|=|a_{ik}|_1^n$ 稱爲二次型 $A(x, x)$ 的判別式。稱二次型爲降秩的，如果他的判別式等於零。

每一個二次型對應於一個雙線性型：

$$A(x, y)=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i y_k \tag{3}$$

或

$$A(x, y)=x'Ay \quad [x=(x_1, \cdots, x_n),\ y=(y_1, \cdots, y_n)]。 \tag{4}$$

如果 $x^1, x^2, \cdots, x^l, y^1, y^2, \cdots, y^m$ 都是單列矩陣，而 $c_1, c_2, \cdots, c_l, d_1, d_2, \cdots, d_m$ 都是純量，那末由雙線性型[參考(4)] $A(x, y)$ 得：

$$A\left(\sum_{i=1}^{l} c_i x^i, \sum_{j=1}^{m} d_j y^j\right)=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m} c_i d_j A(x^i, y^j)。 \tag{5}$$

---

❶ 符號 ′ 表示轉置的意思。在式(2)中二次型表爲三個矩陣的乘積：行矩陣 x'，方陣 A 與列矩陣 x 的乘積。

如果在 n 維歐幾里得空間中給予某一個對稱運算子 $\boldsymbol{A}$ 而且這個運算子在某一法正交基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 中對應於矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$，那末對於任何向量

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{n} y_i \boldsymbol{e}_i,$$

都有恆等式

$$A(x, y)=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{y})\text{❶}。$$

特別的，

$$A(x, x)=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x})。$$

此處 $a_{ik}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_k) \quad (i, k=1, 2, \cdots, n)$。

2. 我們來看一下，施行變數的變換

$$x_i=\sum_{k=1}^{n} t_{ik}\xi_k \quad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{6}$$

時，二次型的係數矩陣有怎樣的變化。在矩陣的寫法，這個變換可以寫爲：

$$x=T\xi。 \tag{6'}$$

此處 x 與 ξ 是單列矩陣：$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 與 $\xi=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，而 T 爲變換矩陣：$T=\|t_{ik}\|_1^n$。

以(6′)式中 x 的表示式代進(2)式，我們得出：

$$A(x, x)=\xi' T' A T\xi=\xi'\widetilde{A}\xi=\widetilde{A}(\xi, \xi),$$

其中

$$\widetilde{A}=T'AT。 \tag{7}$$

公式(7)是把變換後的二次型 $\widetilde{A}(\xi, \xi)=\sum_{i,k=1}^{n}\widetilde{a}_{ik}\xi_i\xi_k$ 的係數矩陣 $\widetilde{A}=\|\widetilde{a}_{ik}\|_1^n$ 經原始二次型的係數矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 與變換矩陣 $T=\|t_{ik}\|_1^n$ 來表出的表示式。

由(7)式知變換後二次型的判別式等於原判別式與變換行列式的

❶ 在 $A(x, y)$ 中的括號是合併在一處的規定符號；在 $(\boldsymbol{A}x, y)$ 與 $(x, \boldsymbol{A}y)$ 中的括號是表示無向積。

平方的乘積：

$$|\widetilde{A}|=|A||T|^2。\qquad (8)$$

以後我們完全應用變數的滿秩變換（$|T|\neq 0$）。對於這種變換，由（7）式可以看出，係數矩陣的秩是沒有變動的（矩陣 A 的秩等於矩陣 $\widetilde{A}$ 的秩[1]。係數矩陣的秩常稱爲型的秩。

定義 1. 兩個對稱矩陣 A 與 $\widetilde{A}$，以等式（7）相結合，且有 $|T|\neq 0$ 者，稱爲相合的。

這樣一來，每一個二次型都與兩兩相合的全部對稱矩陣所構成的矩陣類相結合。有如上面所提到過的，所有這些矩陣有同一的秩——型的秩。秩對所予矩陣類是不變的。對於實二次型，還有第二個不變量稱爲二次型的"符號差"。我們將在次節中引進這一概念。

§2. 化二次型爲平方和．慣性定律

可以有無窮多種方法把實二次型 $A(x, x)$ 表爲形狀

$$A(x, x)=\sum_{i=1}^{n} a_i X_i^2, \qquad (9)$$

其中 $a_i\neq 0(i=1, 2,\cdots, r)$，而

$$X_i=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}x_k \quad (i=1, 2,\cdots, r)$$

爲變數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的線性無關的實線性型（故 $r\leqslant n$）。

考慮變數的滿秩變換，使新變數 $\xi_1, \xi_2,\cdots, \xi_n$ 與舊變數 $x_1, x_2,\cdots, x_n$ 的前 r 個之間的關係爲次諸等式所規定[2]

$$\xi_i=X_i \quad (i=1, 2, \cdots, r)。$$

那末對於新變數有

$$A(x, x)=\widetilde{A}(\xi, \xi)=\sum_{i=1}^{r} a_i\xi_i^2,$$

---

[1] 參考第一章，§3，2。

[2] 我們應當這樣來得出我們的變換，以線性型 $X_{r+1}, \cdots, X_n$ 來補足這組線性型 $X_1, \cdots, X_r$ 使得 n 個型 $X_j(j=1, 2, \cdots, n)$ 線性無關，而後取 $\xi_j=X_j(j=1, 2, \cdots, n)$。

因而 $\widetilde{A}=\{a_1, a_2, \cdots, a_r, 0, \cdots, 0\}$。但矩陣 $\widetilde{A}$ 的秩等於 r。故在表示式(9)中平方的個數常等於型的秩。

我們來證明，對於型 $A(x, x)$ 的各種不同的表示式(9)，不僅平方個數不變，而且正平方的個數❶(因而全部負平方的個數)亦是不變的。

定理 1.(二次型的慣性定律) 在表實二次型 $A(x, x)$ 爲線性無關型的平方和❷

$$A(x, x)=\sum_{i=1}^{r} a_i X_i^2 \tag{9}$$

時，其正平方數與負平方數與表型爲所說的形狀的方法無關。

證明 設與表示式(9)相平行的有型 $A(x, x)$ 的另一表示式，亦表爲線性無關型的平方和

$$A(x, x)=\sum_{i=1}^{r} b_i Y_i^2$$

且設

$$a_1>0\ \ a_2>0, \cdots, a_h>0,\ a_{h+1}<0, \cdots, a_r<0,$$
$$b_1>0\ \ b_2>0, \cdots, b_g>0,\ b_{g+1}<0, \cdots, b_r<0\text{。}$$

假設 $h\neq g$，例如 $h<g$。那末在恆等式

$$\sum_{i=1}^{r} a_i X_i^2=\sum_{i=1}^{r} b_i Y_i^2 \tag{10}$$

中，給予變數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 以數值，使其適合有 $r-(g-h)$ 個方程的方程組

$$X_1=0,\ X_2=0, \cdots, X_h=0,\ Y_{g+1}=0, \cdots, Y_r=0 \tag{11}$$

而且在型 $X_{h+1}, \cdots, X_r$ 中至少有一個不爲零❸。對於變數的這些值，

❶ 表示式(9)中正(負)平方的個數是了解爲正(負)的 a_i 的個數。

❷ 線性無關的平方和是了解爲形爲(9)式的和，其中所有 $a_i\neq 0$ 而且型 $X_1, X_2, \cdots, X_r$ 是線性無關的。

❸ 這樣的值是存在的，因爲在相反的情形，方程 $X_{h+1}=0, \cdots, X_r=0$ 是要從 $r-(g-h)$ 個方程(11)得出幾個方程 $X_1=0, \cdots, X_r=0$。這是不可能的，因爲線性型 $X_1, X_2, \cdots, X_r$ 線性無關。

恆等式的左節等於

$$\sum_{j=h+1}^{r} a_j X_j^2 < 0,$$

而其右節等於

$$\sum_{k=1}^{g} b_k Y_k^2 \geqslant 0。$$

這樣一來，$h \neq g$ 的假設得出一個矛盾的結果。定理已經證明。

定義 2. 在型 $A(x, x)$ 的表示式中，正平方數 π 與負平方數 ν 的差 σ 稱爲型 $A(x, x)$ 的符號差{記爲：$\sigma=\sigma[A(x, x)]$}。

秩 r 與符號差唯一的決定數 π 與 ν，因爲

$$r=\pi+\nu,\ \sigma=\pi-\nu。$$

還要注意，在(9)式中可以把正因子 $\sqrt{|a_i|}$ 吸到型 X_i ($i=1, 2, \cdots, r$) 的裏面去。此時(9)式有次之形狀

$$A(x, x)=X_1^2+X_2^2+\cdots+X_\pi^2-X_{\pi+1}^2-\cdots-X_r^2。\tag{12}$$

命 $\xi_i=X_i (i=1, 2, \cdots, r)$ ❶，我們化型 $A(x, x)$ 爲法式

$$\tilde{A}(\xi, \xi)=\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_\pi^2-\xi_{\pi+1}^2-\cdots-\xi_r^2。\tag{13}$$

故由定理 1 推知，每一個實對稱矩陣 A 都相合於一個對角形矩陣，其對角線上的元素等於 $+1, -1$ 或 0：

$$A=T'\{\underbrace{+1,\cdots,+1}_{\pi},\ \underbrace{-1,\cdots,-1}_{\nu},\ 0,\cdots,0\}T。\tag{14}$$

在次節中我們將給予從二次型的係數來定出符號差的規則。

§3. 化二次型爲平方和的拉格蘭日與耶可比方法

從上節的結果推知，爲了定出型的秩與符號差，祇要有任一方法化這一個型爲線性無關型的平方和就已足夠。

此處我們述說兩個演化的方法：拉格蘭日方法與耶可比方法。

❶ 參考本節的第一個足註。

1. 拉格蘭日方法 設予二次型

$$A(x, x)=\sum_{i, k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k 。$$

討論兩種情形：

(1)對於某一個 $g(1\leqslant g\leqslant n)$ 對角線係數 $a_{gg}\neq 0$。那末命

$$A(x, x)=\frac{1}{a_{gg}}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{gk} x_k\right)^2+A_1(x, x), \tag{15}$$

從直接驗算可以證明，二次型 $A_1(x, x)$ 已經不含變數 x_g。祇要矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 的對角線上有元素不等於零，從二次型中分出一個平方的這種方法常可施行。

(2)係數 $a_{gg}=0$, $a_{hh}=0$, 但 $a_{gh}\neq 0$。在這一情形命：

$$\begin{aligned}A(x, x)=&\frac{1}{2a_{hg}}\left[\sum_{k=1}^{n}(a_{gk}+a_{hk}) x_k\right]^2-\\&-\frac{1}{2a_{hg}}\left[\sum_{k=1}^{n}(a_{gk}-a_{hk}) x_k\right]^2+A_2(x, x)。\end{aligned} \tag{16}$$

線性型

$$\sum_{k=1}^{n} a_{gk} x_k, \sum_{k=1}^{n} a_{hk} x_k \tag{17}$$

線性無關，因爲第一個含有 x_h 而不含有 x_g，相反的，第二個含有 x_g，而不含 x_h。故在(16)式的方括號中兩個線性型是線性無關的[因爲是線性無關型(17)的和與差]。

這樣一來，我們在 $A(x, x)$ 中分出了兩個線性無關型的平方。每一個平方中都含有 x_g 與 x_h，而在型 $A_2(x, x)$ 中，容易驗證，並不含有這兩個變數。

順次適當的結合(1)與(2)法，常可利用有理運算化二次型 $A(x, x)$ 爲平方和。而且所得出的平方是無關的，因爲在每一步驟中，分出的平方中含有一個變數是在以後諸平方中所沒有的。

還須注意，基本公式(15)與(16)可以寫爲：

$$A(x, x)=\frac{1}{4a_{gg}}\left(\frac{\partial A}{\partial x_g}\right)^2+A_1(x, x), \tag{15'}$$

$$A(x, x)=\frac{1}{8a_{gh}}\left[\left(\frac{\partial A}{\partial x_g}+\frac{\partial A}{\partial x_h}\right)^2-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\partial A}{\partial x_g}-\frac{\partial A}{\partial x_h}\right)^2\right]+A_2(x, x)。\tag{16'}$$

例

$$A(x, x)=4x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-4x_1x_2-4x_1x_3+4x_1x_4+4x_2x_3-4x_3x_4。\tag{15'}$$

應用(15′)式($g=1$):

$$A(x, x)=\frac{1}{16}(8x_1-4x_2-4x_3+4x_4)^2+A_1(x, x)=$$

$$=(2x_1-x_2-x_3+x_4)^2+A_1(x, x),$$

其中
$$A_1(x, x)=2x_2x_3+2x_2x_4-2x_3x_4。$$

應用(16′)式($g=2,\ h=3$):

$$A_1(x, x)=\frac{1}{8}(2x_2+2x_3)^2-\frac{1}{8}(2x_3-2x_2+4x_4)^2+A_2(x, x)=$$

$$=\frac{1}{2}(x_2+x_3)^2-\frac{1}{2}(x_3-x_2+2x_4)^2+A_2(x, x),$$

其中
$$A_2(x, x)=2x_4^2。$$

最後有

$$A(x, x)=(2x_1-x_2-x_3+x_4)^2+\frac{1}{2}(x_2+x_3)^2-\frac{1}{2}(x_3-x_2+2x_4)^2+2x_4^2,$$

$$r=4,\quad \sigma=2。$$

2. 耶可比方法　以 r 記二次型 $A(x, x)=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}x_ix_k$ 的秩，且設

$$D_k=A\begin{pmatrix}1 & 2\cdots k\\ 1 & 2\cdots k\end{pmatrix}\neq 0\quad (k=1, 2, \cdots, r)。$$

那末應用高斯消去法演段(參考第二章，§1)，可以化對稱矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 爲次之形狀：

$$G=\begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots\cdots\cdots & g_{1n}\\ 0 & g_{22} & \cdots\cdots\cdots & g_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\\ 0 & 0\cdots\cdots & g_{rr}\cdots\cdots & g_{rn}\\ 0 & 0\cdots\cdots & 0\cdots\cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\\ 0 & 0\cdots\cdots & 0\cdots\cdots & 0\end{Vmatrix}。\tag{18}$$

矩陣 G 的元素可以經矩陣 A 的元素用已知公式❶

$$g_{pq}=\frac{A\begin{pmatrix}1 & 2\cdots p-1 & p\\ 1 & 2\cdots p-1 & q\end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix}1 & 2\cdots p-1\\ 1 & 2\cdots p-1\end{pmatrix}}$$

$$(q=p,\ p+1,\cdots,\ n;\ p=1,\ 2,\cdots,\ r)。\qquad (19)$$

來表出。特別的，

$$g_{pp}=\frac{D_p}{D_{p-1}}\quad (p=1,\ 2,\cdots,\ r;\ D_0=1)。\qquad (20)$$

在第二章，§ 3 中[公式(55)]已經證明，

$$A=G'\hat{D}G,\qquad (21)$$

其中 $\hat{D}$ 爲對角形矩陣：

$$\hat{D}=\left\{\frac{1}{D_1},\ \frac{D_1}{D_2},\cdots,\frac{D_{r-1}}{D_r},\ 0,\cdots,\ 0\right\}=$$

$$=\left\{\frac{1}{g_{11}},\ \frac{1}{g_{22}},\cdots,\frac{1}{g_{rr}},\ 0,\cdots,\ 0\right\}。\qquad (22)$$

並不破壞等式(21)，我們可以換矩陣 G 的後 $n-r$ 個行中的零元素以任意的元素。這種代換可以變矩陣 G 爲滿秩高三角形矩陣

$$T=\left\|\begin{matrix}g_{11} & g_{12}\cdots\cdots\cdots\cdots g_{1n}\\ 0 & g_{22}\cdots\cdots\cdots\cdots g_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ 0 & 0\cdots\cdots g_{rr}\cdots\cdots g_{rn}\\ 0 & 0\cdots\cdots 0 *\cdots\cdots *\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ 0 & 0\cdots\cdots 0\ \cdots\cdots *\end{matrix}\right\|,\quad (|T|\neq 0)。\qquad (23)$$

等式(21)可以寫爲：

$$A=T'\hat{D}T。\qquad (24)$$

從這個等式知道，二次型❷

❶ 參考第二章，§ 2。

❷ 我們視 $\hat{D}(\xi,\ \xi)$ 爲 n 個變數 $\xi_1,\ \xi_2,\cdots,\ \xi_n$ 的二次型。

$$\hat{D}(\xi, \xi)=\sum_{k=1}^{r}\frac{D_{k-1}}{D_k}\xi_k^2=\sum_{k=1}^{r}\frac{\xi_k^2}{g_{kk}}$$

$$[\xi=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n);\ D_0=1]$$

經變換
$$\xi=Tx$$
後變爲型 $A(x, x)$。

因爲

$$\xi_k=X_k,\ X_k\equiv g_{kk}x_k+g_{k,k+1}x_{k+1}+\cdots+g_{kn}x_n\quad(k=1,\cdots,r),\tag{25}$$

所以有耶可比公式[1]

$$A(x, x)=\sum_{k=1}^{r}\frac{D_{k-1}}{D_k}X_k^2=\sum_{k=1}^{r}\frac{X_k^2}{g_{kk}}\quad(D_0=1)。\tag{26}$$

這個公式給予表 $A(x, x)$ 爲 r 個無關平方和的表示式[2]。

耶可比公式常可表爲另一形狀。

引進線性無關型

$$Y_k=D_{k-1}X_k\ (k=1, 2, \cdots, r;\ D_0=1)\tag{27}$$

來代替 $X_k(k=1, 2, \cdots, r)$。那末耶可比公式(26)可寫爲:

$$A(x, x)=\sum_{k=1}^{r}\frac{Y_k^2}{D_{k-1}D_k}\tag{28}$$

此處

$$Y_k=c_{kk}x_k+c_{k,k+1}x_{k+1}+\cdots+c_{kn}x_n(k=1, 2, \cdots, r),\tag{29}$$

其中

$$c_{kq}=A\begin{pmatrix}1 & 2\cdots k-1 & k\\ 1 & 2\cdots k-1 & q\end{pmatrix}$$

$$(q=k, k+1, \cdots, n;\ k=1, 2, \cdots, r)。\tag{30}$$

---

[1] 耶可比公式的另一推理,並不依靠等式(21)的,可以在,例如,[7],42—44 頁中找到。

[2] 在耶可比公式中諸平方的無關性亦可以由型 $A(x, x)$ 的秩等於 r 來得出。但是型 $X_1, X_2, \cdots, X_r$ 的無關性亦可以直接的來證明。事實上,根據(20),$g_{kk}=\frac{D_k}{D_{k-1}}\neq 0$,故型 X_k 含有變數 x_k,而在型 $X_{k+1}, \cdots, X_r(k=1, \cdots, r)$ 中,x_k 都不出現。故得型 $X_1, X_2, \cdots, X_r$ 的線性無關性。

例

$$A(x, x)=x_1^2+3x_2^2-3x_4^2-4x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4-6x_2x_3+8x_2x_4+2x_3x_4\text{。}$$

化矩陣

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & -3 \end{Vmatrix}$$

爲高斯式

$$G=\begin{Vmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}\text{。}$$

故 $r=2,\ g_{11}=1,\ g_{22}=-1$。

耶可比公式(26)給出:

$$A(x, x)=(x_1-2x_2+x_3-x_4)^2-(-x_2-x_3+2x_4)^2\text{。}$$

由耶可比公式(28)推得

定理 2.（耶可比） 如果對於秩爲 r 的二次型

$$A(x, x)=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k$$

有不等式

$$D_k=A\begin{pmatrix}1 & 2\cdots k\\ 1 & 2\cdots k\end{pmatrix}\neq 0 \quad (k=1, 2, \cdots, r), \tag{31}$$

那末型 $A(x, x)$ 的正平方數 π 與負平方數 ν 各等於數序

$$1,\ D_1,\ D_2,\ \cdots,\ D_r \tag{32}$$

中的同號數 P 與變號數 V，亦即 $\pi=P(1,\ D_1,\ D_2,\ \cdots,\ D_r)$，$\nu=V(1,\ D_1,\ D_2,\ \cdots,\ D_r)$ 且其符號差爲

$$\sigma=r-2V(1,\ D_1,\ D_2,\cdots,\ D_r)\text{。} \tag{33}$$

註 1. 如果在數序 $1,\ D_1,\ \cdots,\ D_r\neq 0$ 中有零出現，但沒有三個相鄰的數完全等於零，那末爲了定出符號差，仍可應用公式

$$\sigma=r-2V(1,\ D_1,\ D_2,\cdots,\ D_r),$$

但在其中除去等於零的 D_k，如果 $D_{k-1}D_{k+1}\neq 0$；而在 $D_k=D_{k+1}=0$ 的

時候，取

$$V(D_{k-1}, D_k, D_{k+1}, D_{k+2})=\begin{cases}1, \text{如果} \dfrac{D_{k+2}}{D_{k-1}}<0, \\ 2, \text{如果} \dfrac{D_{k+2}}{D_{k-1}}>0。\end{cases} \tag{34}$$

我們在此處引進了這一個規則，但是沒有給予證明❶。

註 2. 如果在數序 $D_1, D_2, \cdots, D_{r-1}$ 中有三個相鄰的零出現時，二次型的符號差不能用耶可比定理直接定出。在此時不爲零的 D_k 的符號不能決定型的符號差。這可以用次例來說明：

$$A(x, x)=2a_1x_1x_4+a_2x_2^2+a_3x_3^2 \quad (a_1a_2a_3\neq 0)。$$

此處 $$D_1=D_2=D_3=0,\ D_4=-a_1^2a_2a_3\neq 0。$$

同時有 $$\nu=\begin{cases}1 & \text{如果 } a_2>0,\ a_3>0, \\ 3 & \text{如果 } a_2<0,\ a_3<0。\end{cases}$$

在這兩種情形都有 $D_4<0$。

註 3. 如果 $D_1\neq 0, \cdots, D_{r-1}\neq 0$，而 $D_r=0$，那末 $D_1, D_2, \cdots, D_{r-1}$ 的符號不能決定型的符號差。可以取次型爲例來說明：

$$ax_1^2+ax_2^2+bx_3^2+2ax_1x_2+2ax_2x_3+2ax_1x_3=$$
$$=a(x_1+x_2+x_3)^2+(b-a)x_3^2。$$

§4. 正二次型

在這一節中我們來討論特殊的但是重要的一類二次型——正二次型。

定義 3. 實二次型 $A(x, x)=\sum_{i, k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k$ 稱爲非負的（非正的），如其對於變數的任何實數值都有

❶ 這個規則，在祇有一個零 D_k 時爲戈力琴費傑爾所建立，而在與零 D_k 相鄰的還有一個零出現時（沒有三個相鄰的零）則爲勿勞別涅斯[125ƒ]所得出。

$$A(x, x)\geqslant 0 \quad (\leqslant 0)。 \tag{35}$$

定義 4. 實二次型 $A(x, x)=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k$ 稱為恆正的(恆負的),如其對於變數不全等於零的任何實數值($x\neq 0$)都有

$$A(x, x)>0 \quad (<0)。 \tag{36}$$

恆正(恆負)二次型是非負(非正)二次型類的特款。

設予非負型 $A(x, x)$。表其為無關平方和:

$$A(x, x)=\sum_{i=1}^{r} a_i X_i^2。 \tag{37}$$

在這一表示式中所有的平方係數都必須是正的:

$$a_i>0 \quad (i=1, 2, \cdots, r)。 \tag{38}$$

事實上,如果有任何一個 $a_i<0$,那末可以選取這樣的量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,使得

$$X_1=\cdots=X_{i-1}=X_{i+1}=\cdots=X_r=0,\ X_i\neq 0。$$

但是對於變數的這些值,型 $A(x, x)$ 有負值,與我們的條件矛盾。顯然,反之,由(37)與(38)得出型 $A(x, x)$ 的非負性。

這樣一來,非負二次型就為等式 $\sigma=r\ (\pi=r,\ \nu=0)$ 所決定。

現在假設 $A(x, x)$ 是一個恆正型。那末 $A(x, x)$ 亦是一個非負型。故可表之為(37)的形狀,其中所有 $a_i\ (i=1, 2, \cdots, r)$ 都是正的。從型的恆正性得出 $r=n$。事實上,在 $r<n$ 時,可以選取這樣的不全為零的量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,使得所有的 X_i 都變為零。但是由於(37),在 $x\neq 0$ 時有 $A(x, x)=0$,就與條件(36)衝突。

容易看出,反之,如果在(37)中 $r=n$ 而且所有 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都是正的,那末 $A(x, x)$ 是一個恆正型。

換句話說,當且僅當非負型滿秩時,始為一個恆正型。

次之定理,用型的係數必須適合的一些不等式來給予型的恆正性的判定。此處,我們應用在上節中已經遇到的,對於矩陣 A 的順序的主子式記號:

$$D_1=a_1,\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \cdots,\ D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}。$$

定理 3. 為了使得二次型恆正，充分必要的，是適合次諸不等式：

$$D_1>0,\ D_2>0, \cdots,\ D_n>0 。\tag{39}$$

證明 條件(39)的充分性，可以直接從耶可比公式(28)來得出。條件(39)的必要性可以建立如次。由型 $A(x, x)=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k$ 的恆正性得出其"截出"型❶

$$A_p(x, x)=\sum_{i,k=1}^{p} a_{ik}x_i x_k \quad (p=1, 2, \cdots, n)$$

的恆正性。但所有這些型都必須是滿秩的，亦即

$$D_p=|A_p|\neq 0 \quad (p=1, 2, \cdots, n)$$

現在我們有可能性來利用耶可比公式(28)(取 $r=n$)。因為在這個公式的右節，所有平方的係數都是正的，所以

$$D_1>0,\ D_1D_2>0,\ D_2D_3>0, \cdots,\ D_{n-1}D_n>0 。$$

故得不等式(39)。定理已經證明。

因為適當調動變數的次序後，可以使矩陣 A 的任何一個主子式位於其左上角，故有次之

推論 對於恆正二次型 $A(x, x)=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k$，其係數矩陣的所有主子式都是正的❷：

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \cdots i_p \\ i_1 & i_2 \cdots i_p \end{pmatrix}>0 \quad (1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n;\ p=1, 2, \cdots, n)。$$

註 由順序的主子式的非負性

$$D_1\geqslant 0,\ D_2\geqslant 0,\ \cdots,\ D_n\geqslant 0 \tag{40}$$

❶ 如果在型 $A(x, x)$ 中，取 $x_{p+1}=\cdots=x_n=0$ $(p=1, 2, \cdots, n)$ 我們就得出型 $A_p(x, x)$。

❷ 這樣一來，由實對稱矩陣順序的主子式的恆正性得出所有其餘主子式的恆正性。

不能得出型 $A(x, x)$ 的非負性。事實上，在型

$$a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2$$

中，$a_{11}=a_{12}=0$，$a_{22}<0$ 就適合條件(40)，但是他並不是非負的。

但是我們有次之

定理 4. 為了使得二次型 $A(x, x)=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k$ 是非負的，充分必要的，是其係數矩陣的所有主子式都是非負的：

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2\cdots i_p \\ i_1 & i_2\cdots i_p \end{pmatrix}\geqslant 0 \quad (i\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n;\ p=1, 2, \cdots, n)。\tag{41}$$

證明 引進輔助二次型

$$A_\varepsilon(x_1x)=A(x, x)+\varepsilon\sum_{i=1}^{n}x_i^2 \quad (\varepsilon>0)。$$

顯然，$\lim\limits_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon(x, x)=A(x, x)$

從型 $A(x, x)$ 的非負性得出型 $A_\varepsilon(x, x)$ 的恆正性，因而有不等式(參考定理 3 的推論)

$$A_\varepsilon\begin{pmatrix} i_1 & i_2\cdots i_p \\ i_1 & i_2\cdots i_p \end{pmatrix}>0 \quad (1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n;\ p=1, 2, \cdots, n)。$$

當 $\varepsilon\to 0$ 時取極限，我們得出條件(41)。

反之，設給予條件(41)。從這些條件得出：

$$A_\varepsilon\begin{pmatrix} i_1 & i_2\cdots i_p \\ i_1 & i_2\cdots i_p \end{pmatrix}=\varepsilon^p+\cdots\geqslant\varepsilon^p>0$$

$$(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n,\ p=1\ \ 2, \cdots, n)。$$

但是(由於定理 3) $A_\varepsilon(x, x)$ 是一個恆正型

$$A_\varepsilon(x, x)>0 \quad (x\neq 0)。$$

故當 $\varepsilon\to 0$ 時取極限，我們得出：

$$A(x, x)\geqslant 0。$$

定理卽已證明。

二次型的非正性與恆負性條件可以從不等式(39)與(41)對應的來

得出，如果把這些不等式應用於型 $A(x, x)$。

定理 5. 為了使得二次型 $A(x, x)$ 恆負，充分必要的，是他能適合不等式

$$D_1<0,\ D_2>0,\ D_3<0,\ \cdots,\ (-1)^n D_n>0\text{。} \tag{42}$$

定理 6. 為了使得二次型 $A(x, x)$ 非正，充分必要的，是他能適合不等式

$$(-1)^p A\begin{pmatrix} i_1 & i_2\cdots i_p \\ i_1 & i_2\cdots i_p \end{pmatrix}\geqslant 0$$

$$(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n,\ p=1,\ 2,\cdots,\ n)\text{。} \tag{43}$$

§5. 化二次型到主軸上去

討論任一實二次型

$$A(x, x)=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k\text{。}$$

他的係數矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 是實對稱的。所以(參考第九章，§13)他正交-相似於某一個實對角形矩陣 Λ，亦即有這樣的實正交矩陣 O 存在，使得

$$\Lambda=O^{-1}AO\quad (\Lambda=\|\lambda_i\delta_{ik}\|_1^n,\ OO'=E)\text{。} \tag{44}$$

此處 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是矩陣 A 的特徵數。

因為正交矩陣有等式 $O^{-1}=O'$，故由(44)知型 $A(x, x)$ 經變數的正交變換

$$x=O\xi\quad (OO'=E) \tag{45}$$

或更詳細的寫為

$$x_i=\sum_{k=1}^{n} o_{ik}\xi_k\quad \left(\sum_{j=1}^{n} o_{ij}o_{jk}=\delta_{ik};\ i,\ k=1,\ 2,\cdots,\ n\right) \tag{45'}$$

變為型

$$\Lambda(\xi, \xi)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\xi_i^2\text{。} \tag{46}$$

定理 7. 實二次型 $A(x, x)=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k$ 常可經正交變換變爲標準型(46);而且 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 的特徵數。

用正交變換化二次型 $A(x, x)$ 爲標準型 (46) 稱爲化到主軸上去。這個名稱是這樣來的,因爲有心二次超曲面的方程

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k=c \quad (c=\text{常數} \neq 0), \tag{47}$$

可經變數的正交變換(45′)化爲標準形

$$\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i \frac{\xi_i^2}{a_i^2}=1 \quad \left(\frac{\varepsilon_i}{a_i^2}=\frac{\lambda_i}{c};\ \varepsilon_i=\pm 1;\ i=1, 2, \cdots, n\right)。 \tag{48}$$

如果我們視 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 爲 n 維歐幾里得空間內在某一個法正交基底中的坐標,那末 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 是同一空間內在新的法正交基底中的坐標,而且對軸的"旋轉"是施行正交變換(45)所得出的。新坐標軸是有心曲面(47)的對稱軸且循常是稱爲這個曲面的主軸的。

由(46)式,知型 $A(x, x)$ 的秩 r 等於矩陣 A 的非零特徵數的個數,而其符號差 σ 等於矩陣 A 的正特徵數的個數與負特徵數的個數的差。

因此,特別的,推得這樣的結果:

如果連續的變動二次型的係數而保持其秩不變,那末係數的變動不會改變他的符號差。

此處我們是這樣推理的,由於係數的連續變動得出特徵數的連續變動。祇有在任一特徵數變號時,始能變更符號差。但是在某一中間時刻,所討論的特徵數須變爲零,這就變動了型的秩。

§6. 二次型束

在微振動理論中必須同時討論兩個二次型,其中有一個給予位能

❶ 如果 $|O|=-1$,那末變換(45)表示一個合併旋轉與取鏡像的結果(參考第九章,§14)。但是化到主軸上去常可用第一種正交矩陣 $O(|O|=1)$ 來得出。這是可以這樣來做的,並不變動標準型,我們可以施行一個補充變換

$$\xi_i=\xi_i' \quad (i=1, 2, \cdots, n-1),\ \xi_n=-\xi_n'。$$

系統而第二個給予動能系統。第二個型常是恆正的。

我們在本節中從事於含有兩個這種型的二次型組的研究。

兩個實二次型

$$A(x, x)=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k,\ B(x, x)=\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}x_ix_k$$

決定一個型束 $A(x, x)-\lambda B(x, x)$ (λ 是一個參數)。

如果型 $B(x, x)$ 是恆正的，那末稱型束 $A(x, x)-\lambda B(x, x)$ 爲正則的。

方程 $$|A-\lambda B|=0$$
稱爲型束 $A(x, x)-\lambda B(x, x)$ 的特徵方程。

以 λ_0 記這個方程的任一個根。因爲矩陣 $A-\lambda_0 B$ 是降秩的，所以有這樣的列 $z=(z_1, z_2, \cdots, z_n)\neq 0$ 存在，使得 $(A-\lambda_0 B)z=0$ 或

$$Az=\lambda_0 Bz \quad (z\neq 0)。$$

我們稱數 λ_0 爲型束 $A(x, x)-\lambda B(x, x)$ 的特徵數，而稱 z 爲這個型束的對應的主列或"主向量"。我們有次之。

定理 8. 正則型束 $A(x, x)-\lambda B(x, x)$ 的特徵方程

$$|A-\lambda B|=0$$

常有 n 個實根 $\lambda_k (k=1, 2, \cdots, n)$，各對應於主向量 $z^k=(z_{1k}, z_{2k}, \cdots, z_{nk}) (k=1, 2, \cdots, n)$：

$$Az^k=\lambda_k Bz^k \quad (k=1, 2, \cdots, n)。\tag{49}$$

這些主向量 z^k 可以這樣來選取，使其適合關係式

$$B(z^i, z^k)=\delta_{ik} \quad (i, k=1, 2, \cdots, n)。\tag{50}$$

證明 我們注意，等式(49)可以寫爲：

$$B^{-1}Az^k=\lambda_k z^k \quad (k=1, 2, \cdots, n)。\tag{51}$$

這樣一來，我們的定理斷定，矩陣

$$D=B^{-1}A \tag{52}$$

有：1° 1單構的，2° 實特徵數 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 與 3° 對應於這些特徵數的

特徵列(向量)$z^1, z^2, \cdots, z^n$ 適合關係式(50) ❶。

爲了證明這三個情況，在討論中引進實數域上 n 維向量空間 $\boldsymbol{R}$。在這個空間中固定某一個基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 且引進兩個任意向量

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{n} y_i\boldsymbol{e}_i$$

的無向積爲恆正雙線性型 $B(x, y)$

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=B(x, y)=\sum_{i, k=1}^{n} b_{ik}x_iy_k=x'By, \tag{53}$$

因而向量 $\boldsymbol{x}$ 的長的平方爲型 $B(x, x)$

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})=B(x, x)=x'Bx \tag{53'}$$

[此處 x 與 y 是表列 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 與 $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$]。

容易驗證，所引進來的這種度量適合公設 1—5 (第九章，§ 2)，因而是一個歐幾里得度量。

我們得出了 n 維歐幾里得空間 $\boldsymbol{R}$，在他裏面原基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 一般的說，不是法正交的。在這個基底中，矩陣 A, B 與 $D=B^{-1}A$ 對應於 $\boldsymbol{R}$ 中線性運算子：$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 與 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$ ❷。

我們來證明，$\boldsymbol{D}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 中對稱運算子❸(參考第九章，§ 13)。事實上，對於有坐標列 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 與 $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 的任二向量 $\boldsymbol{x}$ 與 $\boldsymbol{y}$，由於(52)與(53)有：

$$(\boldsymbol{Dx}, \boldsymbol{y})=(Dx)'By=x'D'By=x'AB^{-1}By=x'Ay$$

與
$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Dy})=x'BDy=x'BB^{-1}Ay=x'Ay,$$

亦即
$$(\boldsymbol{Dx}, \boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Dy}),$$

對稱運算子 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$ 有實特徵數 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 與完全法正交特徵向量組 $\boldsymbol{z}^1, \boldsymbol{z}^2, \cdots, \boldsymbol{z}^n$ (參考等九章，§ 13)：

❶ 如果矩陣 D 是對稱的，那末性質 1°, 2°，可以從對稱運算子的性質來直接得出 (第九章，§ 13)。但是兩個對稱矩陣的乘積 D 不一定是對稱的，因爲 $D=B^{-1}A$，而 $D'=AB^{-1}$。

❷ 因爲基底 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 不是法正交的，在這一基底中對應於對稱矩陣 A 與 B 的運算子 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 不一定是對稱的。

❸ 故知矩陣 D 相似於某一個對稱矩陣。

$$B^{-1}Az^k=\lambda_k z^k \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n), \tag{54}$$

$$(z^i z^k)=\delta_{ik} \quad (i,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n), \tag{54'}$$

設 $z^k=(z_{1k},\ z_{2k},\ \cdots,\ z_{nk})$ 爲向量 z^k 在基底 $e_1,\ e_2,\cdots,\ e_n$ 中的坐標列$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$。那末等式(54)可以寫爲(51)或(49)的形狀，又由(53)知關係式(54′)給出等式(50)。

定理已經證明。

我們注意，由(50)知諸列 $z^1,\ z^2,\cdots,\ z^n$ 線性無關。事實上，設

$$\sum_{k=1}^{n} c_k z^k=0\ 。 \tag{55}$$

那末對於任何 $i\ (1\leqslant i\leqslant n)$ 根據(50)有

$$0=B(z^i,\ \sum_{k=1}^{n} c_k z^k)=\sum_{k=1}^{n} c_k B(z^i z^k)=c_i\ 。$$

這樣一來，在(55)中所有的 c_i 都等於零，故列 $z^1,\ z^2,\ \cdots,\ z^n$ 間的線性相關性不能存在。

由適合關係式(50)的諸主列 $z^1,\ z^2,\ \cdots,\ z^n$ 所構成的方陣

$$Z=(z^1,\ z^2,\ \cdots,\ z^n)=\|z_{ik}\|_1^n$$

稱爲型束 $A(x,x)-\lambda B(x,x)$ 的主矩陣。主矩陣 Z 是滿秩的($|Z|\neq 0$)，因爲他的列線性無關。

等式(50)可以寫爲：

$$z^{i\prime} B z^k=\delta_{ik} \quad (i,\ k=1,\ 2,\cdots,\ n)\ 。 \tag{56}$$

再者，同時左乘等式(49)的兩節以行矩陣 $z^{i\prime}$，我們得出：

$$z^{i\prime} A z^k=\lambda_k z^{i\prime} B z^k=\lambda_k \delta_{ik} \quad (i,\ k=1,\ 2,\cdots,\ n)\ 。 \tag{57}$$

引進主矩陣 $Z=(z^1,\ z^2,\ \cdots,\ z^n)$，我們可以把等式(56)與(57)表爲：

$$Z'AZ=\|\lambda_k \delta_{ik}\|_1^n,\ Z'BZ=E\ 。 \tag{58}$$

(58)式說明，滿秩變換

$$x=Z\xi \tag{59}$$

同時化二次型 $A(x,\ x)$ 與 $B(x,\ x)$ 爲平方和：

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi_k^2 \text{ 與 } \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2。\tag{60}$$

變換(59)的這個性質為主矩陣 Z 所決定。事實上,設變換(59)同時化型 $A(x, x)$ 與 $B(x, x)$ 為標準形式(60)。那末等式(58)必須適合,因而矩陣 Z 的列適合(56)與(57)。由(58)得出矩陣 Z 的滿秩性($|Z| \neq 0$)。等式(52)可以寫為:

$$z^{i'}(Az^k - \lambda_k Bz^k) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n);\tag{61}$$

此處 k 有任何固定的值($1 \leqslant k \leqslant n$)。等式組(16)可以合併為一個等式:

$$Z'(Az^k - \lambda_k Bz^k) = 0,$$

故因 Z' 是一個滿秩矩陣,得

$$Az^k - \lambda_k Az^k = 0,$$

亦即對於任何 k 都得出(49)。因此 Z 是一個主矩陣。我們證明了

定理 9. 如果 $Z = \| z_{ik} \|_1^n$ 是正則型束 $A(x, x) - \lambda B(x, x)$ 的主矩陣,那末變換

$$x = Z\xi\tag{62}$$

同時化型 $A(x, x)$ 與 $B(x, x)$ 為平方和

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi_k^2, \quad \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2,\tag{63}$$

在(63)中的 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 為型束 $A(x, x) - \lambda B(x, x)$ 的特徵數,他們對應於矩陣 Z 的列 $z^1, z^2, \cdots, z^n$。

反之,如果某一變換(62)同時化型 $A(x, x)$ 為(63)的形狀,那末 $Z = \| z_{ik} \|_1^n$ 是正則型束 $A(x, x) - \lambda B(x, x)$ 的主矩陣。

有時用定理 9 中所述的變換(62)的特性來構成主矩陣與定理 8 的證明❶。為了這個目的,首先完成變數的變換 $x = Ty$,化型 $B(x, x)$ 為一個平方和 $\sum_{k=1}^{n} y_k^2$ [因為 $B(x, x)$ 是一個恆正型,這是永遠可能的]。此時變型 $A(x, x)$ 為某一個型 $A_1(y, y)$。現在應用正交變換 $y = O\xi$ 化型

❶ 參考[7], 58—60 頁。

$A_1(y, y)$ 爲 $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\xi_k^2$ 的形狀(化到主軸上去!)。此處,顯然有[1] $\sum_{k=1}^{n}y_k^2=$ $=\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2$。這樣一來,變換 $x=Z\xi$,其中 $Z=TO$,化所予的兩個型爲(63)的形狀。此後證明(有如在定理 9 前面所做的一樣)矩陣 Z 的列 $z^1, z^2, \cdots, z^n$ 適合關係式(49)與(50)。

在特別的情形,$B(x, x)$ 是一個法型,亦卽 $B(x, x)=\sum_{k=1}^{n}x_k^2$ 時,得 $B=E$,故型束 $A(x, x)-\lambda B(x, x)$ 的特徵方程與矩陣 A 的特徵方程重合,而型束的主向量都是矩陣 A 的特徵向量。在此時,關係式(50)可寫爲:$z^{i\prime}z^k=\delta_{ik}(i, k=1, 2, \cdots, n)$,表示出列 $z^1, z^2, \cdots, z^n$ 的法正交性。

定理 8 與 9 有明顯的幾何解釋。有如在定理 8 的證明中所做的一樣引進有基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 與基本度量型 $B(x, x)$ 的歐幾里得空間 $\boldsymbol{R}$。在 $\boldsymbol{R}$ 中討論有心二次超曲線,其方程爲

$$A(x, x)\equiv\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}x_ix_k=c。\tag{64}$$

設 $Z=\|z_{ik}\|_1^n$ 爲型束 $A(x, x)-\lambda B(x, x)$ 的主矩陣。經坐標變換 $x=Z\xi$ 後,新的基底向量爲向量 $z^1, z^2, \cdots, z^n$,他們在舊基底中的坐標構成矩陣 Z 的列,亦卽型束的主向量。這些向量構成法正交基底,在這個基底中超曲面方程(64)有次之形狀:

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\xi_k^2=c。\tag{65}$$

因此,型束的主向量 $z^1, z^2, \cdots, z^n$ 與超曲面(64)的主軸方向一致,而特徵數 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 定出半軸的値:$\lambda_k=\pm\frac{c}{a_k^2}\ (k=1, 2, \cdots, n)$。

這樣一來,定出正則型束 $A(x, x)-\lambda B(x, x)$ 的主向量與特徵數的問題與把二次有心超曲面的方程(64)化到主軸上去的問題是相抵的,此時超曲面的原方程是在一般的斜坐標系中所給出的[2],祇要在這個

---

[1] 正交變換並不變動變數的平方和,因爲 $(Ox)'Ox=x'x$。

[2] 這是沿坐標軸的尺度不一定等長的斜坐標系。

坐標系中“單位球”的方程爲 $B(x, x)=1$。

例

給予在一般的斜坐標系中二次曲面的方程

$$2x^2-2y^2-3z^2-10yz+2xz-4=0, \tag{66}$$

而且在這一坐標系中單位球的方程爲

$$2x^2+3y^2+2z^2+2xz=1。 \tag{67}$$

需要把方程(66)化到主軸上去。

在所予的情形，

$$A=\begin{Vmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & -2 & -5\\ 1 & -5 & -3\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{Vmatrix}。$$

型束的特徵方程 $|A-\lambda B|=0$ 有次之形狀：

$$\begin{vmatrix}2-2\lambda & 0 & 1-\lambda\\ 0 & -2-3\lambda & -5\\ 1-\lambda & -5 & -3-2\lambda\end{vmatrix}=0。 \tag{68}$$

這個方程有三個根：$\lambda_1=1$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=-4$。

以 u, v, w 記對應於特徵數 1 的主向量的坐標。u, v, w 的值爲一組齊次線方程所決定，這個方程組的係數與 $\lambda=1$ 時行列式(68)的元素相同：

$$\begin{aligned}0\cdot u+0\cdot v+0\cdot w&=0,\\ 0\cdot u-5v-5w&=0,\\ 0\cdot u-5v-5w&=0。\end{aligned}$$

實際上我們祇有一個關係式

$$v+w=0。$$

特徵數 $\lambda=1$ 應當對應於兩個法正交主向量。第一個向量的坐標可以任意選取祇要適合條件 $v+w=0$。

我們取　　　　$u=0,\ v,\ w=-v$。

取第二個主向量的坐標爲

$$u',\ u',\ w'=-v'$$

且寫出正交條件 $[B(z^1, z^2)=0]$：

$$2uu'+3vv'+2ww'+uw'+u'w=0。$$

故得：$u'=5v'$。這樣一來，第二個主向量的坐標爲

$$u'=5v',\ v',\ w'=-v'。$$

全相類似的，在特徵行列式中取 $\lambda=-4$，求出對應的主向量：

$$u'',\ v''=-u'',\ w''=-2u''。$$

從這一條件：主向量的坐標必須適合單位球的方程 $[B(x, x)=1]$，亦即方程(67)，我們以決定 v, v' 與 u'' 的値。因此求得：

$$v=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad v'=\frac{1}{3\sqrt{5}},\quad u''=-\frac{1}{3}。$$

故所求之主矩陣爲

$$Z=\left\|\begin{matrix} 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{matrix}\right\|,$$

且其對應的坐標變換($x=Z\xi$)化方程(66)與(67)爲標準形式

$$\xi_1^2+\xi_2^2-4\xi_3^2-4=0,\ \xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2=1。$$

第一個方程還可以寫爲：

$$\frac{\xi_1^2}{4}+\frac{\xi_2^2}{4}-\frac{\xi_3^2}{1}=1。$$

這是有實半軸等於 2，虛半軸等於 1 的旋轉單葉雙曲面的方程。旋轉軸上垂直系的坐標爲矩陣 Z 的第三列所決定，是即等於 $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$。其他兩個正交軸上垂直系的坐標爲矩陣 Z 的前兩列所給出。

§ 7. 正則型束的特徵數的極端性質[1]

1. 設給予兩個二次型：

$$A(x, x)=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_ix_k \text{ 與 } B(x, x)=\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}x_ix_k,$$

其中型 $B(x, x)$是恆正的。這樣來記正則型束 $A(x, x)-\lambda B(x, x)$ 的特徵數的次序，使其不爲一個下降序列：

$$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_3\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n。\tag{69}$$

同前面一樣，以 $z^1, z^2, \cdots, z^n$ 來記對應於這些特徵數的主向量[2]：

$$z^k=(z_{1k}, z_{2k}, \cdots, z_{nk});\ k=1, 2, \cdots, n。$$

---

[1] 在本節中所述的是按照書[7]，§10 來寫出的。

[2] 此處所用的名詞"主向量"是型束主列的意義(參考上節)。在本節中一般的用幾何意義的命名(參考上節)，我們有時稱列爲向量。

對於變數不全爲零的所有可能的值 $(x \neq 0)$，要定出型的比值 $\frac{A(x, x)}{B(x, x)}$ 的最小值(極小)。爲了這一目的，利用變換

$$x=Z\xi \quad (x_i=\sum_{k=1}^{n} z_{ik}\xi_k;\ i=1,\ 2,\cdots,\ n),$$

「其中 $Z=\|z_{ik}\|_1^n$ 爲型束 $A(x, x)-\lambda B(x, x)$ 的主矩陣」，化到新的變數 ξ_1、ξ_2，…，ξ_n。對於新變數可把型的比值表爲次之形狀[參考(63)]：

$$\frac{A(x, x)}{B(x, x)}=\frac{\lambda_1\xi_1^2+\lambda_2\xi_2^2+\cdots+\lambda_n\xi_n^2}{\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2}。 \tag{70}$$

在數軸上取 n 個點 λ_1、λ_2，…，λ_n。在這些點上對應的連結以非負質量 $m_1=\xi_1^2$，$m_2=\xi_2^2$，…，$m_n=\xi_n^2$。那末按照(70)式，比值 $\frac{A(x, x)}{B(x, x)}$ 是這些質量的中心的數值坐標。故有

$$\lambda_1 \leqslant \frac{A(x, x)}{B(x, x)} \leqslant \lambda_n。$$

暫時不管第二部分不等式，我們來說明在第一部分不等式中等號是可以適合的。爲此，在(69)中分出相等的特徵數羣：

$$\lambda_1=\cdots=\lambda_{p_1}<\lambda_{p_1+1}=\cdots=\lambda_{p_1+p_2}<\cdots \tag{71}$$

祇有當所有在點 λ_1 以外的質量都等於零時，亦卽在

$$\xi_{p_1+1}=\cdots=\xi_n=0$$

時，質量中心始能與最小點 λ_1 重合。在此時，對應的 x 將爲主列 z^1，z^2，…，z^{p_1} 的線性組合❶。因爲所有這些列都對應於相等的特徵數 λ_1，所以 x 是對於 $\lambda=\lambda_1$ 的主列(向量)。

我們證明了

定理 10. 正則型束 $A(x, x)-\lambda B(x, x)$ 的最小特徵數是型 $A(x, x)$ 與 $B(x, x)$ 的比值的極小值：

$$\lambda_1=\min\frac{A(x, x)}{B(x, x)}, \tag{72}$$

❶ 從 $x=Z\xi$ 得出：$x=\sum_{k=1}^{n}\xi_k z^k$。

而且這一極小值祇當 x 爲對應於特徵數 λ_1 的主向量時始能達到。

2. 爲了給出對於次之特徵數 λ_2 的類似的"極小值"，我們祇討論所有正交於 z^1 的向量 x，亦卽適合次之方程❶的向量 x

$$B(z^1, x)=0。$$

對於這些向量

$$\frac{A(x, x)}{B(x, x)}=\frac{\lambda_2\xi_2^2+\cdots+\lambda_n\xi_n^2}{\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2},$$

故有
$$\min\frac{A(x, x)}{B(x, x)}=\lambda_2 \quad [B(z^1, x)=0]。$$

此處，祇有對於與 z^1 正交的而且是特徵數 λ_2 的主向量，始能達到相等。

轉移到其餘的特徵數，最後我們得出次之定理：

定理 11. 對於任何 $p(1\leqslant p\leqslant n)$，在序列 (69) 中第 p 個特徵數 λ_p 的值是型的比值的極小值

$$\lambda_p=\min\frac{A(x, x)}{B(x, x)}, \tag{73}$$

此時我們規定變動向量 x 要與前 $p-1$ 個法正交主向量 $z^1, z^2, \cdots, z^{p-1}$ 正交：

$$B(z^1, x)=0, \cdots, B(z^{p-1}, x)=0。\tag{74}$$

此處，祇有對於適合條件 (74) 而且又是特徵數 λ_p 的主向量，始能達到這一極小值。

3. 在定理 11 中所給出的特徵數 λ_p 有其不方便的地方，因爲他同前面的主向量 $z^1, z^2, \cdots, z^{p-1}$ 是連結到的，故祇有在知道了這些向量以後，始能進行研究。此外，對於這些向量的選取還有一定的任意性。

❶ 此處及以後對於兩個向量(列) x, y 的正交性，我們了解爲等式 $B(x, y)=0$。這可與上節中所給予的幾何解釋完全相對應的來得出。我們視量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 爲歐幾里得空間內某一基底中向量的 x 的坐標，此時向量的長的平方(範數)爲恆正型 $B(x,x)=\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}x_i x_k$ 所確定。在這個度量中向量 $z^1, z^2, \cdots, z^n$ 構成一個法正交基底。故如向量 $x=\sum_{k=1}^{n}\xi_k z^k$ 正交於 z^k，那末對應的 $\xi_k=0$。

爲了使得特徵數 $\lambda_p(p=1, 2, \cdots, n)$ 的給出，能夠避免所指出的缺點，我們引進關於在變數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 上安置聯結的概念。

設給予變數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的線性型：

$$L_k(x)=l_{1k}x_1+l_{2k}x_2+\cdots+l_{nk}x_k \quad (k=1, 2, \cdots, n), \tag{74'}$$

我們說在變數 $x_1, x_1, \cdots, x_n$，或（相同的）在向量 x 上安置 h 個聯結 $L_1, L_2, \cdots, L_h$，如果所討論的祇是適合次之方程組的諸變數的值

$$L_k(x)=0 \quad (k=1, 2, \cdots, h)。$$

對於任意的線性型保留(74')的記法，而對於向量 x 與主向量 z^1, $z^2, \cdots, z^n$ 的"無向積"，我們引進次之特殊記法：

$$\widetilde{L}_k(x)=B(z^k, x) \quad (k=1, 2, \cdots, n) ❶。 \tag{75}$$

再者，如對變動向量安置聯結(74)，就記 $\min\frac{A(x, x)}{B(x, x)}$ 爲：

$$\mu\left(\frac{A}{B}; L_1, L_2, \cdots, L_h\right)。$$

用這種記法，等式(73)可以寫爲：

$$\lambda_p=\mu\left(\frac{A}{B}; \widetilde{L}_1, \widetilde{L}_2, \cdots, \widetilde{L}_{p-1}\right) \quad (p=1, 2, \cdots, n), \tag{76}$$

討論聯結

$$L_1(x)=0, \cdots, L_{p-1}(x)=0 \tag{77}$$

與

$$\widetilde{L}_{p+1}(x)=0, \cdots, \widetilde{L}_n(x)=0。 \tag{78}$$

因爲聯結(77)與(78)的方程總數少於 n，故有向量 $x^{(1)}\neq 0$ 存在同時適合這些聯結。因爲聯結(78)表示向量 x 對主向量 $z^{p+1}, \cdots, z^n$ 的正交性，所以對應的向量 $x^{(1)}$ 的坐標都等於零：$\xi_{p+1}=\cdots=\xi_n=0$。因此由(70)得

$$\frac{A(x^{(1)}, x^{(1)})}{B(x^{(1)}, x^{(1)})}=\frac{\lambda_1\xi_1^2+\cdots+\lambda_p\xi_p^2}{\xi_1^2+\cdots+\xi_p^2}\leq\lambda_p。$$

❶ $\widetilde{L}_k(x)=z^{k\prime}Bx=\tilde{l}_{1k}x_1+\tilde{l}_{2k}x_2+\cdots+\tilde{l}_{nk}x_n$，其中 $\tilde{l}_{1k}, \tilde{l}_{2k}, \cdots, \tilde{l}_{nk}$ 爲矩陣 $z^{k\prime}B$ 中諸行的元素$(k=1, 2, \cdots, n)$。

此時 $$\mu\left(\frac{A}{B};\ L_1,\ L_2,\ \cdots,\ L_{p-1}\right)\leqslant\frac{A(x^{(1)},\ x^{(1)})}{B(x^{(1)},\ x^{(1)})}\leqslant\lambda_p。$$

結合這個不等式與(76)證明對於變動聯結 $L_1, L_2, \cdots, L_{p-1}$，值 μ 常 $\leqslant\lambda_p$ 而祇在取特殊聯結 $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \cdots, \tilde{L}_{p-1}$ 時始能達到 λ_p。

我們證明了

定理 12. *如果我們對於任意 $p-1$ 個聯結 $L_1, L_2, \cdots, L_{p-1}$，討論兩個型的比值 $\frac{A(x,\ x)}{B(x,\ x)}$ 的極小值且變動這些聯結，那末這些極小值中的極大值等於 λ_p：*

$$\lambda_p=\max\mu\left(\frac{A}{B};\ L_1,\ L_2,\ \cdots,\ L_{p-1}\right)。\tag{79}$$

不同於定理 11 中所討論的"極小的"特徵數，定理 12 給予"極大的極小"特徵數 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$。

4. 我們注意，如果換型束 $A(x, x)-\lambda B(x, x)$ 中的 $A(x, x)$ 以 $-A(x, x)$，那末型束的所有特徵數都將變號，而對應的主向量並無變動。這樣一來，型束 $-A(x, x)-\lambda B(x, x)$ 的特徵數為數

$$-\lambda_n\leqslant-\lambda_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant-\lambda_1。$$

再者，記

$$\nu\left(\frac{A}{B}; L_1, L_2, \cdots, L_h\right)=\max\frac{A(x,\ x)}{B(x,\ x)},\tag{80}$$

那末對變動向量安置聯結 $L_1, L_2, \cdots, L_h$，我們可以寫出：

$$\mu\left(-\frac{A}{B};\ L_1,\ L_2,\ \cdots,\ L_h\right)=-\nu\left(\frac{A}{B};\ L_1,\ L_2,\ \cdots,\ L_h\right)$$

與

$$\max\mu\left(-\frac{A}{B};\ L_1,\ L_2,\ \cdots,\ L_h\right)=-\min\nu\left(\frac{A}{B};\ L_1,\ L_2,\ \cdots,\ L_h\right)。$$

故在應用定理 10, 11, 12 於比值 $-\frac{A(x,\ x)}{B(x,\ x)}$，代替公式(72), (76), (79)我們得出公式

$$\lambda_n = \max \frac{A(x, x)}{B(x, x)},$$

$$\lambda_{n-p+1} = \nu\left(\frac{A}{B};\ \tilde{L}_n,\ \tilde{L}_{n-1},\ \cdots,\ \tilde{L}_{n-p+2}\right)$$

$$\lambda_{n-p+1} = \min \nu\left(\frac{A}{B};\ L_1,\ L_2,\ \cdots,\ L_{p-1}\right) \quad (p=1,\ 2, \cdots,\ n)。$$

這些公式對應的建立了數 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的"極大"與"極小的極大",我們將其述爲次之定理:

定理 13. 設正則型束 $A(x, x) - \lambda B(x, x)$ 的特徵數

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$$

對應於型束的線性無關主向量 $z^1, z^2, \cdots, z^n$。那末

(1)最大特徵數 λ_n 是型的比值的極大值

$$\lambda_n = \max \frac{A(x, x)}{B(x, x)}, \tag{81}$$

而且祇對應於特徵數 λ_n 的型束主向量始能達到這個極大值。

(2)第 p 個(從後面算起)特徵數 $\lambda_{n-p+1}(2 \leqslant p \leqslant n)$ 亦是型的比值的極大值

$$\lambda_{n-p+1} = \max \frac{A(x, x)}{B(x, x)}, \tag{82}$$

但是規定於變動向量 x 須安置聯結[1]:

$$B(z^n, x) = 0,\ B(z^{n-1}, x) = 0,\ \cdots,\ B(z^{n-p+2}, x) = 0, \tag{83}$$

亦卽

$$\lambda_{n-p+1} = \nu\left(\frac{A}{B};\ \tilde{L}_n,\ \tilde{L}_{n-1},\ \cdots,\ \tilde{L}_{n-p+2}\right); \tag{84}$$

這個極大值祇有對應於特徵數 λ_{n-p+1} 且適合聯結(83)的型束主向量始能達到。

(3)如果對於有聯結

---

[1] 在有度量型 $B(x, x)$ 的歐幾里得空間中,條件(83)表示向量 x 與主向量 $z^{n-p+2}, \cdots, z^n$ 的正交性。參考本節第四個足註。

$$L_1(x)=0,\ \cdots,\ L_{p-1}(x)=0$$

$(2\leqslant p\leqslant n)$的比值$\frac{A(x,x)}{B(x,x)}$的極大值，變動諸聯結，那末這些極大值中的最小值(極小)就等於λ_{n-p+1}：

$$\lambda_{n-p+1}=\min\nu\left(\frac{A}{B};\ L_1,\ L_2,\ \cdots,\ L_{p-1}\right)。\tag{85}$$

5. 設給予h個無關的聯結

$$L_1^0(x)=0,\ L_2^0(x)=0,\ \cdots,\ L_h^0(x)=0[1]。\tag{86}$$

那末從這些關係可以在變數$x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n$中選出h個經其餘的變數線性表出，以$v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_{n-h}$來記這些變數。故在安置聯結(86)時正則型束$A(x,\ x)-\lambda B(x,\ x)$化爲型束$A^0(v,\ v)-\lambda B^0(v,\ v)$，其中$B^0(v,\ v)$仍然是恆正的(祇含有$n-h$個變數)。這樣得出的正則型束有$n-h$個實特徵數

$$\lambda_1^0\leqslant\lambda_2^0\leqslant\cdots\leqslant\lambda_{n-h}^0。\tag{87}$$

在安置聯結(86)時，可以有不同的選取使所有變數經$n-h$個無關的$v_1,\ v_2,\cdots,\ v_{n-h}$表出。但是特徵數(87)，與這種任意性無關，有完全確定的值。這可由特徵數的極大的極小性質來得出：

$$\lambda_1^0=\min\frac{A^0(v,\ v)}{B^0(v,\ v)}=\mu\left(\frac{A}{B};\ L_1^0,\ L_2^0,\ \cdots,\ L_h^0\right)\tag{88}$$

一般的有

$$\lambda_p^0=\max\mu\left(\frac{A^0}{B^0}L_1;\ L_2,\cdots,\ L_{p-1}\right)=$$

$$=\max\mu\left(\frac{A}{B};\ L_1^0,\cdots,\ L_h^0,\ L_1,\cdots,\ L_{p-1}\right),\tag{89}$$

此時在(89)式中祇有聯結$L_1,\ L_2,\ \cdots,\ L_{p-1}$是變動的。

我們有

定理 14. 如果$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$是正則型束$A(x,\ x)-\lambda B(x,\ x)$

[1] 祇要位於聯結方程左節的是無關的線性型$L_1^0(x),\ L_2^0(x),\ \cdots,\ L_h^0(x)$，聯結(86)就是無關的。

的特徵數，而 $\lambda_1^0\leqslant\lambda_2^0\leqslant\cdots\leqslant\lambda_{n-h}^0$ 是同一型束在安置 h 個無關聯結後的特徵數，那末

$$\lambda_p\leqslant\lambda_p^0\leqslant\lambda_{p+h}\quad(p=1,\ 2,\ \cdots,\ n-h)。\tag{90}$$

證明　不等式 $\lambda_p\leqslant\lambda_p^0(p=1,\ 2,\ \cdots,\ n-h)$ 可立刻從(79)與(89)式得出。事實上，在增加新的聯結後，極小值 $\mu\left(\frac{A}{B};\ L_1,\ \cdots,\ L_{p-1}\right)$ 可能增加亦可能不動。故有

$$\mu\left(\frac{A}{B};\ L_1,\cdots,\ L_{p-1}\right)\leqslant\mu\left(\frac{A}{B};\ L_1^0,\cdots,\ L_h^0;\ L_1,\cdots,\ L_{p-1}\right)。$$

因此

$$\lambda_p=\max\mu\left(\frac{A}{B};\ L_1,\ \cdots,\ L_{p-1}\right)\leqslant\lambda_p^0=$$

$$=\max\mu\left(\frac{A}{B};\ L_1^0,\ \cdots,\ L_h^0,\ L_1,\cdots,\ L_{p-1}\right)。$$

由於次之關係知不等式(90)的第二部分亦能成立：

$$\lambda_p^0=\max\mu\left(\frac{A}{B};\ L_1^0,\ \cdots,\ L_h^0,\ L_1,\cdots,\ L_{p-1}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\max\mu\left(\frac{A}{B};\ L_1,\ \cdots,\ L_{p-1},\ L_p,\ \cdots,\ L_{p+h-1}\right)=\lambda_{p+h}。$$

此處在右節中不僅變動聯結 $L_1,\cdots,\ L_{p-1}$ 而且變動聯結 $L_p,\cdots,\ L_{p+h-1}$；而在左節中代替後一部分聯結爲固定的聯結 $L_1^0,\cdots,\ L_h^0$。

定理已經證明。

6. 設給予兩個正則型束

$$A(x,\ x)-\lambda B(x,\ x),\ \widetilde{A}(x,x)-\lambda\widetilde{B}(x,\ x)\tag{91}$$

且設對於任何 $x\neq0$ 都有

$$\frac{A(x,\ x)}{B(x,\ x)}\leqslant\frac{\widetilde{A}(x,\ x)}{\widetilde{B}(x,\ x)}。$$

那末顯然有

$$\max\mu\left(\frac{A}{B};\ L_1,\ L_2,\ \cdots,\ L_{p-1}\right)\leqslant\max\mu\left(\frac{\widetilde{A}}{\widetilde{B}};\ L_1,\ L_2,\ \cdots,\ L_{p-1}\right)$$

$$(p=1,\ 2,\cdots,\ n)。$$

故如以 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$ 與 $\tilde{\lambda}_1\leqslant\tilde{\lambda}_2\leqslant\cdots\leqslant\tilde{\lambda}_n$ 記型束(91)對應的特徵數，我們就有：

$$\lambda_p\leqslant\tilde{\lambda}_p \quad (p=1, 2, \cdots, n)。$$

這樣一來，我們已經證明

定理 15. 如果給予各有特徵數 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$ 與 $\tilde{\lambda}_1\leqslant\tilde{\lambda}_2\leqslant\cdots\leqslant\tilde{\lambda}_n$ 的兩個正則型束 $A(x, x)-\lambda B(x, x)$ 與 $\tilde{A}(x, x)-\lambda\tilde{B}(x, x)$，那末由恆能適合的關係

$$\frac{A(x, x)}{B(x, x)}\leqslant\frac{\tilde{A}(x, x)}{\tilde{B}(x, x)}。\tag{92}$$

得出：

$$\lambda_p\leqslant\tilde{\lambda}_n \quad (p=1, 2, \cdots, n)。\tag{93}$$

討論在不等式(92)中 $B(x, x)\equiv\tilde{B}(x, x)$ 的特殊情形。在此時差 $\tilde{A}(x, x)-A(x, x)$ 是一個非負二次型，故可表爲無關的正平方和：

$$\tilde{A}(x, x)=A(x, x)+\sum_{i=1}^{r}[X_i(x)]^2。$$

那末在安置 r 個無關聯結

$$X_1(x)=0,\ X_2(x)=0,\ \cdots,\ X_r(x)=0$$

後，型 $A(x, x)$ 與 $\tilde{A}(x, x)$ 重合而型束 $A(x, x)-\lambda B(x, x)$ 與 $\tilde{A}(x, x)-\lambda B(x, x)$ 有相同的特徵數

$$\lambda_1^0\leqslant\lambda_2^0\leqslant\cdots\leqslant\lambda_{n-r}^0$$

應用定理 14 於每一個型束 $A(x, x)-\lambda B(x, x)$ 與 $\tilde{A}(x, x)-\lambda B(x, x)$，我們有：

$$\tilde{\lambda}_p\leqslant\lambda_p^0\leqslant\lambda_{p+r} \quad (p=1, 2, \cdots, n-r)。$$

合併這一不等式與不等式(93)，得到了次之定理：

定理 16. 如果 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$ 與 $\tilde{\lambda}_1\leqslant\tilde{\lambda}_2\leqslant\cdots\leqslant\tilde{\lambda}_n$ 爲兩個正則型束 $A(x, x)-\lambda B(x, x)$ 與 $\tilde{A}(x, x)-\lambda B(x, x)$ 的特徵數，其中

$$\tilde{A}(x, x)=A(x, x)+\sum_{i=1}^{r}[X_i(x)]^2,$$

而 $X_i(x)(i=1, 2, \cdots, r)$ 爲無關的線性型，那末就有不等式❶

$$\lambda_p \leqslant \tilde{\lambda}_p \leqslant \lambda_{p+r} \quad (p=1, 2, \cdots, n)。 \tag{94}$$

全相類似的可以證明

定理 17. 如果 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ 與 $\tilde{\lambda}_1 \leqslant \tilde{\lambda}_2 \leqslant \cdots \leqslant \tilde{\lambda}_n$ 爲正則型束 $A(x, x)-\lambda B(x, x)$ 與 $A(x, x)-\lambda \tilde{B}(x, x)$ 的特徵數，其中型 $\tilde{B}(x, x)$ 爲由 $B(x, x)$ 加上 r 個正平方所得出的，那末就有不等式❷

$$\lambda_{p-r} \leqslant \tilde{\lambda}_p \leqslant \lambda_p \quad (p=1, 2, \cdots, n)。 \tag{95}$$

註 在定理 16（或 17）中可以斷定，對於某一個 p 有 $\lambda_p < \tilde{\lambda}_p$（$\tilde{\lambda}_p < < \lambda_p$），如果很明顯的有 $r \neq 0$❸。

§8. 有 n 個自由度的微振動系統

上兩節的結果在有 n 個自由度的力學系統的微振動理論中有重要的應用。

討論接近於他的穩定平衡位置，有 n 個自由度的不變力學系統的自由振動。這一系統對平衡位置的偏差是用無關的廣義坐標 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 來給出的。而且他的平衡位置對應於這些坐標的零值：$q_1=0$，$q_2=0, \cdots, q_n=0$。那末系統的動能表爲廣義速度 $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n$ 的二次型❹：

$$T=\sum_{i, k=1}^{n} b_{ik}(q_1, q_2, \cdots, q_n)\dot{q}_i \dot{q}_k。$$

按照 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 的次數的次序來排列 $b_{ik}(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ 的係數，

$$b_{ik}(q_1, q_2, \cdots, q_n)=b_{ik}+\cdots \quad (i, k=1, 2, \cdots, n)$$

而且（由於 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 很微小的偏差）祇保持常數項 b_{ik}，我們有：

$$T=\sum_{i, k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_i \dot{q}_k \quad (b_{ik}=b_{ki};\ i, k=1, 2, \cdots, n)。$$

❶ 這些不等式的第二部分祇在 $p \leqslant n-r$ 時始有意義。

❷ 這些不等式的第一部分祇在 $p>r$ 時始有意義。

❸ 參考[7]，76—80 頁。

❹ 點子是表示對時間的導數。

動能常是正的且祇對於零速度 $\dot{q}_1=\dot{q}_2=\cdots=\dot{q}_n=0$ 始變爲零。故型 $\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$ 是恆正的。

系統的位能是坐標的函數: $\Pi(q_1, q_2, \cdots, q_n)$。毫不損失其一般性,可以取 $\Pi_0=\Pi(0, 0, \cdots, 0)=0$。那末按照 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 的次數的次序來裂分位能,我們得出:

$$\Pi=\sum_{i=1}^{n} a_i q_i+\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} q_i q_k+\cdots$$

因爲在平衡位置,位能常有固定的值,所以

$$a_i=\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\right)_0=0 \quad (i=1, 2, \cdots, n)。$$

祇保持 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 的二次項,我們有:

$$\Pi=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} q_i q_k \quad (a_{ik}=a_{ki};\ i, k=1, 2, \cdots, n)。$$

這樣一來,位能 Π 與動能 T 定出了兩個二次型:

$$\Pi=\sum_{i,k=0}^{n} a_{ik} q_i q_k, \quad T=\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k, \tag{96}$$

而且第二個型是恆正的。

現在寫運動的微分方程爲拉格蘭日二級方程的形式❶:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=-\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} \quad (i=1, 2, \cdots, n)。\tag{97}$$

代 T 與 Π 以其表示式(96),我們得出:

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ik}\ddot{q}_k+\sum_{k=1}^{n} a_{ik} q_k=0 \quad (k=1, 2, \cdots, n)。\tag{98}$$

在討論中引進實對稱矩陣

$$A=\|a_{ik}\|_1^n \text{ 與 } B=\|b_{ik}\|_1^n$$

與列矩陣 $q=(q_1, q_2, \cdots, q_n)$,我們可以把方程組(97)寫爲次之矩陣的形狀:

❶ 參考,例如,格·克·蘇斯洛夫,理論力學(俄文), §191。

$$B\ddot{q}+Aq=0。\tag{98'}$$

把方程組(98)的解寫成調和振動

$$q_1=v_1\sin(pt+\alpha),\ q_2=v_2\sin(pt+\alpha),\cdots,\ q_n=v_n\sin(pt+\alpha),$$

其矩陣的寫法爲：

$$q=v\sin(pt+\alpha)。\tag{99}$$

此處 $v=(v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_n)$爲常數的振幅列（“向量”），$p$ 爲振動頻率而 α 爲振動的原始位相。

在(98′)中代 q 以其表示式(99)，在約去 $\sin(pt+\alpha)$後，我們得出：

$$Av=\lambda Bv\quad(\lambda=p^2)。$$

但是這個方程與方程(49)是一樣的。故所求的振幅向量是型束 $A(x,\ x)-\lambda B(x,\ x)$的主向量，而頻率平方 $\lambda=p^2$ 是其對應的特徵數。

我們對位能加上補充的限制，需要使函數 $\Pi(q_1,\ q_2,\cdots,\ q_n)$在平衡位置有嚴格的極小❶。

那末根據連循-狄力赫連定理❷系統的平衡位置是穩定的，另一方面，我們所給的假設說明二次型 $\Pi=A(q,\ q)$亦是恆正的。

根據定理 8，正則型束 $A(x,\ x)-\lambda B(x,\ x)$有 n 個實特徵數 $\lambda_1,\ \lambda_2,\cdots,\ \lambda_n$ 與對應於這些數的 n 個主向量 $v^1,\ v^2,\ \cdots,\ v^n$ $[v^k=(v_{1k},\ v_{2k},\ \cdots,\ v_{nk});\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n]$，他們適合條件

$$B(v^i,\ v^k)=\sum_{\mu,\nu=1}^{n} b_{\mu\nu}v_{\mu i}v_{\mu i}v_{\nu k}=\delta_{ik}\ (i,\ k=1,\ 2,\cdots,\ n)。\tag{100}$$

從型 $A(x,\ x)$的恆正性，知型束 $A(x,\ x)-\lambda B(x,\ x)$的所有特徵數都是正的❸：

$$\lambda_k>0\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)。$$

那末有 n 個調和振動❹

---

❶ 是即使得在平衡位置時，值 Π_0 小於函數在平衡位置鄰近的所有其他值。

❷ 參考格·克·蘇斯洛夫，理論力學，§ 210。

❸ 這可以從表示式(63)來得出。

❹ 此處原始位相 $\alpha_k(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$是任意常數。

$$v^k \sin(p_k t+\alpha_k) \quad (p_k^2=\lambda_k,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{101}$$

存在，其振幅向量 $v^k=(v_{1k},\ v_{2k},\cdots,\ v_{nk})(k=1,\ 2,\cdots,\ n)$適合“法正交性”條件(100)。

由於方程(98′)是線性的，任意的振動可以由疊置調和振動(101)來得出：

$$q=\sum_{k=1}^{n} A_k \sin(p_k t+\alpha_k) v^k, \tag{102}$$

其中 A_k, $\alpha_k(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$是任意常數。事實上，對於這些常數的任何值，表示式(102)都是方程(98′)的解。另一方面，可以使任意常數適合任何原始條件：

$$q|_{t=0}=q_0,\ \dot{q}|_{t=0}=\dot{q}_0.$$

事實上，由(102)我們得出：

$$q_0=\sum_{k=1}^{n} A_k \sin \alpha_k v^k,\ \dot{q}_0=\sum_{k=1}^{n} p_k A_k \cos \alpha_k v^k。 \tag{103}$$

因爲主列 v^1, v^2,$\cdots$, v^n 永遠線性無關，故由等式(103)可唯一的確定諸值 $A_k \sin \alpha_k$ 與 $p_k A_k \cos \alpha_k$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，因而定出任意常數 A_k 與 α_k $(k=1,\ 2,\cdots,\ n)$。

微分方程組(98)的解(102)可以更詳細的寫爲：

$$q_i=\sum_{k=1}^{n} A_k \sin(p_k t+\alpha_k) v_{ik}。 \tag{104}$$

我們注意，可以從定理 9 出發來得出相同的公式(102)與(104)。事實上，討論矩陣爲 $V=\|v_{ik}\|_1^n$ 的變數的滿秩變換，他能同時化型$A(x,x)$與 $B(x,x)$爲標準形狀(63)。命

$$q_i=\sum_{k=1}^{n} v_{ik}\theta_k \quad (i=1,\ 2,\cdots,\ n) \tag{105}$$

或縮寫爲

$$q=V\theta \quad [\theta=(\theta_1,\ \theta_2,\cdots,\ \theta_n)] \tag{106}$$

且注意 $\dot{q}=V\dot{\theta}$，我們得出：

$$\Pi=A(q,\ q)=\sum_{i=1}^{n} \lambda_k \theta_k^2,\ T=B(\dot{q},\ \dot{q})=\sum_{k=1}^{n} \dot{\theta}_k^2。 \tag{107}$$

使得位能與動能表爲(107)的形狀的坐標 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$ 稱爲主坐標。

應用二級拉格蘭日方程(98)，代 Π 與 T 以其表示式(107)。我們得出：

$$\ddot{\theta}_k+\lambda_k\theta_k=0 \quad (k=1, 2, \cdots, n)。 \tag{108}$$

因爲型 $A(q, q)$ 是恆正的，故數 $\lambda_1, \lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 都是正的，因而可以表爲次之形狀

$$\lambda_k=p_k^2 \quad (p_k>0;\ k=1, 2, \cdots, n)。 \tag{109}$$

由(108)與(109)我們得出：

$$\theta_k=A_k\sin(p_kt+\alpha_k) \quad (k=1, 2, \cdots, n)。 \tag{110}$$

以 θ_k 的這些表示式代進等式(105)，我們仍然得出(104)式，因而得出(102)式。在兩種推理裏面，值 $v_{ik}(i, k=1, 2, \cdots, n)$ 是相同的，因爲根據定理 9，(106)中矩陣 $V=\|v_{ik}\|_1^n$ 是正則型束 $A(x, x)-\lambda B(x, x)$ 的主矩陣。

還要注意定理 14 與 15 的力學解釋。

調動力學系統所給出的頻率 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的序數，使其不爲一個下降的序列：

$$0<p_1\leqslant p_2\leqslant\cdots\leqslant p_n。$$

他們爲型束 $A(x, x)-\lambda B(x, x)$ 的對應特徵數 $\lambda_k=p_k^2(k=1, 2, \cdots, n)$ 的位置所確定：

$$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n。$$

對所予系統安置 h 個無關的有限靜止聯結❶。因爲偏差 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 都作爲很小的值，所以這些聯結可以視爲 $q_1, q_2, \cdots, q_n$ 的線性關係：

$$L_1(q)=0,\ L_2(q)=0,\ \cdots,\ L_h(q)=0。$$

❶ 有限靜止聯結爲方程 $f(q_1, q_2, \cdots, q_n)=0$ 所表出，其中 $f(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ 爲廣義坐標的某一函數。

在安置聯結之後，我們的系統祇有 $n-h$ 個自由度。這一系統的頻率

$$p_1^0 \leqslant p_2^0 \leqslant \cdots \leqslant p_{n-h}^0$$

與在安置聯結 $L_1, L_2, \cdots, L_h$ 時型束 $A(x, x)-\lambda B(x, x)$ 的特徵數 $\lambda_1^0 \leqslant \lambda_2^0 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{n-h}^0$ 之間有關係式 $\lambda_j^0 = p_j^{02}$ $(j=1, 2, \cdots, n-h)$ 存在。故由定理 14 直接得出：

$$p_j \leqslant p_j^0 \leqslant p_{j+h} \quad (j=1, 2, \cdots, n-h)。$$

這樣一來，在安置 h 個聯結時，系統的頻率祇有可能增加，但此時第 j 個值 p_j^0 不能超過前面第 $j+h$ 個頻率 p_{j+h}。

完全類似的根據定理 15 可以斷定，在增強系統的強度時，亦卽增加關於位能的型 $A(q, q)$ [不變型 $B(\dot{q}, \dot{q})$] 時，頻率祇有可能增加，而在增強系統的慣性時，亦卽在增加關於動能的型 $B(\dot{q}, \dot{q})$ [不變型 $A(q, q)$] 時，頻率祇有可能減少。

定理 16 與 17 對這種情況引進更加細微的補充❶。

§9. 安密達型❷

這一章中 §§1—7 內對於二次型所建立的所有結果，都可以轉移到安密達型上去。

記住❸安密達型是指表示式

$$H(x, x)=\sum_{i,k=1}^{n} h_{ik} x_i \bar{x}_k \quad (h_{ik}=\bar{h}_{ki};\ i, k=1, 2, \cdots, n)。 \tag{111}$$

安密達型 (111) 對應於次之線性安密達型

$$H(x, y)=\sum_{i,k=1}^{n} h_{ik} x_i \bar{y}_k; \tag{112}$$

---

❶ 關於有 n 個自由度彈性振動系統的顫動性質的敍述，讀者可在書[7]，第三章中找到。

❷ 在上節中所有的數與變數都是實數。在這一節中所有的數都是複數而且變數都取複數值。

❸ 參考第九章，§2。

此時有:

$$H(y, x) = \overline{H(x, y)};\tag{113}$$

特別的有:

$$H(x, x) = \overline{H(x, x)};\tag{113'}$$

亦卽型 $H(x, x)$ 祇能取實數值。

安密達型的係數矩陣 $H = \|h_{ik}\|_1^n$ 是一個安密達矩陣，亦卽 $H^* = H$ ❶。

應用矩陣 $H = \|h_{ik}\|_1^n$ 可以表 $H(x, y)$ [特別的，表 $H(x, x)$] 爲三個矩陣(行矩陣，方陣與列矩陣)的乘積:

$$H(x, y) = x'H\bar{y},\ H(x, x) = x'H\bar{x} ❷\tag{114}$$

如果

$$x = \sum_{i=1}^{m} c_i u^i,\ y = \sum_{k=1}^{p} d_k v^k,\tag{115}$$

其中 u^i, v^k 是列矩陣，c_i, d_k 爲複數($(i = 1, 2, \cdots, m;\ k = 1, 2, \cdots, p)$，

那末

$$H(x, y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} c_i \bar{d}_k H(u^i, v^k)。\tag{116}$$

對變數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 取線性變換

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ik}\xi_k \quad (i = 1, 2, \cdots, n)\tag{117}$$

或寫爲矩陣形狀

$$x = T\xi \quad (T = \|t_{ik}\|_1^n)。\tag{117'}$$

經變換後安密達型 $H(x, x)$ 化爲

$$\widetilde{H}(\xi, \xi) = \sum_{i, k=1}^{n} \tilde{h}_{ik}\xi_i\bar{\xi}_k,$$

其中新係數矩陣 $\widetilde{H} = \|\tilde{h}_{ik}\|_1^n$ 與舊係數矩陣 $H = \|h_{ik}\|_1^n$ 間有關係式

$$\widetilde{H} = T'H\overline{T}。\tag{118}$$

❶ 星號*表示由原矩陣轉置後，再換所有的元素爲其覆共軛所得出的矩陣($H^* = \overline{H}'$)。

❷ 此處 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)$，$y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$，$\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_n)$，符號“ ' ”表示轉置的意思。

還可以直接在(114)的第二式中代 x 以 $T\xi$ 來證明。

如果命 $T=\overline{W}$，那末(118)式還可以寫爲：

$$\widetilde{H}=W^{*}HW。\tag{119}$$

如果變換(117)是滿秩的($|T|\neq 0$)，那末由(118)式知矩陣 H 與 $\widetilde{H}$ 等秩。矩陣 H 的秩稱爲型 $H(x, x)$ 的秩。

行列式 $|H|$ 稱爲安密達型 $H(x, x)$ 的判別式。由(118)知在轉移到新變數時判別式的變換公式爲：

$$|\widetilde{H}|=|H||T||\overline{T}|。$$

安密達型稱爲降秩的，如果他的判別式等於零。顯然，降秩的型經任何變換(117)後，仍然是降秩的。

安密達型 $H(x, x)$ 可以有無窮多種方法使其化爲

$$H(x, x)=\sum_{i=1}^{r} a_i X_i \overline{X}_i,\tag{120}$$

其中 $a_i\neq 0$ ($i=1, 2, \cdots, r$) 爲實數，而

$$X_i=\sum_{k=0}^{n} \alpha_{ik} x_k \quad (i=1, 2, \cdots, r)$$

爲變數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的無關的複線性型❶。

(120)的右節稱爲無關的平方和❷，而這個和中每一項是正的或負的平方，則視 $a_i>0$ 或 $a_i<0$ 而定。有如二次型，(120) 中數 r 等於型 $H(x, x)$ 的秩。

定理 18.（安密達型的慣性定律）　表安密達型 $H(x, x)$ 爲無關平方和

$$H(x, x)=\sum_{i=1}^{r} a_i X_i \overline{X}_i$$

時，其正平方的個數與負平方的個數與表出的方法無關。

其證明與定理 1（本章 § 2）的證明全相類似。

---

❶ 故有 $r\leqslant n$。

❷ 這個名詞是這樣來的，因爲乘積 $X_i\overline{X}_i$ 等於模 X_i 的平方 ($X_i\overline{X}_i=|X_i|^2$)。

(120)中正平方的個數 π 與負平方的個數 ν 的差 σ 稱爲安密達型 $H(x, x)$ 的符號差: $\sigma=\pi-\nu$。

化二次型爲平方和的拉格蘭日方法可以用於安密達型,祇是在此處§3中公式(15)與(16)應當換爲公式[1]

$$H(x, x)=\frac{1}{h_{gg}}\left|\sum_{k=1}^{n} h_{kg} x_k\right|^2+H_1(x, x), \tag{121}$$

$$H(x, x)=\frac{1}{2}\left\{\left|\sum_{k=1}^{n}\left(h_{kf}+\frac{h_{kg}}{h_{fg}}\right) x_k\right|^2-\right.$$

$$\left.-\left|\sum_{k=1}^{n}\left(h_{kf}-\frac{h_{kg}}{h_{fg}}\right) x_k\right|^2\right\}+H_2(x, x)。 \tag{122}$$

現在來對 r 秩安密達型 $H(x, x)=\sum_{i, k=1}^{n} h_{ik} x_i \bar{x}_k$ 建立耶可比公式。此時有如二次型的情形,我們假設

$$D_k=H\begin{pmatrix}1 & 2 \cdots k \\ 1 & 2 \cdots k\end{pmatrix} \neq 0 \quad (k=1, 2, \cdots, r)。 \tag{123}$$

有了這些不等式,就可利用第二章,§4中關於表任一方陣爲三個矩陣——低三角形 F,對角形 D 與高三角形 L——的乘積的定理2。應用這一定理於矩陣 $H=\|h_{ik}\|_1^n$,得:

$$H=F\left\{D_1, \frac{D_2}{D_1}, \cdots, \frac{D_r}{D_{r-1}}, 0, \cdots, 0\right\} L, \tag{124}$$

此處 $F=\|f_{ik}\|_1^n$, $L=\|l_{ik}\|_1^n$, 其中

$$f_{jk}=\frac{1}{D_k} H\begin{pmatrix}1 & \cdots & k-1 & j \\ 1 & \cdots & k-1 & k\end{pmatrix},$$

$$l_{kj}=\frac{1}{D_k} H\begin{pmatrix}1 & \cdots & k-1 & k \\ 1 & \cdots & k-1 & j\end{pmatrix} \tag{125}$$

$$(j=k, k+1, \cdots, n;\ k=1, 2, \cdots, r),$$

$$f_{ik}=l_{ki}=0 \quad (i<k;\ i, k=1, 2, \cdots, n)。 \tag{126}$$

因爲 $H=\|h_{ik}\|_1^n$ 是一個安密達矩陣,所以從這些等式得出:

[1] 在 $h_{gg}\neq 0$ 時用(121)式,而在 $h_{ff}=h_{gg}=0$, 但有 $h_{fg}\neq 0$ 時則用(122)式。

$$f_{ik}=\overline{l}_{ki}\begin{pmatrix}i\geqslant k;\ k=1,2,\cdots,r;\ i=1,2,\cdots,n,\\ i<k;\ i,k=1,2,\cdots,n\end{pmatrix}。\tag{127}$$

因為在矩陣 F 的後 $n-r$ 列中的元素與矩陣 L 的後 $n-r$ 行中的元素是可以任意選取的❶，故可選取這些元素，使得(1)關係式(127)對於任何 i, k 都能適合

$$f_{ik}=\overline{l}_{ki}\quad (i, k=1, 2, \cdots, n)$$

與(2) $|F|=|L|\neq 0$。那末

$$F=L^*,\tag{128}$$

而(124)式取次之形狀

$$H=L^*\left\{D_1, \frac{D_2}{D_1}, \cdots, \frac{D_r}{D_{r-1}}, 0, \cdots, 0\right\}L。\tag{129}$$

命

$$T=\|t_{ik}\|_1^n=\overline{L},\tag{130}$$

我們把(129)式寫爲:

$$H=T'\left\{D_1, \frac{D_2}{D_1}, \cdots, \frac{D_r}{D_{r-1}}, 0, \cdots, 0\right)\overline{T}\quad (|T|\neq 0)。\tag{131}$$

比較這個式子與公式(118)證明了，安密達型

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{D_k}{D_{k-1}}\xi_k\overline{\xi}_k\quad (D_0=1)\tag{132}$$

經變數的變換

$$\xi_i=\sum_{k=1}^{n}t_{ik}x_k\quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

後化爲型 $H(x, x)$，亦卽耶可比公式

$$H(x, x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{D_k}{D_{k-1}}X_k\overline{X}_k\quad (D_0=1)\tag{133}$$

能夠成立，其中

$$X_k=x_k+t_{k,k+1}x_{k+1}+\cdots+t_{kn}x_n\quad (k=1, 2, \cdots, r),\tag{134}$$

❶ 這些元素實際上是從等式(124)的右前得出來的，因爲在 D 的後 $n-r$ 個對角線上的元素等於零。

而

$$t_{kj}=\frac{1}{D_k}H\begin{pmatrix}1 & 2\cdots k-1 & j\\ 1 & 2\cdots k-1 & k\end{pmatrix}$$

$$(j=k+1, \cdots, n;\ k=1, 2, \cdots, r)。\quad (135)$$

線性型 $X_1, X_2, \cdots, X_r$ 是無關的，因為型 X_k 含有變數 x_k 而以後諸型 $X_{k+1}, \cdots, X_r$ 都不含 x_k。

替代 $X_1, X_2, \cdots, X_r$，我們引進線性無關型

$$Y_k=D_kX_k \quad (k=1, 2, \cdots, r) \quad (136)$$

我們可以寫耶可比公式(133)為次之形狀

$$H(x, x)=\sum_{k=1}^{r}\frac{Y_k\overline{Y}_k}{D_{k-1}D_k} \quad (D_0=1)。\quad (137)$$

對應於耶可比公式(137)，知在型 $H(x, x)$的表示式中，負平方的個數等於序列 $1, D_1, D_2, \cdots, D_r$ 中的變號數

$$\nu=V(1, D_1, D_2, \cdots, D_r)$$

因而安密達型 $H(x, x)$的符號差是為次式所決定的：

$$\sigma=r-2V(1, D_1, D_2, \cdots, D_r)。\quad (138)$$

現在我們可以述及關於特殊情形的那些註釋，對於二次型所說的結果(§ 3)，都自動轉移到安密達型上。

定義 5. 安密達型 $H(x, x)=\sum_{i,k=1}^{n}h_{ik}x_i\overline{x}_k$ 稱為非負的(非正的)，如果對於變數的任何值，都有

$$H(x, x)\geqslant 0 \quad (\leqslant 0)。$$

定義 6. 安密達型 $H(x, x)=\sum_{i,k=1}^{n}h_{ik}x_i\overline{x}_k$ 稱為恆正的(恆負的)，如果對於任何不全等於零的變數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，都有

$$H(x, x)>0 \quad (<0)。$$

定理 19. 為了使得安密達型 $H(x, x)=\sum_{i,k=1}^{n}h_{ik}x_i\overline{x}_k$ 恆正，充分必要的，是次諸不等式全能適合

$$D_k=H\begin{pmatrix}1 & 2\cdots k\\ 1 & 2\cdots k\end{pmatrix}>0 \quad (k=1, 2, \cdots, n)。\tag{139}$$

定理 20. 爲了使得安密達型 $H(x, x)=\sum_{i,k=1}^{n} h_{ik}x_i\bar{x}_k$ 非負，充分必要的，是矩陣 $H=\|h_{ik}\|_1^n$ 的所有主子式都是非負的：

$$H\begin{pmatrix}i_1 & i_2\cdots i_p\\ i_1 & i_2\cdots i_p\end{pmatrix}\geqslant 0$$

$$(i_1, i_2, \cdots, i_p=1, 2, \cdots, n;\ p=1, 2, \cdots, n)\tag{140}$$

定理 19 與 20 的證明與對於二次型定理 3 與 4 的證明全相類似。

安密達型 $H(x, x)$ 的恆負性與非正性條件可從條件(139)與(140)相對應的來得出，如果用後二條件於型 $-H(x, x)$。

從第九章 § 10 的定理 5′ 得出關於化安密達型到主軸上去的定理。

定理 21. 常可用變數的 U–變換

$$x=U\xi \quad (UU^*=E)\tag{141}$$

把安密達型 $H(x, x)=\sum_{i,k=1}^{n} h_{ik}x_i\bar{x}_k$ 化爲標準形式

$$\Lambda(\xi, \xi)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\xi_i\bar{\xi}_i;\tag{142}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots; \lambda_n$ 爲矩陣 $H=\|h_{ik}\|_1^n$ 的特徵數。

定理 21 的眞確性可從次式推得：

$$H=U\|\lambda_i\delta_{ik}\|U^{-1}=T'\|\lambda_i\delta_{ik}\|\bar{T} \quad (U'=\bar{U}^{-1}=T)。\tag{143}$$

設給予兩個安密達型

$$H(x, x)=\sum_{i,k=1}^{n} h_{ik}x_i\bar{x}_k \text{ 與 } G(x, x)=\sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}x_i\bar{x}_k。$$

討論安密達型束 $H(x, x)-\lambda G(x, x)$（λ 爲實參數）。這個型束稱爲正則的，如果型 $G(x, x)$ 是恆正的。用安密達矩陣 $H=\|h_{ik}\|_1^n$ 與 $G=\|g_{ik}\|_1^n$ 我們建立方程

$$|H-\lambda G|=0。$$

這個方程稱爲安密達型束的特徵方程。這個方程的根稱爲型束的特徵數。

如果 λ_0 是型束的特徵數，那末有列 $z=(z_1, z_2, \cdots, z_n)\neq 0$ 存在，使得

$$Hz=\lambda_0 z。$$

列 z 將稱爲對於應特徵數 λ_0 的型束 $H(x, x)-\lambda G(x, x)$ 的主列或主向量。

我們有

定理 22. 正則安密達型束 $H(x, x)-\lambda G(x, x)$ 的特徵方程有 n 個實根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$。有 n 個對應於這些根的主向量 $z^1, z^2, \cdots, z^n$，適合"法正交性"條件：

$$G(z^i, z^k)=\delta_{ik} \quad (i, k=1, 2, \cdots, n)。$$

他的證明完全與定理 8 的證明類似。

正則二次型束特徵數的所有極端性質對於安密達型仍然有效。

定理 10—17 仍然有效，如果在這些定理中把所有的名詞"二次型"都換爲"安密達型"。定理的證明無何改變。

§10. 甘凱連夫型

設給予的序列 $s_0, s_1, \cdots, s_{2n-2}$。用這些數建立 n 個變數的二次型：

$$S(x, x)=\sum_{i, k=0}^{n-1} s_{i+k}x_i x_k。 \tag{144}$$

稱二次型(144)爲甘凱連夫型。與他對應的對稱矩陣 $S=\|s_{i+k}\|_0^{n-1}$ 亦稱爲甘凱連夫矩陣。這個矩陣的形狀爲：

$$S=\begin{Vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \cdots\cdots s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 \cdots\cdots s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 \cdots\cdots s_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} \cdots s_{2n-2} \end{Vmatrix}。$$

以 $D_1, D_2, \cdots, D_n$ 順次記矩陣 S 左上角諸主子式：

$$D_p=|s_{i+p}|_0^{p-1} \quad (p=1, 2, \cdots, n)。$$

在本節中我們推出關於實甘凱連夫型的秩與符號差的勿勞別涅斯主要結果❶。

首先證明兩個引。

引 1. 如在甘凱連夫矩陣 $S=\|s_{i+k}\|_0^{n-1}$ 中，前 h 行線性無關，而前 $h+1$ 行線性相關，那末

$$D_h\neq 0。$$

證明　以 $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_h, \Gamma_{h+1}$ 記矩陣 S 的前 $h+1$ 行。由定理的條件，行 $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_h$ 線性無關，而行 Γ_{h+1} 可經這些行線性表出：

$$\Gamma_{h+1}=\sum_{j=1}^{h}\alpha_j\Gamma_{h-j+1}$$

或

$$s_q=\sum_{j=1}^{h}\alpha_j s_{q-j}\quad (q=h, h+1, \cdots, h+n-1)。\tag{145}$$

寫出由矩陣 S 的前 h 行 $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_h$ 所構成的矩陣：

$$\left\|\begin{matrix} s_0 & s_1 & s_2\cdots\cdots s_{n-1}\\ s_1 & s_2 & s_3\cdots\cdots s_n\\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\\ s_{h-1} & s_h & s_{h+1}\cdots s_{h+n-2}\end{matrix}\right\|。\tag{146}$$

這個矩陣的秩等於 h。另一方面，由(145)知道這個矩陣的任一列都可經其前面的 h 個列線性表出。故矩陣的任一列都可經最先的 h 列線性表出。但因矩陣(146)的秩等於 h，矩陣(146)的最前面的 h 個列應當線性無關，亦即

$$D_h\neq 0。$$

我們的引已經證明。

引 2. 如果對於矩陣 $S=\|s_{i+k}\|_0^{n-1}$ 有某一個 $h(<n)$ 存在使得

$$D_h\neq 0, D_{h+1}=\cdots=D_n=0,\tag{147}$$

且令

❶ 參考[125 f]。

$$t_{ik}=\frac{S\begin{pmatrix}1\cdots h & h+i+1\\ 1\cdots h & h+k+1\end{pmatrix}}{S\begin{pmatrix}1\cdots h\\ 1\cdots h\end{pmatrix}}=\frac{1}{D_h}\begin{vmatrix} & & s_{h+k}\\ & D_h & \vdots\\ & & s_{2h+k-1}\\ s_{h+i}\cdots s_{2h+i-1} & & s_{2h+i+k}\end{vmatrix}。\quad(148)$$

$$(i,\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-h-1),$$

那末矩陣 $T=\|t_{ik}\|_0^{n-h-1}$ 亦是一個甘凱連夫矩陣且位於其第二對角線左上方的所有元素全等於零，亦即有這樣的數 $t_{n-h-1},\ \cdots,\ t_{2n-2h-2}$ 存在，使得

$$t_{ik}=t_{i+k}\ \ (i,\ k=0,\ 1,\cdots,\ n-h-1;\ t_0=t_1=\cdots=t_{n-h-2}=0)。$$

證明 在討論中引進矩陣

$$T_p=\|t_{ik}\|_0^{p-1}\ \ (p=1,\ 2,\cdots,\ n-h)。$$

對於這種記法有 $T=T_{n-h}$。

我們說，矩陣 $T_p\ (p=1,\ 2,\ \cdots,\ n-h)$ 中任何一個都是甘凱連夫矩陣而且當 $i+k\leqslant p-2$ 時，在他們裏面有 $t_{ik}=0$。對 p 取數學歸納法來證明。

對於矩陣 T_1 我們的論斷是非常明顯的，對於矩陣 T_2 亦顯然成立，因爲

$$T_2=\begin{Vmatrix}t_{00} & t_{01}\\ t_{10} & t_{11}\end{Vmatrix},\ t_{01}=t_{10}\ \ (\text{由於 } S \text{ 的對稱性})\text{與}\ \ t_{00}=\frac{D_{h+1}}{D_h}=0。$$

假設我們的論斷對於矩陣 $T_p(p<n-h)$ 是眞確的，來證明他對於矩陣 $T_{p+1}=\|t_{ik}\|_0^p$ 亦能成立。由假設知有這樣的數 $t_{p-1},\ t_p,\cdots,\ t_{2p-2}$ 存在，使得 $t_0=\cdots=t_{p-2}=0$

$$T_p=\|t_{i+k}\|_0^p。$$

此時

$$|T_p|=t_{p-1}^p。\quad(149)$$

另一方面，應用行列式的薛爾凡斯透恆等式［參考第二章，§3，(28)］，我們求得：

$$|T_p|=\frac{D_{h+p}}{D_h}=0。\quad(150)$$

比較(149)與(150),我們得出:

$$t_{p-1}=0. \tag{151}$$

再者由(148),有:

$$t_{ik}=s_{2h+i+k}+\frac{1}{D_h}\begin{vmatrix} & & s_{h+k} \\ & D_h & \vdots \\ & & s_{2h+k-1} \\ s_{h+i}\cdots s_{2h+i-1} & & 0 \end{vmatrix}. \tag{152}$$

根據上引,從(147)知矩陣 $S=\|s_{i+k}\|_0^{n-1}$ 的第 $h+1$ 個行爲其前 h 行的線性組合:

$$s_q=\sum_{g=1}^{h}\alpha_g s_{q-g}\ \ (q=h,h+1,\cdots,h+n-1). \tag{153}$$

設 $i,k\leqslant p\leqslant i+k\leqslant 2p-1$。此時在數 i 與 k 中至少有一個小於 p。並不損失其一般性,可取 $i<p$。那末,利用(153)在位於等式(152)右節的行列式中裂分其最後一列,且再利用關係(152),我們有:

$$t_{ik}=s_{2h+i+k}+\sum_{g=1}^{h}\frac{\alpha_g}{D_h}\begin{vmatrix} & & s_{h+k-g} \\ & D & \vdots \\ & & s_{2h+k-g-1} \\ s_{h+i}\cdots s_{2h+i-1} & & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=s_{2h+i+k}+\sum_{g=1}^{h}\alpha_g(t_{i,\,k-g}-s_{2h+i+k-g}). \tag{154}$$

但由歸納法的假設(151)是成立的且因在(154)中 $i<p$, $k-p<p$ 與 $i+k-g\leqslant 2p-2$,所以 $t_{i,k-g}=t_{i+k-g}$。因此,當 $i+k<p$ 時,所有的 $t_{ik}=0$,而當 $p\leqslant i+k\leqslant 2p-1$ 時,由於(154)知值 t_{ik} 祇與 $i+k$ 有關。

這樣一來,T_{p+1} 是一個甘凱連夫矩陣且在這個矩陣中位於第二對角線左上法的元素 $t_0, t_1, \cdots, t_{p-1}$ 全等於零。

我們的引已經證明。

應用引 2,我們證明次之定理:

定理 23. 如果甘凱連夫矩陣 $S=\|s_{i+k}\|_0^{n-1}$ 有秩 r 且對於某一個 h $(<r)$ 有

$$D_h \neq 0,\ D_{h+1} = \cdots = D_r = 0,$$

那末由矩陣 S 的前 h 個行與後 $r-h$ 個行所構成的 r 級主子式不等於零:

$$D^{(r)} = S\begin{pmatrix}1\cdots h, & n-r+h+1, & n-r+h+2, & \cdots, & n\\ 1\cdots h, & n-r+h+1, & n-r+h+2, & \cdots, & n\end{pmatrix} \neq 0。$$

證明 根據上面的引,矩陣

$$T = \| t_{ik} \|_0^{n-h-1}\left[t_{ik} = \frac{S\begin{pmatrix}1\cdots h & h+i+1\\ 1\cdots h & h+k+1\end{pmatrix}}{S\begin{pmatrix}1\cdots h\\ 1\cdots h\end{pmatrix}} (i,\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-h+1) \right]$$

是一個甘凱達夫矩陣,在其第二對角線左上方的元素全等於零。故有

$$|T| = t_{0,\,n-h-1}^{n-h} 。$$

另一方面❶, $|T| = \frac{D_n}{D_h} = 0$。因此, $t_{0,\,n-h-1} = 0$, 且矩陣 T 有形狀

$$T = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\ \vdots & & & \iddots & u_{n-h-1}\\ \vdots & & \iddots & \iddots & \vdots\\ \vdots & \iddots & \iddots & & u_2\\ 0 & u_{n-h-1} & \cdots & u_2 & u_1 \end{vmatrix} 。$$

矩陣 T 應當有秩 $r-h$❷。故當 $r<n-1$ 時, 在矩陣 T 中的元素 $u_{r-h+1} = \cdots = u_{n-h+1} = 0$ 且有

---

❶ 根據行列式的薛爾凡斯透恆等式[參考第二章, §3, (28)]。

❷ 由薛爾凡斯透恆等式,矩陣 T 的所有階 $>r-h$ 的子式都等於零。另一方面,矩陣 S 含有 r 級的 D_h 的加邊子式不等於零。因此,矩陣 T 中有對應的 $r-h$ 級子式不等於零。

$$T=\begin{vmatrix} 0 & \cdot & \cdots & \cdots & \cdot & 0 \\ \vdots & & & & \cdot & \vdots \\ \vdots & & & \cdot & & 0 \\ \vdots & & \cdot & & & u_{r-h} \\ \vdots & \cdot & & & \cdot & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_{r-h} & \cdots & u_1 \end{vmatrix} \quad (u_{r-h}\neq 0)。$$

但由薛爾凡斯透恆等式(參考第二章，§3)

$$D^{(r)}=D_hT\begin{pmatrix} n-r+1 & \cdots & n-h \\ n-r+1 & \cdots & n-h \end{pmatrix}=D_hu_{r-h}^{r-h}\neq 0,$$

這就是所要證明的結果。

討論實❶甘凱達夫型 $S(x, x)=\sum_{i,k=0}^{n-1} s_{i+k}x_ix_k$ 且設其秩等於 r。以 π, ν, σ 各記這個型的正平方數、負平方數與符號差：

$$\pi+\nu=r,\quad \sigma=\pi-\nu=r-2\nu。$$

根據耶可比定理(本章，§3)這些數值可以由討論子式序列

$$D_0=1,\ D_1,\ D_2,\ \cdots,\ D_{r-1},\ D_r \tag{155}$$

的符號來決定，其公式為

$$\left.\begin{aligned} &\pi=P(1,\ D_1,\cdots,\ D_r),\ \nu=V(1,\ D_1,\cdots,\ D_r),\\ &\sigma=P(1,\ D_1,\cdots,\ D_r),-V(1,\ D_1,\ \cdots,\ D_r)=\\ &\quad =r-2V(1,\ D_1,\cdots,\ D_r)\ 。\end{aligned}\right\} \tag{156}$$

當序列(155)中有任何三個相鄰的項等於零時，這些公式不能應用(參考§3)。但是對於甘凱達夫型，有如勿勞别涅斯所證明，在一般情形都可給予規則來應用公式(156)：

定理 24.(勿勞别涅斯)　對於秩為 r 的實甘凱達夫型 $S(x, x)=\sum_{i,k=0}^{n-1} s_{i+k}x_ix_k$，$\pi, \nu, \sigma$ 的值可以由(156)式來決定，如果

❶　在上面的引1，2與定理23中可以取任意數域作爲基域，特別的，可取所有複數的域或所有實數的域。

(1)當

$$D_h \neq 0,\ D_{h+1} = \cdots = D_r = 0\ \ (h < r) \tag{157}$$

時,在這些公式中換 D_r 以 $D^{(r)}$, 其中

$$D^{(r)} = S\begin{pmatrix} 1\cdots h & n-r+h+1\cdots n \\ 1\cdots h & n-r+h+1\cdots n \end{pmatrix} \neq 0;$$

(2)當任意一羣 p 中間子式等於零時:

$$(D_h \neq 0)\ D_{h+1} = D_{h+2} = \cdots = D_{h+p} = 0\ (D_{h+p+1} \neq 0) \tag{158}$$

對於這些零子式按照次之公式來選取符號:

$$符號\ D_{h+j} = (-1)^{\frac{j(j+1)}{2}} 符號\ D_h。 \tag{159}$$

此處對應於羣(158)的值 P, V, $P-V$ 為❶

	p 為奇數	p 為偶數
$P_{h,p} = P(D_h, D_{h+1}, \cdots, D_{h+p+1})$	$\frac{p+1}{2}$	$\frac{p+1+\varepsilon}{2}$
$V_{h,p} = V(D_h, D_{h+1}, \cdots, D_{h+p+1})$	$\frac{p+1}{2}$	$\frac{p+1-\varepsilon}{2}$
$P_{h,p} - V_{h,p}$	0	ε

, (160)

$$\varepsilon = (-1)^{\frac{p}{2}} 符號\ \frac{D_{h+p+1}}{D_h}。$$

證明 首先討論 $D_r \neq 0$ 的情形。此時型 $S(x, x) = \sum_{i,k=0}^{n} s_{i+k} x_i x_k$ 與 $S_r(x, x) = \sum_{i,k=0}^{r-1} s_{i+k} x_i x_k$ 不僅有相同的秩 r 且有相同的符號差 σ。事實上,設 $S(x, x) = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i Z_i^2$, 其中 Z_i 為實線性型,而 $\varepsilon_i = \pm 1\ (i = 1, 2, \cdots, r)$。取 $x_{r+1} = \cdots = x_n = 0$。那末型 $S(x, x)$, Z_i 各化為 $S(x, x)$, $\hat{Z}_i\ (i = 1, 2, \cdots, r)$, 而且 $S_r(x, x) = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i \hat{Z}_i^2$, 亦卽 $S_r(x, x)$ 與 $S(x, x)$ 有相同個數

❶ 可應用(159)與(160)式於(157)的情形,祇是此時應當取 $p = r - h - 1$ 而對於 D_{h+p+1} 要了解為 $D^{(r)} \neq 0$ 而不是 $D^{(r)} = 0$。

的正(負)無關平方❶。這樣一來,知 σ 是型 $S_r(x, x)$ 的符號差。

連續變動參數 $s_0, s_1, \cdots, s_{2r-2}$ 使得對於新參數 $s_0^*, s_1^*, \cdots, s_{2r-2}^*$❷,序列

$$1, D_1^*, D_2^*, \cdots, D_r^* \quad (D_q^* = |s_{i+k}^*|_0^{q-1}, \ q=1, 2, \cdots, r)$$

中所有的項都不等於零,而且在變動過程中(155)中不爲零的子式沒有一個曾變爲零❸。

因爲在變動參數時並不變更型 $S_r(x, x)$ 的秩,所以不變他的符號差(參考本章,§5末尾)。因此

$$\sigma = P(1, D_1^*, \cdots, D_r^*) - V(1, D_1^*, \cdots, D_r^*)。 \tag{161}$$

如果對於某一個 i 有 $D_i \neq 0$,那末符號 D_i^* = 符號 D_i。故所有的問題都化爲定出,對應於 $D_i = 0$ 的,這種項 D_i^* 的符號的變化。實際上是對於每一羣(158)形的項,要決定

$$P(D_h^*, D_{h+1}^*, \cdots, D_{h+p+1}^*) - V(D_h^*, D_{h+1}^*, \cdots, D_{h+p}^*, D_{h+p+1}^*)。$$

爲了這個目的,命:

$$t_{ik} = \frac{1}{D_h} \begin{vmatrix} & & s_{h+k} \\ & D_h & \vdots \\ & & s_{2h+k-1} \\ s_{h+i} & \cdots s_{2h+i-1} & s_{2h+i+k} \end{vmatrix} \quad (i, k = 0, 1, \cdots, p)。$$

根據引2,矩陣 $T = \|t_{ik}\|_0^p$ 是一個甘凱連夫矩陣而且其所有位於第二對角線左上方的元素都等於零,亦卽矩陣 T 有形狀

---

❶ 線性型 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_r$ 是線性無關的,因爲二次型 $S_r(x, x) = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i Z_i^2$ 有秩 r ($D_r \neq 0$)。

❷ 在本節中記號 * 不是表示轉移到關聯矩陣去的意思。

❸ 這種變動常可施行,因爲在參數 $s_0, s_1, \cdots, s_{2r-2}$ 的空間中,形爲 $D_i = 0$ 的方程表示某一個代數超曲面。如果一點落在某一些這種超曲面上,那末常可取一個與之要怎樣接近就怎樣接近的點使其在這些超曲面的外邊。

$$T=\left\|\begin{matrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & t_p \\ \cdot & & & & & \cdot & * \\ \cdot & & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & & \cdot \\ 0 & \cdot & & & & & \cdot \\ t_p & * & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & * \end{matrix}\right\|。 \tag{162}$$

以 $\hat{D}_1, \hat{D}_2, \cdots, \hat{D}_{p-1}$ 順次記矩陣 T 的子式:

$$\hat{D}_q=|t_{ik}|_0^{q-1} \quad (q=1, 2, \cdots, p+1)。$$

與矩陣 T 相平行的在討論中引進矩陣

$$T^*=\|t_{ik}^*\|_0^p,$$

其中

$$t_{ik}^*=\frac{1}{D_h^*}\left|\begin{matrix} D_h & \begin{matrix} s_{h+k}^* \\ \vdots \\ s_{2h+k-1}^* \end{matrix} \\ s_{h+i}^*\cdots s_{2h+i-1}^* & s_{2h+i+k}^* \end{matrix}\right| \quad (i, k=0, 1, \cdots, p),$$

且引進對應的行列式

$$\hat{D}_q^*=|t_{ik}^*|_0^{q-1} \quad (q=1, 2, \cdots, p+1)。$$

根據行列式的薛爾凡斯透恆等式

$$D_{h+q}^*=D_h^*\hat{D}_q^* \quad (q=1, 2, \cdots, p+1)。$$

故有

$$P(D_h^*, D_{h+1}^*, \cdots, D_{h+p+1}^*)-V(D_h^*, D_{h+1}^*, \cdots, D_{h+p+1}^*)=$$
$$=P(1, \hat{D}_1^*, \cdots, \hat{D}_{p+1}^*)-V(1, \hat{D}_1^*, \cdots, \hat{D}_{p+1}^*)=\hat{\sigma}^*, \tag{163}$$

其中 $\hat{\sigma}^*$ 是型 $T^*(x, x)=\sum_{i,k=0}^{p} t_{ik}^* x_i x_k$ 的符號差。

平行於型 $T^*(x, x)$, 討論型

$$T(x, x)=\sum_{i,k=0}^{p} t_{i+k} x_i x_k \text{ 與 } T^{**}(x, x)=t_p(x_0 x_p+x_1 x_{p-1}+\cdots+x_p x_0)。$$

矩陣 T^{**} 是從矩陣 T[參考(162)]中把位於第二對角線左下方的元素全換爲零來得出的。以 $\hat{\sigma}$ 與 $\hat{\sigma}^{**}$ 記型 $T(x, x)$與 $T^{**}(x, x)$的符號差。

因爲型 $T^*(x,x)$ 與 $T^{**}(x,x)$ 都是從型 $T(x,x)$ 這樣來變動係數使得在變動過程中型的秩始終保持不變來得出的

$$\left(|T^{**}|=|T|=\frac{D_{h+p+1}}{D_h}\neq 0,\ |T^*|=\frac{D^*_{h+p+1}}{D^*_h}\neq 0\right),$$

所以型 $T(x,x)$，$T^*(x,x)$ 與 $T^{**}(x,x)$ 的符號差應當相同：

$$\hat{\sigma}=\hat{\sigma}^*=\hat{\sigma}^{**}。\tag{164}$$

但是

$$T^{**}(x,x)=\begin{cases}2t_p(x_0x_{2k-1}+\cdots+x_{k-1}x_k) & (p=2k-1),\\ t_p[2(x_0x_{2k}+\cdots+x_{k-1}x_{k+1})+x_k^2] & (p=2k),\end{cases}$$

而且每一個 $x_\alpha x_\beta$ 形的乘積當 $\alpha\neq\beta$ 時可以換爲平方差 $\left(\frac{x_\alpha+x_\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{x_\alpha-x_\beta}{2}\right)^2$，因而得出 $T^{**}(x,x)$ 對無關實平方和的分解式，所以

$$\hat{\sigma}^{**}=\begin{cases}0 & (p\text{ 爲奇數}),\\ \text{符號 } t_p & (p\text{ 爲偶數})。\end{cases}\tag{165}$$

另一方面，由(162)得

$$\frac{D_{h+p-1}}{D_h}=|T|=(-1)^{\frac{p(p+1)}{2}}t_p^{p+1}。\tag{166}$$

從(163)，(164)，(165)與(166)得出：

$$P(D^*_h,D^*_{h+1},\cdots,D^*_{h+p+1})-V(D^*_h,D^*_{h+1},\cdots,D^*_{h+p+1})=$$

$$=\begin{cases}0 & (p\text{ 爲奇數}),\\ \varepsilon & (p\text{ 爲偶數}),\end{cases}\tag{167}$$

其中

$$\varepsilon=(-1)^{\frac{p}{2}}\text{符號}\frac{D_{h+p+1}}{D_h}。$$

因爲

$$P(D^*_{h+1},D^*_{h+2},\cdots,D^*_{h+p+1})+V(D^*_{h+1},D^*_{h+2},\cdots,D^*_{h+p+1})=$$

$$=p+1,\tag{168}$$

故由(167)與(168)推得表示式(160)。

現在設 $D_r=0$。那末對於某一個 $h<r$

$$D_h \neq 0,\ D_{h+1} = \cdots = D_r = 0。$$

在此時根據定理 25 有

$$D^{(r)} = S\begin{pmatrix} 1\cdots h & n-r+h+1\cdots n \\ 1\cdots h & n-r+h+1\cdots n \end{pmatrix} \neq 0。$$

在二次型 $S(x, x) = \sum_{i,k=0}^{n+1} s_{i+k}x_ix_k$ 中調動變數的序數可以把所討論的情形化到前面的情形去。命：

$$\tilde{x}_0 = x_0, \cdots, \tilde{x}_{h-1} = x_{h-1}, \tilde{x}_h = x_{n-r+h}, \cdots, \tilde{x}_{r-1} = x_{n-1},$$
$$\tilde{x}_r = x_h, \cdots, \tilde{x}_{n-1} = x_{n-r+h-1}。$$

此時 $S(x, x) = \sum_{i,k=0}^{n-1} \tilde{s}_{i+k}x_ix_k$。

從矩陣 T 的結構(定理 23 的證明中所寫出的)出發且應用從行列式的薛爾凡斯透恆等式所得出的關係式

$$\hat{D}_j = \frac{D_{h+j}}{D_h},\quad \hat{\tilde{D}}_j = \frac{\tilde{D}_{h+j}}{D_h}\quad (j=1, 2, \cdots, n-h),$$

我們從序列 $1, D_1, D_2, \cdots, D_n$ 換一個元素 D_r 爲 $D^{(r)}$ 得出序列 $1, \tilde{D}_1, \tilde{D}_2, \cdots, D_n$。

我們讓讀者驗證，對應於(159)所給出的零行列式的符號寫法，就有公式(160)。

定理已經完全證明。

註　從(166)式，知當 p 爲奇數時［p 爲羣(158)中零行列式的個數］，有：

$$符號\ \frac{D_{h+p+1}}{D_h} = (-1)^{\frac{p+1}{2}}。$$

特別的，當 $p=1$ 時有 $D_hD_{h+2}<0$。此時在計算 $V(1, D_1, \cdots, D_r)$ 時可以除去 D_{h+1}，因而得出戈力琴費傑爾規則。同樣的，當 $p=2$ 時，我們從(160)得出勿勞別涅斯規則(本章，§3 末尾)。

文　献

A. 專著,提要,教程

1. Айнс Э. Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения, ДНТВУ, 1939, гл. XIX.
2. Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, Гостехиздат, 1948, гл. I.
3. Ахиезер Н. И. и Крейн М. Г., О некоторых вопросах теории моментов, ДНТВУ, 1938.
4. Бернштейн С. Н., Теория вероятностей, 4-е изд., Гостехиздат, 1946.
5. Бохер М., Введение в высшую алгебру, ОНТИ, 1933. (有中譯本).
6. Булгаков Б. В., Колебания, т. I, Гостехиздат, 1949, гл. I.
7. Гантмахер Ф. Р. и Крейн М. Г., Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, 2-е изд., Гостехиздат, 1950.
8. Гельфанд И. М., Лекции по линейной алгебре, 2-е изд., Гостехиздат, 1951. (有中譯本).
9. Геронимус Я. Л., Теория ортогональных многочленов, Гостехиздат, 1950, гл. II.
10. Граве А. Д., Элементы высшей алгебры, Киев, 1914.
11. Еругин Н. П., Приводимые системы, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. XIII, 1946.
12. Каган В. Ф., Основания теории определителей, Гос. изд-во Украины, 1922.
13. Клейн Ф., Высшая геометрия, ГОНТИ, 1939, §§ 96—99.
14. Крейн М. Г. и Неймарк М. А., Метод симметрических и эрмитовых форм в теории отделения корней алгебраических уравнений, Харьков, 1936.
15. Крейн М. Г. и Рутман М. А., Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха, Успехи матем. наук, 3 : 1 (23) (1948).
16. Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, т. 1, 3-е изд., Гостехиздат, 1951, гл. I, II.
17. Курош А. Г., Курс высшей алгебры, 3-е изд., Гостехиздат, 1952. (有中譯本).
18. Лаппо-Данилевский И. А., а) Теория функций от матриц и систем линейных дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1934.
    б) Mémoires sur la théorie des systémes des équations différentielles linéaires, т. I, II, III, Труды Физико-матем. ин-та им. В. А. Стеклова, VI—VIII, 1934—1936.
19. Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, 1950.
20. Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, Гостехиздат, 1952.
21. Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, Гостехиздат, 1948. (有中譯本).
22. Марков А. А., Избранные труды, Гостехиздат, 1948.
23. Мейман Н. Н., Некоторые вопросы расположения корней полиномов, Успехи матем. наук, 4:6 (34) 1949.
24. Неймарк Ю. И., Устойчивость линеаризованных систем, изд. Ленингр. Военно-воздушной инж. академии, 1949.
25. Романовский В. И., Дискретные цепи Маркова, Гостехиздат, 1948.
26. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. III.
27. Стильтьес Т. И., Исследование о непрерывных дробях, ОНТИ, Харьков, 1936.

28. Фаддеев Д. К. и Соминский И. С., Сборник задач по высшей алгебре, 2-е изд., Гостехиздат, 1949. (有中譯本).
29. Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, Гостехиздат, 1950.
30. Фрезер, Р., Дункан В., Коллар, А., Теория матриц и ее приложения к дифференциальным уравнениям и динамике, Изд-во иностр. литературы, 1950.
31. Чебышев П. Л., Полное собрание сочинений, т. III, Изд. АН СССР, 1948.
32. Чеботарев Н. Г. и Мейман Н. Н., Проблема Рауса-Гурвица для полиномов и целых функций, Труды Матем. ин-та.им В. А. Стеклова, т. XXVI, Изд. АН СССР, 1949.
33. Четаев Н. Г., Устойчивость движения, Гостехиздат, 1946.
34. Шапиро Г. М., Высшая алгебра, 4-е изд. Учпедгиз, 1938.
35. Шилов Г. Е., Введение в теорию линейных пространств, Гостехиздат, 1952.
36. Широков П. А., Тензорное исчисление, ГТТИ, 1934.
37. Шрейер О. и Шпернер Е., а) Введение в линейную алгебру в геометрическом изложении, ОНТИ, 1934; б) Теория матриц, ОНТИ, 1936.
38. Aitken A. C., Determinants and matrices, Edinbourg, 5-е изд., 1948.
39. Cullis C. E., Matrices and determinoids, т. I—III, Cambridge, 1913—1925.
40. Kowalewski G., Einführung in die Determinantentheorie, Leipzig, 1909.
41. Mac Duffee C. C., a) The theory of matrices, Berlin, 1933; b) Vectors and matrices, New York, 1943.
42. Marden M., The geometry of the zeros of a polynomial in a complex variable, New York, 1949.
43. Muir, Sir Thomas, The theory of determinants, т. I—III, Cambridge, 1906—1923.
44. Muth P., Theorie und Anwendung der Elementarteilertheorie, Leipzig, 1899.
45. Routh E. J., a) Stability of a given state of motion, London, 1877;
b) The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies, ч. II, 5-е изд., London, 1892.
46. Schlesinger L., a) Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen, Berlin, 1908,
b) Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage, Berlin, 1922.
47. Turnbull H. W. and Aitken A. C., An introduction to the theory of canonical matrices, London, 1932.
48. Turnbull H. W., The theory of determinants, matrices, and invariants, London, 1929.
49. Volterra V. et Hostinsky B., Opérations infinitésimales linéaires, Paris, 1938.
50. Wedderburn J. H. M., Lectures on matrices, New York, 1934.
51. Weyl H., Mathematische Analyse des Raumproblems, Berlin, 1923.
52. Winter A., Spektraltheorie der unendlichen Matrizen, Leipzig, 1929.
53. Zurmühl R., Matrizen, Berlin, 1950.

Б. 專題論文

54. Азбелев Н. и Виноград Р., Процесс последовательных приближений для отыскания

собственных чисел и собственных векторов, ДАН, **83**, 1952, 173—174.

55. Айзерман М. А., Об учете нелинейных функций от нескольких аргументов при исследовании устойчивости системы автоматического регулирования. Автоматика и телемеханика, т. VIII, № 1, 1947.
56. Аржаных И. С., Распространение метода А. Н. Крылова на полиномиальные матрицы, ДАН, **81**, 1951, 749—752.
57. Булгаков Б. В., Деление прямоугольных матриц, ДАН, **85**, 1952, 21—24.
58. Вержбицкий Б. Д., Некоторые вопросы теории рядов композиций нескольких матриц. Матем. сб., **5** (47), 1939, 505—512.
59. Вейленд Г., Представление векового уравнения в виде многочлена, перевод с англ., Успехи Матем. наук, **2**:**4** (20), 1947, 128—158.
60. Гантмахер Ф. Р., а) Геометрическая теория элементарных делителей по Круллю, труды Одесского гос. университета, Математика, т. I, 1935, 89—108.

    б) К алгебраическому анализу метода акад. А. Н. Крылова преобразования векового уравнения. Труды II Всесоюзного матем. съезда, т. II, 1934, 45—48.

    в) On the classification of real simple Lie groups, Матем. сб., **5** (47), 1939, 217—250.
61. Гантмахер Ф. Р. и Крейн М. Г., а) К структуре ортогональной матрицы. Труды физ.-мат. отдела ВУАН. Киев, 1929, 1—8.

    б) О нормальных операторах в эрмитовом пространстве, Известия Физ.-мат. об-ва при Казанском университете, т. IV, вып. 1, сер. 3, 1929—1930, 71—84.

    в) Об одном специальном классе детерминантов в связи с интегральными ядрами Келлога, Матем. сб., **42**, 1935, 501—508.

    г) Sur les matrices oscillatoires, Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences, Paris, 201, 1935, 577—579.

    д) Sur les matrices oscillatoires et complètment non-négatives, Compositio Mathematica, **4**, 1937, 445—476.
62. Гершгорин С. А., Ueber die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix, ИАН, сер. физ.-матем., 1931, 749—754.
63. Голубчиков А. Ф., О структуре автоморфизмов комплексных простых групп Ли, ДАН, **27**, 1, 1951, 7—9.
64. Граве Д. А., Малые колебания и некоторые предложения алгебры, ИАН, сер. физ.-матем., 1929, 563—570.
65. Гроссман Д. П., К задаче численного решения систем совместных линейных алгебраических уравнений, Успехи матем. наук, **5**:**3** (37), 1950, 87—103.
66. Данилевский А. М., О численном решении векового уравнения. Матем. сб., **2** (44), 1937, 169—172.
67. Дмитриев Н. А. и Дынкин Е. Б., а) О характеристических числах стохастических матриц, ДАН, **49**, 1945, 159—162.

    б) Характеристические корни стохастических матриц, ИАН, матем. серия, **10**, 1946, 167—194.
68. Дубнов Я. С., а) О совместных инвариантах системы аффиноров, Труды Всесоюзн. съезда матем. в Москве, 1927, 236—237.

    б) О симметрично сдвоенных ортогональных матрицах, М., Изв. асс. ин-тов ун-та (1927), 33—35.

    в) О матрицах Дирака, М., Ученые зап. ун-та, **2**:**2**, 1934, 43—48.

69. Дубнов Я. С. и Иванов В. К., О понижении степени аффинорных полиномов, ДАН, СССР, **41**, 1943, 99—102.
70. Еругин Н. П., а) Sur la substitution exposante pour quelques systèmes irrégulières, Матем. сб., **42**, 1935, 745—753.
б) Показательная подстановка иррегулярной системы линейных диффренциальных уравнений, ДАН, **17**, 1937, 235—236.
в) О проблеме Римана для системы Гаусса. Л., Ученые зап. пед. ин-та, **28**, 1939, 293—304.
71. Каган В. Ф., О некоторых системах чисел. к которым приводят лоренцовы преобразования. М., Изв. асс. ин-тов ун-та, 1927, 3—31.
72. Карпелевич Ф. И., О характеристических корнях матрицы с неотрицательными элементами, ИАН, матем. сер., **15**, 1951, 361—383.
73. Коваленко К. Р. и Крейн М. Г., О некоторых исследованиях А. М. Ляпунова по дифференциальным уравнениям с периодическими коэффициентами, ДАН, **75**, 1950, 495—499.
74. Колмогоров А. Н., Цепи Маркова со счетным множеством возможных состояний. М., Бюлл. ун-та (А), **1**:3, 1937.
75. Котелянский Д. М., а) Про монотонні n-то порядка функції від матріць. Труды Одеського державного університеты, збірник матем. відділу, т. 3, 1941, 103—114.
б) К теории неотрицательных и осцилляционных матриц, Укр. матем. журнал, т. II, № 2, 1950, 94—101.
в) О некоторых свойствах матриц с положительными элементами, Матем. сб. **31** (**73**), 1952, 497—506.
76. Кравчук М. Ф., а) До теорії перемінних матриць, Киев, Зап. физ.-матем. отд. АН УССР, **1**:**2**, 1924, 28—33.
б) До загальної теорії білінійних форм, Київ, Изв. политехн. с.-х. ин-та, **19**, 1924, 17—18.
в) Про одне перетворення квадратичних форм. Киев, Зап. физ.-матем. отд. АН УССР, **1**:**2**, 1924, 87—90.
г) Про квадратичні форми та лінійні перетворення, Киев, Зап. физ.-матем. отд. АН УССР, **1**:**3**, 1924, 1—89.
д) Перемінні множини лінійних перетворень. Київ, Зап. с.-госп. ин-ту, **1**, 1926, 25—58.
е) Ueber vertauschbare Matrizen. Rend. circ. mat., Palermo, **51**, 1927, 126—130.
ж) О структуре перестановочных групп матриц. Труды II Всес. матем. съезда, 1934, II, 11—12.
77. Кравчук М. Ф. и Гольдбаум Я. С., а) Про групи коммутативних матриць, Киев, Труды авиац. ин-та, 1929, 73—98; 1936, 12—23.
б) Об эквивалентности особенных пучков матриц. Киев, Труды авиац. ин-та, 1936, 5—27.
78. Красносельский М. А. и Крейн С. Г., Итерационный процесс с минимальными невязками, Матем. сб., **31** (**73**), 1952, 315—334.
79. Крейн М. Г., а) Добавление к работе "К структуре ортогональной матрицы," Труды физ.-мат. отдела ВУАН, Киев, 1931, 103—107.
б) О спектре якобиевой формы в связи с теорией крутильных колебаний валов,

Матем. сб., **40**, 1933, 455—466.

в) Об одном новом классе эрмитовых форм, ИАН, сер. физ.-мат., 1933, 1259—1275.

г) Об узлах гармонических колебаний механических систем некоторого специального типа, Матем. сб., **41**, 1934, 339—348.

д) Sur quelques applications des noyaux de Kellog aux problèmes d'oscillations, Сообщ. Харьк. матем. об-ва (4) **11**, 1935, 3—19.

е) Sur les vibrations propres des tiges dont l'une des extrémités est encastrée et l'autre libre, там же (4), **12**, 1935, 3—11.

ж) Обобщение некоторых исследований А. М. Ляпунова о линейных дифференциальных уравнениях с периодическими коэффициентами, ДАН, **73**, 1950, 445—448.

з) Об одном применении принципа неподвижной точки в теории линейных преобразований пространств с индефинитной метрикой, Успехи матем. наук, **5**:2 (36), 1950, 180—190.

и) О применении одного алгебраического предложения в теории матриц монодромии, Успехи матем. наук, **6**:1 (41), 1951, 171—177.

80. Крейн М. Г. и Наймарк М. А., а) Об одном преобразовании безутианты, приводящем к теореме Штурма, Харьков, Зап. матем. о-ва (4), **10**, 1933, 33—40.

б) О применении безутианты к вопросам отделения корней алгебраических уравнений. Труды Одесского гос. университета, Математика, т. I, 1935, 51—69.

81. Крылов А. Н., О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты колебаний материальных систем, ИАН, серия физ.-мат., 1931, 491—539.

82. Лаппо-Данилевский И. А., а) Основные задачи теории систем линейных дифференциальных уравнений с произвольными рациональными коэффициентами, Труды 1-го Всесоюзн. съезда, матем., ОНТИ, 1936, 254—262.

б) Résolution algorithmique des problèmes réguliers de Poincaré et de Riemann, I, журн. физ.-матем. о-ва, Л., **2**:1, 1928, 94—120, II; там же, 121—154.

в) Théorie des matrices satisfaisantes a des systèmes des équations differentielles linéaires à coefficients rationnels arbitraires. Журн. физ.-матем. об-ва, Л., **2**:2, 1928, 41—80.

83. Лидский В. Б., О собственных значениях суммы и произведения симметрических матриц, ДАН, **75**, 1950, 769—772.

84. Липин Н. В., О регулярных матрицах. Л., Труды ин-та инж. ж.-д. транспорта, **9**, 1934, 105.

85. Лопшиц А. М., а) Векторное решение задачи о симметрически сдвоенных матрицах, Труды Всеросс. съезда матем. в Москве, 1927, 186—187.

б) Характеристическое уравнение наинизшей степени для аффинора и применение его к интегрированию дифференциальных уравнений, Труды сем. по вект. и тенз. исчислению, вып. II—III, 1935.

в) Численный метод нахождения собственных значений и собственных плоскостей линейного оператора, там же, т. VII, 233—259.

г) Экстремальная теорема для гиперэллипсоида и ее применение к решению системы линейных алгебраических уравнений, там же, т. IX, 1952, 183—197.

86. Лузин Н. Н., а) О методе акад. А. Н. Крылова составления векового уравнения,

ИАН, сер. физ.-матем. 1931, 903—958.

б) О некоторых свойствах перемещающего множителя в методе акад. А. Н. Крылова, ИАН, сер. физ.-матем., 1932, I, 596—638; II, 735—762; III, 1065—1102.

в) К изучению матричной теории дифференциальных уравнений, Автом. и телемех., **5**, 1940, 3—66.

87. Люстерник Л. А., а) Нахождение собственных значений функций на электрической схеме, Электричество, **11**, 1946, 67—68.

б) Об электрическом моделировании симметрических матриц, Успехи матем. наук, **4:2** (30), 1949, 198—200.

88. Люстерник Л. А. и Прохоров А. М., Определение собственных значений и функций некоторых операторов с помощью электрической цепи, ДАН, **55**, 1947, 579—582; ИАН, ОФН, **11**, 1947, 141—145.

89. Маянц Л. С., Метод уточнения корней вековых уравнений высоких степеней и численного анализа их зависимости от параметров соответствующих матриц, ДАН, **50**, 1945, 121—124.

90. Нейгауз М. Г. и Лидский В. Б., Об ограниченности решений линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, ДАН, **77**, 1951, 183—193.

91. Папкович П. Ф., Об одном методе разыскания корней характеристического определителя. Прикл. матем. и мех., **1**, 1933, 314—318.

92. Понтрягин Л. С., Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой, ИАН, сер. матем., **8**, 1944, 243—280.

93. Потапов В. П., О голоморфных ограниченных в единичном круге матрицахфункциях, ДАН, **72**, 1950, 849—853.

94. Романовский В. И., а) Un théorème sur les zéros des matrices non-négatives, Bull. Soc. Math. France, **61**, 1933, 213—219.

б) Recherches sur les chaines de Markoff, Acta Math, **66**, 1935, 147—251.

95. Сарымсаков Т. А., О последовательноти стохастических матриц, ДАН, СССР, 47, 1945, 331—333.

96. Севастьянов Б. А., Теория ветвящихся случайных процессов, Успехи матем. наук, т. VI, вып. 6, 1951, 46—99.

97. Семендяев К. А., О нахождении собственных значений и инвариантных многообразий матриц посредством итераций, Прикл. матем. и мех., **3**, 1943, 193—221.

98. Смогоржевский А. С., Про унітарні типи циркулянтів, Киев, Журн. матем. цикла АН УССР, **1**, 1932, 89—91.

99. Смогоржевский А. С., и Кравчук М. Ф., Про ортогональні перетворення, Киев, Зап. ин-та нар. просв., **2**, 1927, 151—156.

100. Сулейманова Х. Р., Стохастические матрицы с действительными характеристическими числами, ДАН, **66**, 1949, 343—345.

101. Султанов Р. М., Некоторые свойства матриц с элементами из некоммутативного кольца, Баку, Труды сектора матем. АН АзССР, **2**, 1946, 11—17.

102. Сушкевич А. К., Про деякі типи особливих матриць, Учені записки Харківського держ. університету, **10**, 1937, 1—16.

103. Турчанинов А. С., О некоторых приложениях исчисления матриц к линейным дифференциальным уравнениям Одесса, Учен. зап. высш. шк., **1**, 1921, 41—48.

104. Фаге М. К., а) Обобщение неравенства Адамара об определителях, ДАН, **54**, 1946,

765—768.

б) О симметризуемых матрицах, Успехи матем. наук, 6:3 (43), 1951, 153—156.

105. Фаддеев Д. К., О преобразовании векового уравнения матрицы, Л. Труды Ин-та инж. пром. строит., 4, 1937, 78—86.

106. Хлодовский И. Н., К теории общего случая преобразования векового уравнения методом академика А. Н. Крылова, ИАН, сер. физ.-мат. о-ва, 1933, 1077—1102.

107. Хуа Ло-кен (華羅庚), а) Геометрия симметрических матриц над полем действительных чисел, ДАН, 53, 1946, I, 99—102; II, 199—200.

б) Автоморфизмы действительной симплектической группы, ДАН, 53, 1946, 307—310.

108. Цейтлин М. Л., Применение матричного исчисления к синтезу релейно-контактных схем, ДАН, 86, 1952, 525—528.

109. Шварцман А. П., О матрицах Грина самосопряженных конечно-разностных операторов, Труды Одесского гос. ун-та, Математика, т. III, 1941, 35—77.

110. Шиффнер Л. М., а) Разложение интегралов системы дифференциальных уравнений с правильными особыми точками в ряды по степеням элементов дифференциальных подстановок, Труды физ.-мат. ин-та. им. Стеклова, 9, 1935, 235—266.

б) О степени матрицы, Матем. сб., 42:3, 1935, 385—394.

111. Шрейдер Ю. А., Решение систем линейных совместных алгебраических уравнений, ДАН, 76, 651—655.

112. Штаерман И. Я., Новый метод решения некоторых алгебраических уравнений, которые имеют применения в математической физике и технике, Киев, Журн. ин-та матем. АН УССР, 1, 1934, 83—89; 4 (1934), 9—20.

113. Штаерман И. Я. и Ахиезер Н. И., К теории квадратичных форм, Киев, Изв. политехн. с.-х. ин-та, 19, 1934, 116—123.

114. Шура-Бура М. Р., Оценка ошибок при численном обращении матриц высокого порядка, Успехи, матем. наук, 6:4 (44), 1951, 121—150.

115. Якубович В. А., Некоторые критерии приводимости системы дифференциальных уравнений, ДАН, 66, 1949, 577—580.

116. Aitken A. C., Studies in practical mathematics. The evaluation with applications of a certain triple product matrix, Proc. Roy. Soc., Edinbourgh, 57, 1936—1937.

117. Baker H. F., On the integration of linear differential equations, Proc. Lond. Math. Soc., 35, 1903, 333—378.

118. Barankin E. W., Bounds for characteristic roots of a matrix, Bull. Am. Math. Soc., 51, 1945, 767—770.

119. Birkhoff G. D., Equivalent singular points of ordinary linear differential equations, Math. Annalen, 74, 1913, 134—139.

120. Birkhoff Garrett, On product integration, Journ. of Math. and phys., т. XVI, 1937, 104—132.

121. Brauer A., Limits for the characteristic roots of a matrix, Duke Math. J., 13, 1946, 387—395; II, 14, 1947, 21—26; III, 15, 1948, 871—877; IV, V, 19, 1952, 73—91, 553—562.

122. Cayley A., A memoire on the theory of matrices, London, Phil. Trans., 148, 1857, 17—37, Coll. Works, 2, 475—496.

123. Collatz L., Einschließungssatz für die characteristischen Zahlen von Matrizen, Math. Zeitschr., **48**, 1942, 221—226.
124. Fan Ky, On a theorem of Weyl concerning eigenvalues of linear transformations, Proc. Nat. Acad. Sc., I, **35**, 1949, 652—655; II, **36**, 1950, 31—35.
125. Frobenius G., a) Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen, J. reine und angew. Math., **84**, 1877, 1—63.
b) Ueber die cogredienten Transformationen der bilinearen Formen, Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Phys.-math. Klasse, Berlin, 1896, 7—16.
c) Ueber die vertauschbare Matrizen, ibidem, 1896, 601—604.
d) Ueber Matrizen aus positiven Elementen, ibidem, 1908, 471—476; 1909, 514—518.
e) Ueber Matrizen aus nicht negativen Elementen, ibidem, 1912, 456—477.
f) Ueber das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen, ibidem, 1894, 241—256; 407—431.
126. Hoteling H., Some new methods in matrix calculation, Ann. Math. Stat., **14**, № 1, 1943.
127. Hua Loo-Keng (華羅庚), a) On the theory of automorphic functions of a matrix variable, Amer. J. Math., **66**, 1944, I, 470—488; II, 531—563.
b) Geometries of matrices, Trans. Amer. Math. Soc., **57**, 1945, 441—490.
c) Orthogonal classification of Hermitian matrices, Trans. Amer. Math. Soc., **59**, 1946, 508—523.
128. Hermite C., Sur le nombre des racines d'une équation algébrique comprise entre des limites données, Journal für die reine und angew. Mathematik, **52**, 1856, 39—51.
129. Hurwitz A., Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen, Teilen besitzt, Math. Ann., **46**, 1895, 273—284.
130. Ingraham M. H., On the reduction of a matrix to its rational canonical form, Bull. Amer. Math. Soc., **39**, 1933, 379—382.
131. Kowalewski G., Natürliche Normalformen linearer Transformationen. Leipz. Ber. **69**, 1917, 325—335.
132. Kraus F., Ueber konvexe Matrixfunktionen, Math. Zeitschr., **41**, 1936, 18—42.
133. Kronecher L., Algebraische Reduction der Schaaren bilinearer Formen, Sitzungsber. Akademie Berlin, 1890, 763—776.
134. Ledermann W., a) Reduction of singular pencils of matrices, Proc. Edinb. Math. Soc., сер. **2**, т. **4**, 1935, 92—105.
b) Bounds for the greatest latent root of positive matrix, Journ. of Lond. Math. Soc., **25**, 1950, 265—268.
135. Liénard et Chipart, Sur la signe de la partie réelle des racines d'une équation algébrique, J. de Math. pure et appl. (6), **10**, 1914, 291—346.
136. Löwner K., Ueber monotone Matrixfunktionen, Math. Zeitschr., **38**, 1933, 177—216.
137. Orlando L., Sul problema di Hurwitz relativo alle parti realli delle radici di un'equazione algebrica, Math. Annalen, **71**, 1911, 233—245.

138. Ostrowski A., a) Bounds for the greatest latent root of a positive matrix, Journ. of London Math. Soc., **27**, 1952, 253—256.
b) Sur quelques applications des fonctions convexes et concaves au sens de J. Schur, J. Math. pures et appl., **31**, 1952, 253—292.
139. Parodi M., Remarques sur la stabilité, C. R. Acad. Sci. Paris, **228**, 1949, 51—52, ibidem, 807—808, 1198—1200.
140. Peano G., Intégration par séries des équations differentielles linéaires, Math. Annalen, **32**, 1888, 450—456.
141. Perfect H., a) On matrices with positive elements, Quart. Journ. Math., **2**, 1951, 286—290.
b) On positive stochastic matrices with real characteristic roots, Proc. Cambridge Phil. Soc., **48**, 1952, 271—276.
142. Perron O., a) Jacobischer Kettenbruchalgorithmus, Math. Annalen, **64**, 1907, 1—76.
b) Ueber Matrizen, ibidem, **64**, 1907, 248—263.
143. Phillips H. B., Funktions of matrices, Amer. J. Math., **41**, 1919, 266—278.
144. Rasch G., Zur Theorie und Anwendung des Produktintegrals, J. für die reine und angew. Math., **171**, 1934, 65—119.
145. Schoenberg J., a) Ueber variationsvermindernde lineare Transformationen, Math. Zeitschr., **32**, 1930, 321—328.
b) Zur Abzählung der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen, Math. Zeitschr., 38, 1933, 546.
146. Siegel C. L., Symplectic Geometry, Amer. J. Math., **65**, 1943, 1—86.
147. Stenzel H., Ueber die Darstellbarkeit einer Matrix als Produkt von zwei symmetrischen Matrizen, Math. Zeitschr., **15**, 1922.
148. Turnbull H. W., On the reduction of singular matrix pencils, Proc. Edinbourgh Math. Soc., сер. 2, т. 4, 1935, 67—76.
149. Volterra V., Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari, Mem. Soc. Ital. Sci., (3), 6, 1887, 1—104; (3), 12, 1902, 3—68.
150. Weierstrass K., Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen, Monatsh. Akad. Wissenschaft, Berlin, 1867, 310—338.
151. Wellstein J., Ueber symmetrische, alternierende und orthogonale Normalformen von Matrizen, J. für die reine und angew. Math., 163, 1930, 166—182.
152. Weyl H., Inequalities between the two kinds of eigenvalues of a linear transformation, Proc. Nat. Acad. Sc., **35**, 1949, 408—411.
153. Wielandt H., Unzerlegbare, nicht negative Matrizen, Math. Zeitschr., **52**, 1950, 642—648.

上卷目錄

下 卷 目 錄

第二部分　特殊問題與應用

矩 陣 論

第二部分　特殊問題與應用

第十一章　複對稱，反對稱與正交矩陣

在第九章中與歐幾里得空間內線性運算子的研究相結合的已經討論過實對稱，反對稱與正交矩陣，亦即爲次諸關係所確定的實方陣：

$$S'=S,\quad K'=-K,\quad O'=O^{-1}$$

（此處 ' 表示變矩陣爲其轉置矩陣）。已經說明白，在複數域中所有這些矩陣都祇有線性初級因子且曾對這些矩陣建立法式，亦即"最簡單的"實對稱，反對稱與正交矩陣，實正交相似於所討論的類型中任意矩陣。

本章從事於複對稱，反對稱與正交矩陣的研究。要說清楚，這些矩陣有怎樣的初級因子且對於他們來建立法式。這些法式比起對應的實矩陣的法式有顯著的更複雜的結構。首先在第一節中，在複正交，U–矩陣與實對稱，反對稱，正交矩陣之間，建立一些有趣味的關係。

§1.　關於複正交矩陣與 U–矩陣的一些公式

從次引開始。

引 1❶. 如果矩陣 G 同時是安密達與正交的 $(G'=\bar{G}=G^{-1})$，那末他可以表爲次之形狀

$$G=Ie^{iK},\tag{1}$$

其中 I 爲實對稱聯么矩陣，而 K 是與 I 可易的實反對稱矩陣：

❶ [60b]（方括號中的數字指上卷所附文獻中參考書的編號，以下同此），223—225 頁。

$$I=\bar{I}=I',\quad I^2=E,\quad K=\overline{K}=-K'\text{。}\tag{2}$$

2. 如果補充這樣一個條件，G 是一個恆正的安密達矩陣❶，那末在(1)式中 $I=E$ 因而有：

$$G=e^{iK}\text{。}\tag{3}$$

證明 1. 設

$$G=S+iT,\tag{4}$$

其中 S 與 T 爲實矩陣。那末

$$\bar{G}=S-iT,\quad G'=S'+iT'\text{。}\tag{5}$$

故由等式 $\bar{G}=G'$ 推得：$S=S'$，$T=-T'$，亦卽 S 是對稱矩陣而 T 是一個反對稱矩陣。

再者，在複數等式 $G\bar{G}=E$ 中換 G 與 $\bar{G}$ 以其表示式(4)與(5)且分解爲兩個實數等式，得出：

$$S^2+T'^2=E,\quad ST=TS\text{。}\tag{6}$$

這裏面的第二個等式說明了 S 與 T 是可易的。

根據第九章（§ 15 末尾）的定理 12'，可以用同一實正交變換化可易的規範矩陣 S 與 T 爲準對角形矩陣。故有❷

$$S=O\{s_1,s_1,s_2,s_2,\cdots,s_q,s_q,s_{2q+1},\cdots,s_n\}O^{-1},$$

$$(O=\bar{O}=O'^{-1})\tag{7}$$

$$T=O\left\{\begin{Vmatrix}0&t_1\\-t_1&0\end{Vmatrix},\begin{Vmatrix}0&t_2\\-t_2&0\end{Vmatrix},\cdots,\begin{Vmatrix}0&t_q\\-t_q&0\end{Vmatrix},0,\cdots,0\right\}O^{-1}$$

（數 s_i 與 t_i 都是實數）。因此

$$G=S+iT=O\left\{\begin{Vmatrix}s_1&it_1\\-it_1&s_1\end{Vmatrix},\begin{Vmatrix}s_2&it_2\\-it_2&s_2\end{Vmatrix},\cdots,\begin{Vmatrix}s_q&it_q\\-it_q&s_q\end{Vmatrix},\right.$$

$$\left.s_{2q+1},\cdots,s_n\right\}O^{-1}\text{。}\tag{8}$$

❶ 是卽 G 爲恆正安密達型的係數矩陣(參考第十章，§ 9)。

❷ 參考第九章(§ 15 末尾)定理 12' 的註。

另一方面，在(6)的第一式中換 S 與 T 以其表示式(7)，我們得出：

$$s_1^2-t_1^2=1,\ s_2^2-t_2^2=1,\ \cdots,\ s_q^2-t_q^2=1,\ s_{2q+1}=\pm1,\ \cdots,\ s_n=\pm1。\quad (9)$$

現在不難證明，在 $s^2-t^2=1$ 時，$\begin{Vmatrix} s & it \\ -it & s \end{Vmatrix}$ 形的矩陣常可表爲形狀

$$\begin{Vmatrix} s & it \\ -it & s \end{Vmatrix}=\varepsilon e^{i\begin{Vmatrix} 0 & \varphi \\ -\varphi & 0 \end{Vmatrix}},$$

其中　$s=\mathrm{ch}\,\varphi,\quad \varepsilon t=\mathrm{sh}\,\varphi,\quad \varepsilon=$符號 s。

故由(8)與(9)，我們得出：

$$G=O\{\pm e^{i\begin{Vmatrix} 0 & \varphi_1 \\ -\varphi_1 & 0 \end{Vmatrix}},\ \pm e^{i\begin{Vmatrix} 0 & \varphi_2 \\ -\varphi_2 & 0 \end{Vmatrix}},\ \cdots,\ \pm e^{i\begin{Vmatrix} 0 & \varphi_q \\ -\varphi_q & 0 \end{Vmatrix}},$$
$$\pm1,\ \cdots,\ \pm1\}O^{-1},\quad (10)$$

亦卽　$$G=Ie^{iK},$$

其中

$$\left.\begin{aligned} I&=O\{\pm1,\ \pm1,\ \cdots,\ \pm1\}O^{-1}, \\ K&=O\left\{\begin{Vmatrix} 0 & \varphi_1 \\ -\varphi_1 & 0 \end{Vmatrix},\ \cdots,\ \begin{Vmatrix} 0 & \varphi_q \\ -\varphi_q & 0 \end{Vmatrix},\ 0,\ \cdots,\ 0\right\}O^{-1} \end{aligned}\right\}\quad (11)$$

且有　$$IK=KI。$$

由(11)推得等式(2)。

2. 如果補充一個條件，已知 G 是恆正安密達矩陣，那末可以斷定，矩陣 G 的所有特徵數都是正的（第九章，§ 11，定理 7）。但由式(10)知這些特徵數爲

$\pm e^{\varphi_1},\ \pm e^{-\varphi_1},\ \pm e^{\varphi_2},\ \pm e^{-\varphi_2},\ \cdots,\ \pm e^{\varphi_q},\ \pm e^{-\varphi_q},\ \pm1,\ \cdots,\ \pm1$ [此處的符號對應於(10)式中符號]。

故在(10)式與(11)式中所有有 $\pm$ 號的地方都祇保持 $+$ 號。因此，

$$I=O\{1,\ 1,\ \cdots,\ 1\}O^{-1}=E,$$

這就是所要證明的結果。

引已完全證明。

利用引可以證明次之定理：

定理 1. 複正交矩陣 O 常可表爲次之形狀

$$O=Re^{iK},\tag{12}$$

其中 R 爲實正交矩陣，而 K 爲實反對稱矩陣

$$R=\bar{R}=R'^{-1},\quad K=\bar{K}=-K'。\tag{13}$$

證明 我們假設(12)式成立。那末

$$O^*=\bar{O}'=e^{iK}R',$$

故有

$$O^*O=e^{iK}R'Re^{iK}=e^{2iK}。$$

由前面的引知所求的實反對稱矩陣 K 可由次之等式定出：

$$O^*O=e^{2iK},\tag{14}$$

因爲矩陣 O^*O 是正交的恆正安密達矩陣。從(14)式定出矩陣 K 以後，我們從(12)式求得 R：

$$R=Oe^{-iK}。\tag{15}$$

那末

$$R^*R=e^{-iK}O^*Oe^{-iK}=E,$$

亦卽 R 是一個 U-矩陣。另一方面，由(15)知矩陣 R 是兩個正交矩陣的乘積，故爲一個正交矩陣：$R'R=E$。這樣一來，R 同時是正交矩陣與 U-矩陣，因而是實正交的。(15)式可以寫爲(12)的形狀。

定理已經證明❶。

現在來建立次之引。

引 2. 如果矩陣 D 同時是一個對稱矩陣與 U-矩陣 $(D=D'=\bar{D}^{-1})$，那末他常可表爲次之形狀

$$D=e^{iS},\tag{16}$$

其中 S 是一個實對稱矩陣 $(S=\bar{S}=S')$。

證明 設

❶ 公式(12)，有如複矩陣的極分解式[對應於第九章，§12 的公式(87)與(88)]，與對於準簡單的複李羣的有向譜建立已知表示的重要卡當定理有密切關係[60B]，232—233。

$$D=U+iV \quad (U=\overline{U}, V=\overline{V})。 \tag{17}$$

那末 $$\overline{D}=U-iV, \quad D'=U'+iV'。$$

複數等式 $D=D'$ 分裂爲兩個實數等式:

$$U=U', \quad V=V'。$$

這樣一來, U 與 V 都是實對稱矩陣。

等式 $D\overline{D}=E$ 推得:

$$U^2+V^2=E, \quad UV=VU。 \tag{18}$$

根據這裏面的第二個公式知矩陣 U 與 V 是可易的。對之應用第九章(§15 末尾)的定理 12′(與其註),我們得出:

$$U=O\{s_1, s_2, \cdots, s_n\}O^{-1}, \quad V=O\{t_1, t_2, \cdots, t_n\}O^{-1}。 \tag{19}$$

此處 s_k 與 $t_k (k=1, 2, \cdots, n)$ 都是實數。現在等式(18)的第一個式子給予:

$$s_k^2+t_k^2=1 \quad (k=1, 2, \cdots, n)。$$

故有這樣的實數 φ_k $(k=1, 2, \cdots, n)$ 存在,使得

$$s_k=\cos\varphi_k, \quad t_k=\sin\varphi_k \quad (k=1, 2, \cdots, n)。$$

在(19)中換 s_k 與 t_k 以這些表示式且應用(17),我們求得:

$$D=O\{e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, \cdots, e^{i\varphi_n}\}O^{-1}=e^{iS},$$

其中

$$S=O\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n\}O^{-1}。 \tag{20}$$

由(20)得出: $S=\overline{S}=S'$。

引已證明。

應用這一個引,我們來證明次之定理:

定理 2. U-矩陣 U 常可表爲次之形狀

$$U=Re^{iS}, \tag{21}$$

其中 R 是實正交矩陣,而 S 是一個實對稱矩陣:

$$R=\overline{R}=R'^{-1}, \quad S=\overline{S}=S'。 \tag{22}$$

證明 從(21)式得出:

$$U' = e^{iS}R'。 \tag{23}$$

逐項乘出(21)與(23)，由(22)我們得出：

$$U'U = e^{iS}R'Re^{iS} = e^{2iS}。$$

根據引2實對稱矩陣 S 可以由次之等式定出：

$$U'U = e^{2iS}, \tag{24}$$

因為矩陣 $U'U$ 是一個對稱 U–矩陣。決定矩陣 S 之後，我們用次之等式來定出矩陣 R：

$$R = Ue^{-iS}。 \tag{25}$$

那末

$$R' = e^{-iS}U', \tag{26}$$

因而由(24)，(25)與(26)推得：

$$R'R = e^{-iS}U'Ue^{-iS} = E,$$

亦即 R 是一個正交矩陣。

另一方面，根據(25)，R 是兩個 U–矩陣的乘積，故知 R 亦是一個 U–矩陣。因為 R 同時是正交矩陣與 U–矩陣，所以 R 是一個實矩陣。(25)式可以寫為(21)的形狀。

定理已經證明。

§2. 複矩陣的極分解式

我們來證明次之定理：

定理 3. 如果 $A = \| a_{ik} \|_1^n$ 是元素為複數的滿秩矩陣，那末

$$A = SO \tag{27}$$

與

$$A = O_1S_1, \tag{28}$$

其中 S 與 S_1 為複對稱矩陣，而 O 與 O_1 為複正交矩陣。而且

$$S = \sqrt{AA'} = f(AA'), \quad S_1 = \sqrt{A'A} = f_1(A'A),$$

其 $f(\lambda)$，$f_1(\lambda)$ 為 λ 的多項式。

在分解式(27)中(在分解式(28)中)，因子 S 與 O (S_1 與 O_1) 彼此可易的充分必要條件是矩陣 A 與 A' 彼此可易。

證明　祇要建立分解式(27)就已足夠，因為應用這個分解式於矩陣 A'，經過轉置就得出分解式(28)。

如果(27)式成立，那末

$$A=SO,\quad A'=O^{-1}S$$

故有

$$AA'=S^2。\tag{29}$$

反之，因為 AA' 是滿秩矩陣 ($|AA'|=|A|^2\neq 0$)，所以函數 $\sqrt{\lambda}$ 確定於這一矩陣的影譜上❶，故有這樣的內插多項式 $f(\lambda)$ 存在，使得

$$\sqrt{AA'}=f(AA')。\tag{30}$$

以

$$S=\sqrt{AA'}$$

記對稱矩陣(30)。那末(29)式成立，因而 $|S|\neq 0$。由等式(27)定出矩陣 O:

$$O=S^{-1}A,$$

容易驗證這個矩陣是正交的。這樣一來，分解式(27)已經得出。

如果在分解式(27)中因子 S 與 O 彼此可易，那末矩陣

$$A=SO \quad 與 \quad A'=O^{-1}S$$

亦彼此可易，因為

$$AA'=S^2,\quad A'A=O^{-1}S^2O。$$

反之，如果 $AA'=A'A$，那末

$$S^2=O^{-1}S^2O,$$

亦即矩陣 O 與 $S^2=AA'$ 可易。故矩陣 O 與矩陣 $S=f(AA')$ 可易。

這樣一來，定理已經完全證明。

我們應用極分解式來證明次之定理：

❶ 參考第五章，§1。我們取函數 $\sqrt{\lambda}$ 為在一個單連區域內的單值分支，這一區域含有矩陣 AA' 的全部特徵數而不含數零。

定理 4. 如果兩個複對稱的，或反對稱的，或正交的矩陣相似

$$B=T^{-1}AT, \tag{31}$$

那末這兩個矩陣是正交相似的，亦即有這樣的正交矩陣 O 存在，使得

$$B=O^{-1}AO. \tag{32}$$

證明 由定理的條件知有這樣的多項式 $q(\lambda)$ 存在，使得

$$A'=q(A),\quad B'=q(B)。\tag{33}$$

對於對稱矩陣這個多項式 $q(\lambda)$ 恆等於 λ，而對於反對稱矩陣這個多項式恆等於 $-\lambda$。如果 A 與 B 是正交矩陣，那末 $q(\lambda)$ 是在矩陣 A 與 B 的總影譜上對於 $\frac{1}{\lambda}$ 的內插多項式。

應用等式(33)，完全與第九章中(§ 14)關於實矩陣的定理 10 的證明相類似的，得出所予定理的證明。由(31)得出：

$$q(B)=T^{-1}q(A)T$$

故由(33)，得出：
$$B'=T^{-1}A'T。$$

因此，有
$$B=T'AT'^{-1}。$$

比較這個等式與(31)式，容易求得：

$$TT'A=ATT'。\tag{34}$$

對滿秩矩陣 T 取極分解式

$$T=SO\quad (S=S'=f(TT'),\ O'=O^{-1})。$$

因為根據(34)矩陣 TT' 與 A 可易，所以矩陣 $S=f(TT')$ 亦與 A 可易。故在(31)中代 T 以其表示式 SO，我們有：

$$B=O^{-1}S^{-1}ASO=O^{-1}AO。$$

定理已經證明。

§ 3. 複對稱矩陣的法式

證明次之定理。

定理 5. 有任何事先給予的初級因子的複對稱矩陣存在[1]。

[1] 關於本節以及下面§§ 4 與 5 的內容，可參考 [151]。

證明　討論 n 級矩陣 H，在其第一上對角線上的元素全等於 1，而所有其餘元素全等於零。我們來證明，有對稱矩陣 S 存在與矩陣 H 相似：

$$S=THT^{-1}。\tag{35}$$

變換矩陣 T 可從次之條件出發來求得：

$$S=THT^{-1}=S'=T'^{-1}H'T'。$$

這個條件可寫爲：

$$VH=H'V,\tag{36}$$

其中 V 爲對稱矩陣，與 T 有次之等式關係

$$T'T=-2iV❶。\tag{37}$$

回想一下矩陣 H 與 $F=H'$ 的性質（第一章，§3，1），我們求得矩陣方程的任一解 V 有次之形狀：

$$V=\begin{Vmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & a_0 \\ \cdot & & & & & \cdot & a_0 & a_1 \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ a_0 & a_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1} \end{Vmatrix},\tag{38}$$

其中 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 爲任意複數。

因爲我們祇要找到一個變換矩陣 T 就已足夠，故在這個公式中命 $a_0=1$，$a_1=\cdots=a_{n-1}=0$，即以次之等式來界說矩陣 V❷：

$$V=\begin{Vmatrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \end{Vmatrix}。\tag{39}$$

此外，變換矩陣 T 將從矩陣的對稱形狀

$$T=T'\tag{40}$$

❶ 爲了簡化以後的公式，此處引進因子 $-2i$ 較爲方便。

❷ 矩陣 V 同時是對稱的與正交的。

來得出。此時對於 T 的方程(37) 可寫為：

$$T^2=-2iV。\tag{41}$$

現在未知矩陣 T 可用 V 的多項式形狀來求出。因為 $V^2=E$，可取一次多項式來作為這樣的多項式：

$$T=\alpha E+\beta V。$$

從方程(41)，考慮到等式 $V^2=E$，我們得出：

$$\alpha^2+\beta^2=0,\quad 2\alpha\beta=-2i。$$

我們取 $\alpha=1$，$\beta=-i$ 就能適合這些關係式。故有：

$$T=E-iV。\tag{42}$$

T 是一個滿秩對稱矩陣❶。同時由(41)，得：$T^{-1}=\frac{1}{2}iV^{-1}T=$ $=\frac{1}{2}iVT$，亦即

$$T^{-1}=\frac{1}{2}(E+iV)。\tag{43}$$

這樣一來，可由次之等式定出矩陣 H 的對稱式 S：

$$S=THT^{-1}=\frac{1}{2}(E-iV)H(E+iV),\ V=\begin{Vmatrix}0&\cdot&\cdot&\cdot&0&1\\0&\cdot&\cdot&\cdot&1&0\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\1&\cdot&\cdot&\cdot&0&0\end{Vmatrix}。\tag{44}$$

因為矩陣 H 適合方程(36)且有 $V^2=E$，所以等式(44)還可以寫為：

$$2S=(H+H')+i(HV-VH)=$$

$$=\begin{Vmatrix}0&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&0\\1&\cdot&\cdot&&&&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&&&\cdot\\\cdot&&\cdot&\cdot&\cdot&&\cdot\\\cdot&&&\cdot&\cdot&\cdot&1\\0&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&0\end{Vmatrix}+i\begin{Vmatrix}0&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&1&0\\\cdot&&&&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&&&\cdot&\cdot&\cdot&-1\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&&\cdot\\1&\cdot&\cdot&&&&\cdot\\0&-1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&0\end{Vmatrix}。\tag{45}$$

❶ 矩陣 T 的滿秩性可從(41)式得出，因為 V 是一個滿秩矩陣。

公式(45)定出矩陣 H 的對稱式 S。

以後，如果 n 是矩陣 H 的階，$H=H^{(n)}$，那末對應的矩陣 T，V 與 S 還得記爲：$T^{(n)}$，$V^{(n)}$ 與 $S^{(n)}$。

設給予任何初級因子：

$$(\lambda-\lambda_1)^{p_1},\ (\lambda-\lambda_2)^{p_2},\ \cdots,\ (\lambda-\lambda_u)^{p_u}。\tag{46}$$

建立對應的若唐矩陣

$$J=\{\lambda_1E^{(p_1)}+H^{(p_1)},\ \lambda_2E^{(p_2)}+H^{(p_2)},\ \cdots,\ \lambda_uE^{(p_u)}+H^{(p_u)}\}。$$

對於每一個矩陣 $H^{(p_j)}$ 引進對應的對稱式 $S^{(p_j)}$。由

$$S^{(p_j)}=T^{(p_j)}H^{(p_j)}[T^{(p_j)}]^{-1}\quad(j=1,\,2,\,\cdots,\,u)$$

得出：

$$\lambda_jE^{(p_j)}+S^{(p_j)}=T^{(p_j)}[\lambda_jE^{(p_j)}+H^{(p_j)}][T^{(p_j)}]^{-1}。$$

故如取：

$$\tilde{S}=\{\lambda_1E^{(p_1)}+S^{(p_1)},\ \lambda_2E^{(p_2)}+S^{(p_2)},\ \cdots,\ \lambda_uE^{(p_u)}+S^{(p_u)}\},\tag{47}$$

$$T=\{T^{(p_1)},\ T^{(p_2)},\ \cdots,\ T^{(p_u)}\},\tag{48}$$

我們就有：

$$\tilde{S}=TJT^{-1}。$$

$\tilde{S}$ 是若唐矩陣 J 的對稱式。矩陣 $\tilde{S}$ 與矩陣 J 相似且與矩陣 J 有相同的初級因子(46)。定理已經證明。

推論 1. 任意複方陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 相似於對稱矩陣。

應用定理 4，我們得出：

推論 2. 任意複對稱矩陣 $S=\|s_{ik}\|_1^n$ 正交相似於有法式 $\tilde{S}$ 的對稱矩陣，亦即有這樣的正交矩陣 O 存在，使得

$$S=O\tilde{S}O^{-1}。\tag{49}$$

複對稱矩陣的法式有準對角形

$$\tilde{S}=\{\lambda_1E^{(p_1)}+S^{(p_1)},\ \lambda_2E^{(p_2)}+S^{(p_2)},\ \cdots,\ \lambda_uE^{(p_u)}+S^{(p_u)}\},\tag{50}$$

其中子塊 $S^{(p)}$ 是這樣定出的[參考(44)，(45)]：

$$S=\frac{1}{2}[E^{(p)}-iV^{(p)}]H^{(p)}[E^{(p)}+iV^{(p)}]=$$

$$=\frac{1}{2}[H^{(p)}+H^{(p)\prime}+i(H^{(p)}V^{(p)}-V^{(p)}H^{(p)})]=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\begin{Vmatrix}0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0\\ 1 & \cdot & \cdot & & & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot\\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & & & \cdot & \cdot & 1\\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0\end{Vmatrix}+i\begin{Vmatrix}0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0\\ \cdot & & & \cdot & \cdot & -1\\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot\\ 1 & \cdot & \cdot & & & \cdot\\ 0 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0\end{Vmatrix}\right\}\tag{51}$$

§4. 複反對稱矩陣的法式

先要弄清楚對於反對稱矩陣的初級因子，有些什麼限制。這是奠基於次之定理的：

定理 6. 反對稱矩陣的秩永遠是一個偶數。

證明　設反對稱矩陣 K 有秩 r，那末在矩陣 K 的行中有 r 個序數爲 $i_1, i_2, \cdots, i_r$ 的行是線性無關的。因爲矩陣 K 的列可以從對應的行乘上因子 -1 來得出，所以矩陣 K 的任一列都是序數爲 $i_1, i_2, \cdots, i_r$ 諸列的線性組合。故矩陣 K 的任何一個 r 級子式可以表爲形狀

$$\alpha K\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_r\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r\end{pmatrix},$$

其中 α 是一個數。

故知
$$K\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_r\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r\end{pmatrix}\neq 0。$$

但是奇數級反對稱行列式常等於零，故知 r 是一個偶數。定理已經證明。

定理 7. 1° 如果 λ_0 是反對稱矩陣 K 的特徵數且有對應的初級因子

$$(\lambda-\lambda_0)^{f_1},\ (\lambda-\lambda_0)^{f_2},\ \cdots,\ (\lambda-\lambda_0)^{f_t},$$

那末 λ_0，這個矩陣 K 的特徵數，亦對應於矩陣 K 中同方次的初級因子

$$(\lambda+\lambda_0)^{f_1},\ (\lambda+\lambda_0)^{f_2},\ \cdots,\ (\lambda+\lambda_0)^{f_t}\ 。$$

2° 如果數零是反對稱矩陣 K 的特徵數❶，那末矩陣 K 中對應於特徵數零的初級因子組中所有偶數方次初級因子都重復偶數次。

證明　1° 轉置矩陣 K' 與矩陣 K 有相同的初級因子。但 $K'=-K$，而矩陣 $-K$ 的初級因子都可從矩陣 K 的初級因子來得出。如果 K 的全部特徵數為 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$，那末 $-K$ 的特徵數為 $-\lambda_1,-\lambda_2,\cdots$，因而得出定理的第一部分。

2° 設矩陣 K 的特徵數零對應於 δ_1 個 λ 形初級因子，δ_2 個 λ^2 形初級因子，諸如此類。一般的我們以 δ_p 記 λ^p 形初級因子的個數 ($p=1,2,\cdots$)。我們來證明 $\delta_2,\delta_4,\cdots$ 都是偶數。

矩陣 K 的腑等於對應於特徵數零的線性無關特徵向量的個數，亦即是形為 $\lambda,\lambda^2,\lambda^3,\cdots$ 的初級因子的個數。故有

$$d=\delta_1+\delta_2+\delta_3+\cdots \tag{52}$$

因為由定理 6 矩陣 K 的秩 r 是一個偶數，而 $d=n-r$，故數 d 與數 n 有相同的奇偶性。同樣的論斷對於矩陣 $K^3,K^5,\cdots$ 的腑亦是成立的，因為反對稱矩陣的奇數次方仍然是一個反對稱矩陣。因此，數 $d_1=d,d_3,d_5,\cdots$ 都有相同的奇偶性。

在另一方面，把矩陣 K 乘到 m 次後，這個矩陣的每一個初級因子 λ^p 當 $p<m$ 時裂分為 p 個初級因子（一次的），而當 $p\geq m$ 時裂分為 m 個初級因子❷。故矩陣 $K,K^3,\cdots$ 中形為 λ 方次的初級因子的個數為次諸公式所確定❸：

---

❶ 是即如果 $|K|=0$。當 n 為奇數時常有 $|K|=0$。

❷ 參考第六章，§7，定理 9。

❸ 這些公式（不用述及定理 9）已經在第六章中得出〔參考第六章，§7，公式(49)〕。

$$\left.\begin{aligned} d_3 &= \delta_1 + 2\delta_2 + 3(\delta_3 + \delta_4 + \cdots), \\ d_5 &= \delta_1 + 2\delta_2 + 3\delta_3 + 4\delta_4 + 5(\delta_5 + \delta_6 + \cdots), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

比較(52)與(53)式且注意 $d_1 = d, d_3, d_5, \cdots$ 都有相同的奇偶性，易知 $\delta_2, \delta_4, \cdots$ 都是偶數。

定理已經完全證明。

定理7有次之逆定理：

定理8. 預先任意給予適合上面定理中限制1°，2°的一些初級因子，那末一定有反對稱矩陣存在，以這些初級因子為其全部初級因子。

證明 首先求出 $2p$ 級準對角形矩陣

$$J_{\lambda_0}^{(pp)} = \{\lambda_0 E + H, \ -\lambda_0 E - H\} \tag{54}$$

的反對稱式，他有兩個初級因子 $(\lambda - \lambda_0)^p$ 與 $(\lambda + \lambda_0)^p$。此處 $E = E^{(p)}$，$H = H^{(p)}$。

我們要找到這樣的變換矩陣 T，使得矩陣

$$TJ_{\lambda_0}^{(pp)}T^{-1}$$

是反對稱的，亦卽有次之等式：

$$TJ_{\lambda_0}^{(pp)}T^{-1} + T'^{-1}[J_{\lambda_0}^{(pp)}]'T' = 0$$

或

$$WJ_{\lambda_0}^{(pp)} + [J_{\lambda_0}^{(pp)}]'W = 0, \tag{55}$$

其中 W 是一個對稱矩陣，他與矩陣 T 有等式關係[1]：

$$TT' = -2iW。 \tag{56}$$

裂分矩陣 W 為四個方塊，每一個塊都是 p 級的：

$$W = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}。$$

那末(55)可以寫為：

$$\begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_0 E + H & 0 \\ 0 & -\lambda_0 E - H \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} \lambda_0 E + H' & 0 \\ 0 & -\lambda_0 E - H' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} = 0. \tag{57}$$

---

[1] 參考上節(§3)的第二個足註。

在矩陣方程(57)的左節對塊矩陣施行運算，我們可以換這一方程爲含有四個方程的矩陣方程組：

$$\left.\begin{array}{ll}(1)\ H'W_{11}+W_{11}(2\lambda_0E+H)=0, & (2)\ H'W_{12}-W_{12}H=0,\\ (3)\ H'W_{21}-W_{21}H=0. & (4)\ H'W_{22}+W_{22}(2\lambda_0E+H)=0。\end{array}\right\}\quad(58)$$

如果 A 與 B 是沒有公共特徵數的方陣，那末方程 $AX-XB=0$ 祇有零解 $X=0$❶。故(58)中第一個與第四個方程給予：$W_{11}=W_{22}=0$❷。至於這些方程的第二個方程，有如定理 5 的證明中所得出的結果，取

$$W_{12}=V=\left\|\begin{matrix}0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1\\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0\end{matrix}\right\|,\tag{59}$$

這個方程就能適合，因爲[參考(36)]

$$VH-H'V=0。$$

從矩陣 W 與 V 的對稱性，知：

$$W_{21}=W'_{12}=V。$$

此時方程(3)自動的就能適合。

這樣一來，

$$W=\begin{pmatrix}0 & V\\ V & 0\end{pmatrix}=V^{(2p)}。\tag{60}$$

有如 §3,(42)，如果取

$$T=E^{(2p)}-iV^{(2p)},\tag{61}$$

方程(56)就能適合。此時

$$T^{-1}=\frac{1}{2}\left(E^{(2p)}+iV^{(2p)}\right)。\tag{62}$$

因此，所找的反對稱矩陣可以由次式求出：

❶ 參考第八章，§1。

❷ 當 $\lambda_0\neq0$ 時，方程(1)與(4)，除零解外沒有其他解。當 $\lambda_0=0$ 時，有其他解存在，但是我們祇選取零解。

$$K_{\lambda_0}^{(pp)}=\frac{1}{2}[E^{(2p)}-iV^{(2p)}]J_{\lambda_0}^{(pp)}[E^{(2p)}+iV^{(2p)}]=$$

$$=\frac{1}{2}[J_{\lambda_0}^{(pp)}-J_{\lambda_0}^{(pp)'}+i(J_{\lambda_0}^{(pp)}V^{(2p)}-V^{(2p)}J_{\lambda_0}^{(pp)})]\text{ ❶}。\qquad(63)$$

代 $J_{\lambda_0}^{(pp)}$ 與 $V^{(2p)}$ 以其在(54)與(60)中的分塊形狀，我們得出：

$$K_{\lambda_0}^{(pp)}=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}H-H' & 0\\ 0 & H'-H\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}\lambda_0E+H & 0\\ 0 & -\lambda_0E-H\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & V\\ V & 0\end{pmatrix}-\right.$$

$$\left.-i\begin{pmatrix}0 & V\\ V & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_0E+H & 0\\ 0 & -\lambda_0E-H\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}H-H' & i(2\lambda_0V+HV+VH)\\ -i(2\lambda_0V+HV+VH) & H'-H\end{pmatrix},\qquad(64)$$

亦卽

$$K_{\lambda_0}^{(pp)}=\frac{1}{2}\left\|\begin{array}{cccccc|cccccc}
0 & 1 & \cdot & \cdots & \cdot & 0 & 0 & \cdot & \cdots & \cdot & i & 2\lambda_0\\
-1 & 0 & \cdot & & & \cdot & \cdot & & & \cdot & 2\lambda_0 & i\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot\\
\cdot & & & \cdot & \cdot & 1 & i & \cdot & \cdot & & & \cdot\\
0 & \cdot & \cdots & \cdot & -1 & 0 & 2\lambda_0, & i & \cdot & \cdots & \cdot & 0\\
\hline
0 & \cdot & \cdots & \cdot & -i & -2\lambda_0 & 0 & -1 & \cdot & \cdots & \cdot & 0\\
\cdot & & & \cdot & -2\lambda_0, & -i & 1 & 0 & \cdot & & & \cdot\\
\cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
-i & \cdot & & & & \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot & -1\\
-2\lambda_0 & -i & \cdot & \cdots & \cdot & 0 & 0 & \cdot & \cdots & \cdot & 1 & 0
\end{array}\right\|。\qquad(65)$$

現在來構成祇有一個初級因子 λ^q 的 q 級反對稱矩陣 $K^{(q)}$，其中 q 爲一個奇數。顯然，所求的反對稱矩陣相似於次之矩陣

---

❶ 此處我們用及等式(55)與(60)。從這些等式得出了 $V^{(2p)}J_{\lambda_0}^{(pp)}V^{(2p)}=-J_{\lambda_0}^{(pp)'}$。

$$J^{(q)}=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdots & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & & \cdot \\ \cdot & & \ddots & \ddots & & & \cdot \\ \cdot & & & \ddots & \ddots & & \cdot \\ \cdot & & & & \ddots & -1 & 0 \\ \cdot & & & & & 0 & -1 \\ 0 & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & 0 & 0 \end{Vmatrix}。\tag{66}$$

在這個矩陣中,第一上對角線以外的元素全等於零,而在第一上對角線上的元素先有 $\frac{q-1}{2}$ 個 1 而後繼以 $\frac{q-1}{2}$ 個 -1。命

$$K^{(q)}=TJ^{(q)}T^{-1},\tag{67}$$

由反對稱條件,我們求得:

$$W_1J^{(q)}+J^{(q)\prime}W_1=0,\tag{68}$$

其中

$$T'T=-2iW_1。\tag{69}$$

直接驗證,知矩陣

$$W_1=V^q=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

適合方程(68)。應用 W_1 的這一個值,我們同從前一樣,由(69)得出:

$$T=E^{(q)}-iV^{(q)},\ T^{-1}=\frac{1}{2}[E^{(q)}+iV^{(q)}],\tag{70}$$

$$K^q=\frac{1}{2}[E^{(q)}-iV^{(q)}]J^{(q)}[E^{(q)}+iV^{(q)}]=$$

$$=\frac{1}{2}[J^{(q)}-J^{(q)\prime}+i(J^{(q)}V^{(q)}-V^{(q)}J^{(q)})]。\tag{71}$$

施行相對應的計算,我們得出:

$$2K^{(q)}=\left\|\begin{matrix}0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0\\ -1 & 0 & \cdot & & & & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot\\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot\\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & & & & \cdot & \cdot & -1\\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0\end{matrix}\right\|+i\left\|\begin{matrix}0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0\\ \cdot & & & & \cdot & \cdot & 1\\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot\\ -1 & \cdot & \cdot & & & & \cdot\\ 0 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0\end{matrix}\right\|。\tag{72}$$

設任意給了適合定理 7 的初級因子：

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda-\lambda_j)^{p_j},\ (\lambda+\lambda_j)^{p_j}\ (j=1, 2, \cdots, u),\\ \lambda^{q_k}\ (k=1, 2, \cdots, v;\ q_1, q_2, \cdots, q_v\ \text{都是奇數})。\end{array}\right\}❶ \tag{73}$$

那末反對稱準對角形矩陣

$$\tilde{K}=\{K_{\lambda_1}^{(p_1p_1)}, \cdots, K_{\lambda_u}^{(p_up_u)};\ K^{(q_1)}, \cdots, K^{(q_v)}\} \tag{74}$$

有初級因子(73)。

定理已經證明。

推論 任一複反對稱矩陣 K，正交相似於由(74)，(65)，(72)式所定出的反對稱法式 $\tilde{K}$，亦卽有這樣的(複)正交矩陣 O 存在，使得

$$K=O\tilde{K}O^{-1}。\tag{75}$$

註 如果 K 是一個實反對稱矩陣，那末他有線性初級因子（參考第九章，§13）

$\lambda-i\varphi_1, \lambda+i\varphi_1, \cdots, \lambda-i\varphi_u, \lambda+i\varphi_u, \underbrace{\lambda, \cdots, \lambda}_{v\text{個}}$ (φ_j 都是實數)。在此時，於(74)式中取所有的 $p_j=1$，所有的 $q_k=1$，我們得出實反對稱矩陣的法式

$$\tilde{K}=\left\{\left\|\begin{matrix}0 & \varphi_1\\ -\varphi_1 & 0\end{matrix}\right\|, \cdots, \left\|\begin{matrix}0 & \varphi_u\\ -\varphi_u & 0\end{matrix}\right\|, 0, \cdots, 0\right\}。$$

§5. 複正交矩陣的法式

首先要弄清楚對於正交矩陣的初級因子有些什麼限制。

---

❶ 在數 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_u$ 中可能有些等於零。此外數 u 與 v 中可能有一個等於零，亦卽在特殊的情形可能祇有一種類型的初級因子。

定理 9. 1. 如果 $\lambda_0(\lambda_0^2\neq 1)$ 是正交矩陣 O 的特徵數而且對應於這個特徵數的初級因子爲:

$$(\lambda-\lambda_0)^{f_1},\ (\lambda-\lambda_0)^{f_2},\ \cdots,\ (\lambda-\lambda_0)^{f_t},$$

那末 $\frac{1}{\lambda_0}$ 亦是矩陣 O 的特徵數而且對應於這個特徵數的初級因子,有如對於數 λ_0,爲:

$$(\lambda-\lambda_0^{-1})^{f_1},\ (\lambda-\lambda_0^{-1})^{f_2},\ \cdots,\ (\lambda-\lambda_0^{-1})^{f_t}。$$

2. 如果 $\lambda_0=\pm 1$ 是正交矩陣 O 的特徵數,那末對應於這一特徵數 λ_0 的偶數次初級因子要重復出現偶數次。

證明 1. 對於任何滿秩矩陣 O,在變 O 爲 O^{-1} 時,每一個初級因子 $(\lambda-\lambda_0)^f$ 都換爲初級因子 $(\lambda-\lambda_0^{-1})^f$❶。另一方面,矩陣 O 與 O' 常有相同的初級因子。故由正交性條件 $O'=O^{-1}$ 立刻得出定理的第一部分。

2. 我們假設數 1 是矩陣 O 的特徵數,而數 -1 不是其特徵數 $(|E-O|=0,\ |E+O|\neq 0)$。那末可應用凱萊公式(參考第九章,§14),他對於複矩陣是仍然有效的。以次之等式來界說矩陣 K:

$$K=(E-O)(E+O)^{-1}。\tag{76}$$

直接驗證,知有 $K'=-K$,亦卽 K 是一個反對稱矩陣。對 O 解出方程(76),我們求得❷:

$$O=(E-K)(E+K)^{-1}。$$

設 $f(\lambda)=\frac{1-\lambda}{1+\lambda}$,則有 $f'(\lambda)=-\frac{2}{(1+\lambda)^2}\neq 0$。故從矩陣 K 轉移到矩陣 $O=f(K)$ 時,初級因子並無裂分❸。因此在矩陣 O 的初級因子組中,$(\lambda-1)^{2p}$ 形初級因子重復出現偶數次,因爲矩陣 K 的 λ^{2p} 形初級因子是要出現偶數次的(參考定理 7)。

---

❶ 參考第六章,§7。設 $f(\lambda)=\frac{1}{\lambda}$,則有 $f'(\lambda)=-\frac{1}{\lambda^2}\neq 0$。故知,從矩陣 O 轉移到矩陣 O^{-1} 時,初級因子並無裂分(參考第六章,§7,定理 9)。

❷ 注意由(76)得出: $E+K=2(E+O)^{-1}$,因而 $|E+K|=2^n|E+O|^{-1}\neq 0$。

❸ 參考第六章,§7,定理 9。

至於正交矩陣 O 有特徵數 -1 而沒有特徵數 $+1$ 的情形，祇要討論正交矩陣 $-O$ 就立刻化為上面所討論過的情形。

轉移到最複雜的情形，矩陣 O 同時有特徵數 $+1$ 與特徵數 -1。以 $\psi(\lambda)$ 記矩陣 O 的最小多項式。應用已經證明的定理的第一部分，我們可以寫 $\psi(\lambda)$ 為次之形狀：

$$\psi(\lambda)=(\lambda-1)^{m_1}(\lambda+1)^{m_2}\prod_{j=1}^{u}(\lambda-\lambda_j)^{p_j}(\lambda-\lambda_j^{-1})^{p_j}(\lambda_j^2\neq 1;\ j=1,2,\cdots,u)。$$

討論次數 $<m$ [m 為 $\psi(\lambda)$ 的次數] 的多項式 $g(\lambda)$，且設 $g(1)=1$ 而在矩陣 O 的影譜上其餘 $m-1$ 個值都等於零。設❶：

$$P=g(O)。\tag{77}$$

我們注意，函數 $[g(\lambda)]^2$ 與 $g\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ 在矩陣 O 的影譜上與函數 $g(\lambda)$ 有相同的值。故有

$$P^2=P,\quad P'=g(O')=g(O^{-1})=P,\tag{78}$$

亦即 P 是一個對稱射影矩陣❷。

以次諸等式來界說多項式 $h(\lambda)$ 與矩陣 Q：

$$h(\lambda)=(\lambda-1)g(\lambda),\tag{79}$$

$$Q=h(O)=(O-E)P。\tag{80}$$

因為乘冪 $[h(\lambda)]^{m_1}$ 在矩陣 O 的影譜上變為零，這個乘冪可被 $\psi(\lambda)$ 所整除。故得：

$$Q^{m_1}=0,$$

亦即 Q 是一個有冪零性指標 m_1 的冪零矩陣。

---

❶ 從基本公式（參考第五章，§3，公式(17)）

$$g(A)=\sum_{k=1}^{s}[g(\lambda_k)Z_{k1}+g'(\lambda_k)Z_{k2}+\cdots],$$

得出：

$$P=Z_{11}。$$

❷ 運算子 P 稱為射影的，如果 $P^2=P$。對應的，等式 (77) 能夠成立的矩陣 P 稱為射影的矩陣。在 U-空間 R 中射影運算子 P 是這樣的一個運算子，他正射影向量 $x\in R$ 於子空間 $S=PR$ 中，亦即 $Px=x_S$，其中 $x_S\in S$ 且有 $(x-x_S)\perp S$（參考第九章，§4）。

由(80)求得❶:

$$Q' = (O' - E)P\text{。} \tag{81}$$

討論矩陣

$$R = Q(Q' + 2E)\text{。} \tag{82}$$

由(78),(80)與(81)得出:

$$R = QQ' + 2Q = (O - O')P\text{。}$$

從 R 的這一表示式,易知 R 是一個**反對稱矩陣**。

另一方面,由(82)得出:

$$R^k = Q^k\,(Q' + 2E)^k \quad (k = 1, 2, \cdots)\text{。} \tag{83}$$

但是 Q, 有如 Q', 亦是一個冪零矩陣,因而

$$|Q' + 2E| \neq 0\text{。}$$

故由(83)推知,對於任何 k, 矩陣 R^k 與 Q^k 有相同的秩。

但當 k 爲奇數時, R^k 是反對稱的,故(參考本章, §4, 定理 6)其秩爲一偶數。因此,每一個矩陣

$$Q,\ Q^3,\ Q^5,\ \cdots$$

的秩都是一個偶數。

故對矩陣 Q, 逐字重復本章 §4 定理 7 中所述的關於矩陣 K 的討論,我們可以斷定,在矩陣 Q 的初級因子中 λ^{2p} 形的初級因子要重復偶數次。但是矩陣 Q 的每一個初級因子 λ^{2p} 對應於矩陣 O 的一個初級因子 $(\lambda-1)^{2p}$, 反之亦然❷。故知在矩陣 O 的初級因子中, $(\lambda-1)^{2p}$ 形的初級因子重復偶數次。

應用已經證明的結果於矩陣 $-O$, 對於 $(\lambda+1)^{2p}$ 形的初級因子,我們得出類似的論斷。

這樣一來,定理已經完全證明。

❶ 此處所述的所有矩陣 $P, Q, Q', O' = O^{-1}$ 彼此可易且都與 O 可易,因爲他們都是 O 的函數。

❷ 因爲 $h(1) = 0, h'(1) \neq 0$, 所以從矩陣 O 轉移到矩陣 $Q = h(O)$ 時,矩陣 O 的 $(\lambda-1)^{2p}$ 形初級因子並無裂分的換爲初級因子 λ^{2p} (參考第六章, §7)。

現在來證明其逆定理。

定理 10. 任何一組次形的乘冪

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda-\lambda_j)^{p_j},\ (\lambda-\lambda_j^{-1})^{p_j}(\lambda_j\neq 0;\ j=1,2,\cdots,u),\\ (\lambda-1)^{q_1},\ (\lambda-1)^{q_2},\ \cdots,(\lambda-1)^{q_v};\\ (\lambda+1)^{t_1},\ (\lambda+1)^{t_2},\ \cdots,\ (\lambda+1)^{t_w}\\ (q_1,\cdots,q_v,t_1,\cdots,t_w\ \text{都是奇數})\end{array}\right\}\tag{84}$$

都是某一個複正交矩陣 O 的初級因子組 ❶。

證明 以 μ_j 記這樣的數，他與數 $\lambda_j(j=1,2,\cdots,u)$ 有次之等式關係：

$$\lambda_j=e^{\mu_j}\quad(j=1,2,\cdots,u)。$$

在討論中引進"標準的"反對稱矩陣（參考上節）：

$$K_{\mu_j}^{(p_jp_j)}(j=1,2,\cdots,u);\ K^{(q_1)},\cdots,K^{(q_v)};\ K^{(t_1)},\cdots,K^{(t_w)},$$

他們有對應的初級因子：

$$(\lambda-\mu_j)^{p_j},(\lambda+\mu_j)^{p_j}(j=1,2,\cdots,u);\ \lambda^{q_1},\cdots,\lambda^{q_v};\ \lambda^{t_1},\cdots,\lambda^{t_w}。$$

如果 K 是一個反對稱矩陣，那末

$$O=e^K$$

是一個正交矩陣 $(O'=e^{K'}=e^{-K}=O^{-1})$。此時矩陣 K 的每一個初級因子 $(\lambda-\mu)^p$ 對應於矩陣 O 的一個初級因子 $(\lambda-e^{\mu})^p$ ❷。

因此，準對角形矩陣

$$\tilde{O}=\{e^{K_{\mu_1}^{(p_1p_1)}},\cdots,e^{K_{\mu_u}^{(p_up_u)}};\ e^{K^{(q_1)}},\cdots,e^{K^{(q_v)}};\ -e^{K^{(t_1)}},\cdots,-e^{K^{(t_w)}}\}\tag{85}$$

是正交的且有初級因子(84)。

定理已經證明。

從定理 4, 9 與 10 推得：

推論 任意（複）正交矩陣 O 常可正交相似於正交矩陣的法式 $\tilde{O}$,

❶ 某些（或所有的）數 λ_j 可能等於 ± 1。又數 u, v, w 中的一個或兩個可能等於零。此時在矩陣 O 中就不出現對應形狀的初級因子。

❷ 這個可以這樣來得出，當 $f(\lambda)=e^{\lambda}$ 時對於任何 λ 我們都有 $f'(\lambda)=e^{\lambda}\neq 0$。

亦即有這樣的正交矩陣 O_1 存在,使得

$$O = O_1 \tilde{O} O_1^{-1}。\tag{86}$$

註　有如對於反對稱矩陣 $\tilde{K}$ 所做過的一樣,可以給出法式 $\tilde{O}$ 中對角線上子塊的具體形式❶。

❶ 參考[151]。

第十二章　奇異矩陣束

§1. 緒言

1. 本章從事於次之問題的研究:

給予元素同在數域 K 中維數同為 $m\times n$ 的四個矩陣 $A, B; A_1, B_1$。需要求出,在什麼條件之下,始能有兩個各為 m 與 n 級的滿秩方陣 P 與 Q 存在,使得同時有:

$$PAQ=A_1,\quad PBQ=B_1 \text{❶}。\tag{1}$$

在討論中引進矩陣束 $A+\lambda B$ 與 $A_1+\lambda B_1$,就可以換兩個矩陣等式(1)為一個等式:

$$P(A+\lambda B)Q=A_1+\lambda B_1。\tag{2}$$

定義 1. 兩個維數同為 $m\times n$ 的長方矩陣束 $A+\lambda B$ 與 $A_1+\lambda B_1$ 如有等式(2)的關係,其中 P 與 Q 各為 m 與 n 級的滿秩常數矩陣(亦即與 λ 無關的矩陣),我們稱此二矩陣束為嚴格相抵的❷。

按照相抵 λ-矩陣的一般定義(參考第六章,§1)矩陣束 $A+\lambda B$ 與 $A_1+\lambda B_1$ 是相抵的,如果有兩個有不為零的常數行列式的 λ-方陣 P 與 Q 存在使得等式(2)能夠成立。對於嚴格相抵性,就要補充這樣的條件:矩陣 P 與 Q 都同 λ 無關❸。

矩陣束 $A+\lambda B$ 與 $A_1+\lambda B_1$ 的相抵性判定可從 λ-矩陣的廣義相抵性判定來得出。廣義判定為矩陣束 $A+\lambda B$ 與 $A_1+\lambda B_1$ 有相同的不變因式或有相同的初級因子(參考第六章,§3)。

---

❶ 如果有這樣的矩陣 P 與 Q 存在,那末他們的元素可以在域 K 中選取。這個可以這樣來推得,等式(1)可以寫為 $PA=A_1Q^{-1}$, $PB=B_1Q^{-1}$ 的形狀,因而與係數在域 K 中關於矩陣 P 與 Q^{-1} 的元素的某一齊次線方程組等價。

❷ 參考第六章,§4。

❸ 我們把文獻中遇見的名詞"相抵束"換為名詞"嚴格相抵束"是為了使得定義 1 與第六章中關於相抵性的定義可以分清界限。

在本章中我們將建立兩個矩陣束的嚴格相抵性判定，且對於每一矩陣束要定出與他嚴格相抵的標準式。

2．所提出的問題容許很自然的幾何解釋。討論映像 $\boldsymbol{R}_n$ 於 $\boldsymbol{R}_m$ 的線性運算子束 $\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$。在這些空間中取定基底後，線性運算子束 $\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$ 對應於一個($m\times n$ 維)長方矩陣束 $A+\lambda B$；在 $\boldsymbol{R}_n$ 與 $\boldsymbol{R}_m$ 中變更基底後，矩陣束 $A+\lambda B$ 變為其嚴格相抵的矩陣束 $P(A+\lambda B)Q$，其中 P 與 Q 為 m 與 n 級滿秩方陣(參考第三章，§§ 2 與 4)。這樣一來，嚴格相抵性判定給出一類($m\times n$ 維)矩陣束 $A+\lambda B$ 的特性，這一類矩陣束是在空間 $\boldsymbol{R}_n$ 與 $\boldsymbol{R}_m$ 中選取不同基底時，描述映像 $\boldsymbol{R}_n$ 與 $\boldsymbol{R}_m$ 的同一運算子束 $\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$。

為了得出矩陣束的標準式，應當在 $\boldsymbol{R}_n$ 與 $\boldsymbol{R}_m$ 中求得這樣的基底，使得在這一基底中運算子束 $\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$ 的對應矩陣束有最簡單的形狀。

因為運算子束是由兩個運算子 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 所確定的，所以還可以說，本章是從事於同時研究映像 $\boldsymbol{R}_n$ 與 $\boldsymbol{R}_m$ 的兩個運算子 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$。

3．所有 $m\times n$ 維矩陣束 $A+\lambda B$ 又分為兩個基本類型：正則束與異束。

定義 2．矩陣束 $A+\lambda B$ 稱為正則的，如果(1) A 與 B 同為 n 級方陣且有(2)行列式 $|A+\lambda B|$ 不恆等於零。對於其他情形($m\neq n$ 或 $m=n$ 而有 $|A+\lambda B|\equiv 0$)我們稱之為異矩陣束。

對於正則矩陣束的嚴格相抵性判定與其標準式是在 1867 年為克．伐愛爾斯脫拉斯[150]所建立的，這是奠基於第六章與第七章中所述的初級因子理論。對於異矩陣束的類似問題，後來在 1890 年在爾．克朗南格[133] ❶的研究中得出了他的解答。本章的基本內容是建立克朗南格的結果。

§ 2．正則矩陣束

❶ 在以後對異矩陣束的各種研究工作，我們指出 [776, 148, 134a]。

1. 討論特殊的矩陣束 $A+\lambda B$ 與 $A_1+\lambda B_1$，他們是由方陣所構成的 $(m=n)$ 而且 $|B|\neq 0$，$|B_1|\neq 0$。對於這種情形，在第六章中已經證明（§ 4，定理 6）矩陣束的"相抵性"與"嚴格相抵性"這兩個概念是一致的。故可將 λ-矩陣（第六章，§ 1）的廣義相抵性判定用於矩陣束，我們就得出次之定理：

定理 1. 有 $|B|\neq 0$ 與 $|B_1|\neq 0$ 的兩個同級方陣束 $A+\lambda B$ 與 $A_1+\lambda B_1$ 嚴格相抵的充分必要條件，爲這兩個方陣束有相同的域 K 上初級因子。

有 $|B|\neq 0$ 的方陣束 $A+\lambda B$ 在第六章中稱爲正則的，因爲他是關於 λ 的正則矩陣多項式的一個特例（參考第四章，§ 1）。在本章上節中我們給予正則束以更廣泛的定義。根據這個定義對於正則束可能有等式 $|B|=0$（亦可能有 $|A|=|B|=0$）。

爲了說明定理 1 對於正則束（用廣義的定義 1）是否有效，我們來討論次之例子：

$$A+\lambda B=\begin{Vmatrix}2&1&3\\3&2&5\\3&2&6\end{Vmatrix}+\lambda\begin{Vmatrix}1&1&2\\1&1&2\\1&1&3\end{Vmatrix},\quad A_1+\lambda B_1=\begin{Vmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&1\end{Vmatrix}+\lambda\begin{Vmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{Vmatrix}。\quad (3)$$

不難看出，此時每一個方陣束 $A+\lambda B$ 與 $A_1+\lambda B_1$ 都祇有一個初級因子 $\lambda+1$。但是這兩個方陣束並不嚴格相抵，因爲矩陣 B 與 B_1 各有秩 2 與 1，而由等式（2），知其如能成立，則矩陣 B 與 B_1 必須等秩。此外，根據定義 1，方陣束（3）是正則的，因爲

$$|A+\lambda B|\equiv|A_1+\lambda B_1|\equiv\lambda+1。$$

所說的例子說明定理 1 對於廣義定義的正則束是不能成立的。

2. 爲了使得定理 1 有效，我們引進矩陣束的"無限"初級因子這一概念。藉助於齊次參數 λ,μ，矩陣束 $A+\lambda B$ 給出：$\mu A+\lambda B$。那末行列式 $\Delta(\lambda,\mu)\equiv|\mu A+\lambda B|$ 是 λ,μ 的齊次函數。找出矩陣 $\mu A+\lambda B$ 中所有 k 級子式的最大公因式 $D_k(\lambda,\mu)$ $(k=1,2,\cdots,n)$，由已知公式我們得

出不變因式

$$i_1(\lambda,\mu)=\frac{D_n(\lambda,\mu)}{D_{n-1}(\lambda,\mu)},\quad i_2(\lambda,\mu)=\frac{D_{n-1}(\lambda,\mu)}{D_{n-2}(\lambda,\mu)},\cdots;$$

此處所有的 $D_k(\lambda,\mu)$ 與 $i_j(\lambda,\mu)$ 都是 λ,μ 的齊次多項式。分解不變因式爲域 K 上齊次不可約多項式的乘冪，我們得出矩陣束 $\mu A+\lambda B$ 的域 K 上初級因子 $e_\alpha(\lambda,\mu)$ $(\alpha=1,2,\cdots)$。

非常明顯，如在 $e_\alpha(\lambda,\mu)$ 中命 $\mu=1$，我們就回到矩陣束 $A+\lambda B$ 的初級因子 $e_\alpha(\lambda)$。反之，從矩陣束 $A+\lambda B$ 的每一個 q 次初級因子 $e_\alpha(\lambda)$，利用公式 $e_\alpha(\lambda,\mu)=\mu^q e_\alpha\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$ 我們得出對應的初級因子 $e_\alpha(\lambda,\mu)$。除 μ^q 形的初級因子以外，這種方法可以得出 $\mu A+\lambda B$ 的所有初級因子。

當且僅當 $|B|=0$ 時，μ^q 形初級因子始能存在，我們稱爲矩陣束 $A+\lambda B$ 的"無限"初級因子。

因爲從矩陣束 $A+\lambda B$ 與 $A_1+\lambda B_1$ 的嚴格相抵性得出矩陣束 $\mu A+$ $+\lambda B$ 與 $\mu A_1+\lambda B_1$ 的嚴格相抵性，所以嚴格相抵的矩陣束 $A+\lambda B$ 與 $A_1+\lambda B_1$ 不僅有相同的"有限"初級因子，且應有相同的"無限"初級因子。

現在假設給予兩個正則束 $A+\lambda B$ 與 $A_1+\lambda B_1$，他們有相同的初級因子(包含無限的在內)。引進齊次參數：$\mu A+\lambda B$，$\mu A_1+\lambda B_1$。變換參數：

$$\begin{aligned}\lambda&=\alpha_1\tilde{\lambda}+\alpha_2\tilde{\mu},\\ \mu&=\beta_1\tilde{\lambda}+\beta_2\tilde{\mu}\end{aligned}\qquad(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\neq 0)。$$

對於新參數可以寫爲：$\tilde{\mu}\tilde{A}+\tilde{\lambda}\tilde{B}$，$\tilde{\mu}\tilde{A}_1+\tilde{\lambda}\tilde{B}_1$，其中 $\tilde{B}=\beta_1 A+\alpha_1 B$，$\tilde{B}_1=\beta_1 A_1+\alpha_1 B_1$。從矩陣束 $\mu A+\lambda B$ 與 $\mu A_1+\lambda B_1$ 的正則性推知，可以選取數 α_1 與 β_1，使得 $|\tilde{B}|\neq 0$，$|\tilde{B}_1|\neq 0$。

故由定理 1，知矩陣束 $\tilde{\mu}\tilde{A}+\tilde{\lambda}\tilde{B}$ 與 $\tilde{\mu}\tilde{A}_1+\tilde{\lambda}\tilde{B}_1$，因而原來的矩陣束 $\mu A+\lambda B$ 與 $\mu A_1+\lambda B_1$ (或者同樣的，$A+\lambda B$ 與 $A_1+\lambda B_1$) 是嚴格相抵的。這樣一來，我們得出了次之定理 1 的推廣。

定理 2. 爲了使得兩個正則束 $A+\lambda B$ 與 $A_1+\lambda B_1$ 嚴格相抵，充分必要的，是這兩個矩陣束有相同的（"有限"與"無限"）初級因子。

在前面所說的例子中，矩陣束(3)有相同的"有限"初級因子 $\lambda+1$，但是他們的"無限"初級因子是不相同的（第一個矩陣束有一個"無限"初級因子 μ^2，而第二個有兩個"無限"初級因子：μ,μ）。因此這兩個矩陣束並不是嚴格相抵的。

3. 現在假設給予任一正則束 $A+\lambda B$，那末有這樣的數 c 存在，使得 $|A+cB|\neq 0$。表所予矩陣束爲 $A_1+(\lambda-c)B$ 的形狀，其中 $A_1=A+cB$，則有 $|A_1|\neq 0$。左乘這個矩陣束以 A_1^{-1}，得：$E+(\lambda-c)A_1^{-1}B$。相似變換化這個矩陣束爲次之形狀：

$$E+(\lambda-c)\{J_0,J_1\}=\{E-cJ_0+\lambda J_0,\ E-cJ_1+\lambda J_1\},\text{❶} \qquad (4)$$

其中 $\{J_0,J_1\}$ 爲矩陣 $A_1^{-1}B$ 的準對角形法式。J_0 爲若唐冪零❷矩陣，而 $|J_1|\neq 0$。

乘(4)式右節第一個對角線上子塊以 $(E-cJ_0)^{-1}$。我們得出：$E+\lambda(E-cJ_0)^{-1}J_0$。此處 λ 的係數是一個冪零矩陣❸。故相似變換可以化這個矩陣束爲次之形狀

$$E+\lambda\hat{J}_0=\{N^{(u_1)},\ N^{(u_2)},\ \cdots,\ N^{(u_s)}\} \quad (N^{(u)}=E^{(u)}+\lambda H^{(u)})\text{❹}。\qquad (5)$$

乘(4)式右節第二個對角線上子塊以 J_1^{-1}，而繼以相似變換可以化爲 $J+\lambda E$ 的形狀，其中 J 是一個法式矩陣，❺ 而 E 是一個么矩陣。我們得出了次之定理：

定理 3. 任何正則矩陣束 $A+\lambda B$ 都可以化爲（嚴格相抵的）準對

---

❶ 在(4)式右節對角線上子塊中，么矩陣 E 與 J_0,J_1 對應的有相同的階。

❷ 是即對於某一整數 $l>0$ 有 $J_0^l=0$。

❸ 由 $J_0^l=0$ 得出：$[(E-cJ_0)^{-1}J_0]^l=0$。

❹ 此處 $E^{(u)}$ 是一個 u 級么矩陣，而 $H^{(u)}$ 是一個 u 級矩陣，在其第一上對角線上的元素都等於 1，而其餘的元素全等於零。

❺ 因在此處，可以換矩陣 J 爲其任一相似矩陣，故可視 J 爲任何一種法式[例如，第一種自然法式或第二種自然法式或若唐法式（參考第六章，§6）]。

角形標準形式

$$\{N^{(u_1)}, N^{(u_2)}, \cdots, N^{(u_s)}, J+\lambda E\} \quad (N^{(u)}=E^{(u)}+\lambda H^{(u)}), \tag{6}$$

其中對角線上前 s 個子塊對應於矩陣束 $A+\lambda B$ 的無限初級因子 μ^{u_1}, μ^{u_2}, $\cdots$, μ^{u_s},而對角線上最後一個法式子塊 $J+\lambda E$ 爲所予矩陣束的有限初級因子所唯一確定。

§3. 異矩陣束.演化定理

轉移到 $m\times n$ 維異矩陣束 $A+\lambda B$ 的討論。以 r 記這個矩陣束的秩,亦即不恆等於零的子式的最大階。因爲他是一個異矩陣束,所以至少有一個不等式 $r<n$ 或 $r<m$ 一定能夠成立。設 $r<n$。那末 λ-矩陣 $A+\lambda B$ 的列是線性相關的,亦即 x 爲未知列的方程

$$(A+\lambda B)x=0 \tag{7}$$

有非零解。這個方程的每一個非零解都定出 λ-矩陣 $A+\lambda B$ 中諸列的某一線性相關性。我們祇限於方程(7)的這種解 $x(\lambda)$,他是 λ 的多項式❶,且在這些解中,取最小次數 ε 的解:

$$x(\lambda)=x_0-\lambda x_1+\lambda^2x_2-\cdots+(-1)^{\varepsilon}\lambda^{\varepsilon}x_{\varepsilon} \quad (x_{\varepsilon}\neq 0)。 \tag{8}$$

把這個解代到(7)式裏面,且把 λ 的冪次的係數等於零,我們得出:

$$Ax_0=0, Bx_0-Ax_1=0, Bx_1-Ax_2=0, \cdots, Bx_{\varepsilon-1}-Ax_{\varepsilon}=0, Bx_{\varepsilon}=0。 \tag{9}$$

視這一組等式爲關於列 x_0, $-x_1$, $+x_2$, $\cdots$, $(-1)^{\varepsilon}x_{\varepsilon}$ 的元素的齊次線方程組,那末他的係數矩陣

$$M_{\varepsilon}=M_{\varepsilon}[A+\lambda B]=\overbrace{\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ B & A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & A \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & B \end{pmatrix}}^{\varepsilon+1} \tag{10}$$

❶ 爲了具體定出適合方程(7)的列 x 的元素,要解出一個齊次線方程組,其係數是 λ 的一次式。基本的線性無關解 x 常可這樣選取,使得他的元素都是 λ 的多項式。

有秩 $\rho_\varepsilon<(\varepsilon+1)n$。但是由於數 ε 是最小的，故對於矩陣

$$M_0=\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix},\ M_1=\begin{pmatrix}A&0\\B&A\\0&B\end{pmatrix},\ \cdots,\ M_{\varepsilon-1}=\begin{pmatrix}\overbrace{\begin{matrix}A&0&\cdots&0\end{matrix}}^{\varepsilon}\\\begin{matrix}B&A&\cdots&0\end{matrix}\\\begin{matrix}\vdots&&\ddots&\vdots\end{matrix}\\\begin{matrix}\vdots&&\ddots&A\end{matrix}\\\begin{matrix}0&0&\cdots&B\end{matrix}\end{pmatrix}\qquad(10')$$

的秩 $\rho_0,\ \rho_1,\ \cdots,\ \rho_{\varepsilon-1}$ 有等式 $\rho_0=n,\ \rho_1=2n,\ \cdots,\ \rho_{\varepsilon-1}=\varepsilon n$。

這樣一來，數 ε 是在關係式 $\rho_k<(k+1)n$ 中符號 $<$ 能夠成立的最小的指標值 k。

現在我們來敍述且證明次之基本定理：

定理 4. 如果方程（7）有最小次數 ε 的解且有 $\varepsilon>0$，那末所予的矩陣束 $A+\lambda B$ 與次形矩陣束

$$\begin{pmatrix}L_\varepsilon&0\\0&\hat{A}+\lambda\hat{B}\end{pmatrix}\qquad(11)$$

嚴格相抵，其中

$$L_\varepsilon=\left\|\begin{matrix}\lambda&1&0&\cdot&\cdot&\cdot&0&0\\0&\lambda&1&&&&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\ddots&\ddots&&&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&&\ddots&\ddots&&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&&&\ddots&\ddots&\cdot&\cdot\\0&0&&\cdot&\cdot&\cdot&\lambda&1\end{matrix}\right\|\Bigg\}\varepsilon,\quad(\text{列數 }\varepsilon+1)\qquad(12)$$

而 $\hat{A}+\lambda\hat{B}$ 是這樣的矩陣束，類似於（7）的方程對於他沒有次數 $<\varepsilon$ 的解。

定理的證明分爲三個步驟。首先證明所予矩陣束 $A+\lambda B$ 與次形矩陣束

$$\begin{pmatrix} L_\varepsilon & D+\lambda F \\ 0 & \hat{A}+\lambda\hat{B} \end{pmatrix} \tag{13}$$

嚴格相抵，其中 $D, F, \hat{A}, \hat{B}$，爲有對應的維數的常數長方矩陣。其次證明方程 $(\hat{A}+\lambda\hat{B})\hat{x}=0$ 不能有次數 $<\varepsilon$ 的解 $\hat{x}(\lambda)$。最後我們來證明再行變換矩陣束(13)可以化爲準對角形(11)。

1. 證明的第一部分是用幾何形式來進行的。代替矩陣束 $A+\lambda B$，我們來討論映像 $\boldsymbol{R}_n$ 於 $\boldsymbol{R}_m$ 的運算子束 $\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$。我們來證明在這些空間中選取適當的基底可使對應於運算子 $\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$ 的矩陣有(13)的形式。

代替方程(7)，我們取向量方程

$$(\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \tag{14}$$

且設其有向量解

$$\boldsymbol{x}(\lambda)=\boldsymbol{x}_0-\lambda\boldsymbol{x}_1+\lambda^2\boldsymbol{x}_2-\cdots+(-1)^\varepsilon\lambda^\varepsilon\boldsymbol{x}_\varepsilon; \tag{15}$$

等式(9)可換爲向量等式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{0}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_\varepsilon=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_{\varepsilon-1}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_\varepsilon=\boldsymbol{0}。 \tag{16}$$

下面我們證明向量

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_\varepsilon \tag{17}$$

線性無關。故易知次諸向量亦是線性無關的：

$$\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_\varepsilon。 \tag{18}$$

事實上，因爲 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{0}$、由 $\alpha_0\boldsymbol{x}_0+\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+\alpha_\varepsilon\boldsymbol{x}_\varepsilon=\boldsymbol{0}$ 求得：$\alpha_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1+\cdots+\alpha_\varepsilon\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_\varepsilon=\boldsymbol{0}$，故由向量(17)的線性無關性得出 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=$ $=\alpha_\varepsilon=0$。但 $\boldsymbol{x}_0\neq\boldsymbol{0}$，因爲否則 $\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{x}(\lambda)$ 將爲方程(14)的解而其次數爲 $\varepsilon-1$，這是不可能的。因此 $\alpha_0=0$。

如果現在取向量(17)與(18)作爲 $\boldsymbol{R}_m$ 與 $\boldsymbol{R}_n$ 內新基底中前面的一些向量，那末在新基底中由於(16)知運算子 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 各對應於矩陣

$$\widetilde{A}=\begin{Vmatrix} \overbrace{0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0}^{\varepsilon+1} & * & \cdot & \cdot & \cdot & * \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & \cdot & 0 & * & \cdot & \cdot & \cdot & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & * & \cdot & \cdot & \cdot & * \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & * & \cdot & \cdot & \cdot & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & * & \cdot & \cdot & \cdot & * \end{Vmatrix},$$

$$\widetilde{B}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & * & \cdot & \cdot & \cdot & * \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & * & \cdot & \cdot & \cdot & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 & * & \cdot & \cdot & \cdot & * \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & * & \cdot & \cdot & \cdot & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & * & \cdot & \cdot & \cdot & * \end{Vmatrix};$$

此時 λ-矩陣 $\widetilde{A}+\lambda\widetilde{B}$ 有(13)的形狀．如果我們能夠證明向量(17)線性無關，那末前面所討論的都能成立。假使相反的，在向量序列 (17) 中，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_h\,(h\geqslant 1)$爲與其前面諸向量線性相關的第一個向量：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_h=\alpha_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{h-1}+\alpha_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{h-2}+\cdots+\alpha_{h-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1。$$

由(16)，這個等式可以寫爲：

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_{h-1}=\alpha_1\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_{h-2}+\alpha_2\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_{h-3}+\cdots+\alpha_{h-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_0,$$

亦即

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_{h-1}^*=\boldsymbol{0},$$

其中

$$\boldsymbol{x}_{h-1}^*=\boldsymbol{x}_{h-1}-\alpha_1\boldsymbol{x}_{h-2}-\alpha_2\boldsymbol{x}_{h-3}-\cdots-\alpha_{h-1}\boldsymbol{x}_0。$$

再由(16)得:

$$Ax_{h-1}^*=B(x_{h-2}-\alpha_1x_{h-3}-\cdots-\alpha_{h-2}x_0)=Bx_{h-2}^*,$$

其中

$$x_{h-2}^*=x_{h-2}-\alpha_1x_{h-3}-\cdots-\alpha_{h-2}x_0\text{。}$$

繼續如此進行且引進向量

$$x_{h-3}^*=x_{h-3}-\alpha_1x_{h-4}-\cdots-\alpha_{h-3}x_0,\ \cdots,\ x_1^*=x_1-\alpha_1x_0,\ x_0^*=x_0,$$

我們得出一串等式

$$Bx_{h-1}^*=0,\ Ax_{h-1}^*=Bx_{h-2}^*,\ \cdots,\ Ax_1^*=Bx_0^*,\ Ax_0^*=0\text{。}\tag{19}$$

由(19)得出:

$$x^*(\lambda)=x_0^*-\lambda x_1^*+\cdots+(-1)^{h-1}x_{h-1}^*\quad (x_0^*=x_0\neq 0)$$

是方程(14)的非零解且其次數 $\leqslant h-1<\varepsilon$，這是不可能的。這樣一來，向量(17)是線性無關的。

2. 現在來證明方程 $(\hat{A}+\lambda\hat{B})x=0$ 沒有次數 $<\varepsilon$ 的解。首先注意，有如方程(7)，方程 $L_\varepsilon y=0$ 有次數小於 ε 的非零解。這是可以直接證明的，祇要換矩陣方程 $L_\varepsilon y=0$ 爲平常的方程組

$$\lambda y_1+y_2=0,\ \lambda y_2+y_3=0,\ \cdots,\ \lambda y_\varepsilon+y_{\varepsilon+1}=0,$$

$[y=(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_{\varepsilon+1})]$，卽得 $y_k=(-1)^{k-1}y_1\lambda^{k-1}(k=1,2,\cdots,\varepsilon+1)$。

另一方面，如果矩陣束有"三角形"(13)，那末對應於這個矩陣束的矩陣 $M_k(k=0,\ 1,\ \cdots,\ \varepsilon)$[參考本節的(10)與(10′)]，在適當的調動行列之後，可以化爲次之三角形

$$\begin{pmatrix} M_k[L_\varepsilon] & M_k[D+\lambda F] \\ 0 & M_k[\hat{A}+\lambda\hat{B}] \end{pmatrix}\text{。}\tag{20}$$

當 $k=\varepsilon-1$ 時，這個矩陣的全部列，同時矩陣 $M_{\varepsilon-1}[L_\varepsilon]$ 的諸列，是線性無關的❶。但是 $M_{\varepsilon-1}[L_\varepsilon]$ 是一個 $\varepsilon(\varepsilon+1)$ 級方陣。故在矩陣 $M_{\varepsilon-1}[\hat{A}+\lambda\hat{B}]$ 中全部列是線性無關的，有如本節開始所已闡明，這就說

❶ 這可這樣來得出，當 $k=\varepsilon-1$ 時矩陣(20)的秩等於 εn；類似的等式對於矩陣 $M_{\varepsilon-1}[L_\varepsilon]$ 亦能成立。

明了方程$(\hat{A}+\lambda\hat{B})\hat{x}=0$不能有次數$\leqslant\varepsilon-1$的解。第二部分已經證明。

3. 換矩陣束(13)為與其嚴格相抵的矩陣束

$$\begin{pmatrix}E_1 & Y\\ 0 & E_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L_\varepsilon & D+\lambda F\\ 0 & \hat{A}+\lambda\hat{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_3 & -X\\ 0 & E_4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}L_\varepsilon & D+\lambda F+Y(\hat{A}+\lambda\hat{B})-L_\varepsilon X\\ 0 & \hat{A}+\lambda\hat{B}\end{pmatrix}, \tag{21}$$

其中E_1, E_2, E_3, E_4是各有階ε, $m-\varepsilon$, $\varepsilon+1$與$n-\varepsilon-1$的么方陣，而X, Y為有對應維數的任意的常長方矩陣。我們的定理將能完全證明，祇要我們能夠證明，可以選取矩陣X與Y使得他們能適合次之矩陣等式：

$$L_\varepsilon X=D+\lambda F+Y(\hat{A}+\lambda\hat{B})。 \tag{22}$$

引進矩陣D, F, X諸元素的記法與矩陣Y的行與矩陣$\hat{A}$, $\hat{B}$的列的記法：

$$D=\|d_{ik}\|,\ F=\|f_{ik}\|,\ X=\|x_{jk}\|$$

$$(i=1,2,\cdots,\varepsilon;\ k=1,2,\cdots,n-\varepsilon-1;\ j=1,2,\cdots,\varepsilon+1),$$

$$Y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ y_\varepsilon\end{pmatrix},\ \hat{A}=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{n-\varepsilon-1}),\ \hat{B}=(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_{n-\varepsilon-1})。$$

那末矩陣方程(22)可以換為一組純量方程，寫出方程(22)左右兩節中第k列內諸元素使其對應元素相等$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-\varepsilon-1)$，得出：

$$\left.\begin{array}{c}x_{2k}+\lambda x_{1k}=d_{1k}+\lambda f_{1k}+y_1a_k+\lambda y_1b_k,\\ x_{3k}+\lambda x_{2k}=d_{2k}+\lambda f_{2k}+y_2a_k+\lambda y_2b_k,\\ x_{4k}+\lambda x_{3k}=d_{3k}+\lambda f_{3k}+y_3a_k+\lambda y_3b_k,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_{\varepsilon+1,k}+\lambda x_{\varepsilon k}=d_{\varepsilon k}+\lambda f_{\varepsilon k}+y_\varepsilon a_k+\lambda y_\varepsilon b_k\\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-\varepsilon-1)。\end{array}\right\} \tag{23}$$

在這些等式的左節是 λ 的線性二項式。在這些二項式的前 $\varepsilon-1$ 個中每一個的常數項都等於其下面一個二項式中 λ 的係數。故在右節亦應適合這樣的條件。因此有

$$\left.\begin{array}{l} y_1a_k-y_2b_k=f_{2k}-d_{1k}, \\ y_2a_k-y_3b_k=f_{3k}-d_{2k}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{\varepsilon-1}a_k-y_\varepsilon b_k=f_{\varepsilon k}-d_{\varepsilon-1,k} \\ (k=1,2,\cdots,n-\varepsilon-1)。\end{array}\right\} \tag{24}$$

如果等式(24)成立，那末顯然由(23)可以定出矩陣 X 的未知元素。

現在祇要證明，關於矩陣 Y 諸元素的方程組(24)對於任何 d_{ik} 與 $f_{ik}(i=1,2,\cdots,\varepsilon;\ k=1,2,\cdots,n-\varepsilon-1)$都能有解。事實上，由行 y_1, $-y_2$, $+y_3$, $-y_4$, $\cdots$ 諸未知元素的係數所構成的矩陣，經轉置後可寫爲次之形狀：

$$\overbrace{\begin{pmatrix} \hat{A} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \hat{B} & \hat{A} & & & & \cdot \\ 0 & \hat{B} & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & \hat{A} \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \hat{B} \end{pmatrix}}^{\varepsilon-1}。$$

但這一矩陣是長方矩陣束 $\hat{A}+\lambda\hat{B}$ 的矩陣 $M_{\varepsilon-2}$ [參考本章，(10')]。這個矩陣的秩等於$(\varepsilon-1)(n-\varepsilon-1)$，因爲已經證明方程$(\hat{A}+\lambda\hat{B})\hat{x}=0$ 沒有次數 $<\varepsilon$ 的解。這樣一來，方程組(24)的秩等於方程的個數而這種方程組對於任何常數項都是相容的(不矛盾的)。

定理已經完全證明。

§4. 異矩陣束的標準式

設給予任何 $m\times n$ 維矩陣束 $A+\lambda B$。首先假定，無論在這個矩陣束的諸列之間，或在諸行之間，都沒有常係數的線性相關性。

設 $r<n$，其中 r 爲矩陣束的秩，亦即矩陣束 $A+\lambda B$ 的列彼此線性相關。在此時方程 $(A+\lambda B)x=0$ 有最小次數 ε_1 的非零解 由於本節開始所給予的限制，知有 $\varepsilon_1>0$。故由定理 4，所予的矩陣束可以化爲次之形狀

$$\begin{pmatrix} L_{\varepsilon_1} & 0 \\ 0 & A_1+\lambda B_1 \end{pmatrix},$$

其中方程 $(A_1+\lambda B_1)x^{(1)}=0$ 沒有次數 $<\varepsilon_1$ 的解 $x^{(1)}$。

如果這個方程有最小次數 ε_2 的非零解(此時一定有 $\varepsilon_2\geqslant\varepsilon_1$)，那末應用定理 4 於矩陣束 $A+\lambda B$，我們化所予矩陣束爲次之形狀：

$$\begin{pmatrix} L_{\varepsilon_1} & 0 & 0 \\ 0 & L_{\varepsilon_2} & 0 \\ 0 & 0 & A_2+\lambda B_2 \end{pmatrix}。$$

繼續如此進行，我們化所予矩陣束爲次之準對角形：

$$\begin{pmatrix} L_{\varepsilon_1} & & & & & 0 \\ & L_{\varepsilon_2} & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & L_{\varepsilon_p} & \\ 0 & & & & & A_p+\lambda B_p \end{pmatrix}, \tag{25}$$

其中 $0<\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_2\leqslant\cdots\leqslant\varepsilon_p$，而方程 $(A_p+\lambda B_p)x^{(p)}=0$ 沒有非零解，亦卽矩陣 $A_p+\lambda B_p$ 的列是線性無關的❶。

如果矩陣束諸行線性相關，那末轉置矩陣束 $A'_p+\lambda B'_p$ 可以化爲(25)型，其中數 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_p$ 將換爲某些數 $(0<)\eta_1\leqslant\eta_2\leqslant\cdots\leqslant\eta_q$ ❷。

❶ 在特殊情形，當 $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_p=m$ 時，子塊 $A_p+\lambda B_p$ 就不會出現。

❷ 因爲在矩陣束 $A+\lambda B$ 中，因而在矩陣束 $A_p+\lambda B_p$ 中，諸行間沒有常係數線性相關性，故 $\eta_1>0$。

此時所予矩陣束 $A+\lambda B$ 經變換後化為次之準對角形：

$$\begin{pmatrix} L_{\varepsilon_1} & & & & & & & & & 0 \\ & L_{\varepsilon_2} & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & \\ & & & L_{\varepsilon_p} & & & & & & \\ & & & & L'_{\eta_1} & & & & & \\ & & & & & L'_{\eta_2} & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & L'_{\eta_q} & & \\ 0 & & & & & & & & A_0+\lambda B_0 \end{pmatrix} \tag{26}$$

$$(0<\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_2\leqslant\cdots\leqslant\varepsilon_p,\quad 0<\eta_1\leqslant\eta_2\leqslant\cdots\leqslant\eta_q),$$

其中矩陣束 $A_0+\lambda B_0$ 的列與行都是線性無關的，亦即 $A_0+\lambda B_0$ 是一個正則束❶。

現在來討論一般的情形，就是所予矩陣束的行與列可能有常係數的線性相關性。對應的記方程

$$(A+\lambda B)x=0 \quad 與 \quad (A'+\lambda B')y=0$$

的常數無關解的極大個數為 g 與 h。類似於定理 4 的證明中所做過的方法，代替這些方程的第一個，我們來討論對應的向量方程 $(\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$（$\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 是映像 $\boldsymbol{R}_n$ 於 $\boldsymbol{R}_m$ 中的運算子）。記這個方程的線性無關常數解以 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_g$ 且用為 $\boldsymbol{R}_n$ 中基底的前面 g 個向量。那末在對應的矩陣 $\widetilde{A}+\lambda\widetilde{B}$ 中前 g 個列都是零：

$$\widetilde{A}+\lambda\widetilde{B}=(\overbrace{0}^{g},\ \widetilde{A}_1+\lambda\widetilde{B}_1)。 \tag{27}$$

全相類似的在矩陣束 $\widetilde{A}_1+\lambda\widetilde{B}_1$ 中可以使其前 h 行變為零。此時所予矩陣束就化為：

---

❶ 如果在所予矩陣束中 $r=n$，亦即矩陣束的列是線性無關的，那末在(26)中可以除去前 p 個 L_ε 形的對角線上諸子塊 $(p=0)$。同樣的，如果 $r=m$，亦即 $A+\lambda B$ 諸行是線性無關的，那末在(26)中要除去對角線上諸 L'_η 形的子塊$(q=0)$。

$$\begin{pmatrix} h\{\overbrace{0}^{g} & 0 \\ 0 & A^0+\lambda B^0 \end{pmatrix}, \tag{28}$$

其中矩陣束 $A^0+\lambda B^0$ 的行與列已經是不能對於常數係數線性相關。用表示式 (26) 於矩陣束 $A^0+\lambda B^0$。這樣一來，在一般的情形，矩陣束 $A+\lambda B$ 常可化為標準準對角形

$$\{h\{\overbrace{0}^{g}, L_{\varepsilon_{g+1}}, \cdots, L_{\varepsilon_p}, L'_{\eta_{h+1}}, \cdots, L'_{\eta_q}, A_0+\lambda B_0\}。 \tag{29}$$

為了方便起見，此處對於 ε 與 η 的足數是這樣選取的，我們作為 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\cdots=\varepsilon_g=0$，$\eta_1=\eta_2=\cdots=\eta_h=0$。

在表示式 (29) 中換正則束 $A_0+\lambda B_0$ 為其標準式(6) (參考 § 2 末尾)，我們最後得出次之準對角形：

$$\{h\{\overbrace{0}^{g}; L_{\varepsilon_{g+1}}, \cdots, L_{\varepsilon_p}; L'_{\eta_{h+1}}, \cdots, L'_{\eta_q}; N^{(u_1)}, \cdots, N^{(u_s)}; J+\lambda E\}, \tag{30}$$

其中矩陣 J 為若唐法式，或為自然法式，而 $N^{(u)}=E^{(u)}+\lambda H^{(u)}$。

矩陣(30)是在一般的情形矩陣束 $A+\lambda B$ 的標準式。

為了使得從所予矩陣束直接定出他的標準式 (30)，不必依次施行上述諸步驟，我們按照克朗南格的結果，在次節中引進關於矩陣束的最小指標這一概念。

§ 5. 矩陣束的最小指標.矩陣束的嚴格相抵性判定

設任意給予一個異長方矩陣束 $A+\lambda B$。此時方程

$$(A+\lambda B)x=0 \tag{31}$$

的解：k 個多項式列 $x_1(\lambda), x_2(\lambda), \cdots, x_k(\lambda)$ 是線性相關的，如果由這些列所構成的矩陣 $X=[x_1(\lambda), x_2(\lambda), \cdots, x_k(\lambda)]$ 的秩小於 k。對於這一情形有 k 個不全恆等於零的多項式 $p_1(\lambda), p_2(\lambda), \cdots, p_k(\lambda)$ 存在，使得

$$p_1(\lambda)x_1(\lambda)+p_2(\lambda)x_2(\lambda)+\cdots+p_k(\lambda)x_k(\lambda)\equiv 0。$$

如果矩陣 X 的秩等於 k，那末類似的相關性不能存在，而解 $x_1(\lambda)$，$x_2(\lambda)$，…，$x_k(\lambda)$線性無關。

在方程(31)所有的解中取最小次數 ε_1 的非零解 $x_1(\lambda)$。在與 $x_1(\lambda)$ 線性無關的所有同一方程的解中，選取最小次數 ε_2 的解 $x_2(\lambda)$。顯然有 $\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_2$。繼續這一方法，在所有與 $x_1(\lambda)$，$x_2(\lambda)$ 線性無關的解中，選取最小次數 ε_3 的解 $x_3(\lambda)$，諸如此類。因爲方程 (31) 的線性無關解的個數常 $\leqslant n$，所以這一方法經有限次後必須停止。我們得出方程 (31) 的基礎解系

$$x_1(\lambda),\ x_2(\lambda),\ \cdots,\ x_p(\lambda), \tag{32}$$

其次數各爲

$$\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_2\leqslant\cdots\leqslant\varepsilon_p。\tag{33}$$

在一般情形，已予矩陣束 $A+\lambda B$ 的基礎解系不是唯一確定的（即使不計純量因子）。

但是兩個不同的基礎解系常有相同的次數序列 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_p$。事實上，討論與(32)相平行的第二個基礎解系 $\tilde{x}_1(\lambda)$，$\tilde{x}_2(\lambda)$，…，其次數各爲 $\tilde{\varepsilon}_1$，$\tilde{\varepsilon}_2$，… 設在次數(33)中有：

$$\varepsilon_1=\cdots=\varepsilon_{n_1}<\varepsilon_{n_1+1}=\cdots=\varepsilon_{n_2}<\cdots,$$

而類似的在序列 $\tilde{\varepsilon}_1$，$\tilde{\varepsilon}_2$，… 中有：

$$\tilde{\varepsilon}_1=\cdots=\tilde{\varepsilon}_{\tilde{n}_1}<\tilde{\varepsilon}_{\tilde{n}_1+1}=\cdots=\tilde{\varepsilon}_{\tilde{n}_2}<\cdots$$

顯然，$\varepsilon_1=\tilde{\varepsilon}_1$。任一列 $\tilde{x}_i(\lambda)$ $(i=1, 2, \cdots, \tilde{n}_1)$ 都是列 $x_1(\lambda)$，$x_2(\lambda)$，…，$x_{n_1}(\lambda)$的線性組合，因爲否則在序列(32)中可以換解 $x_{n_1+1}(\lambda)$ 爲有較低次數的解 $\tilde{x}_i(\lambda)$。顯然，反轉來，任一列 $x_i(\lambda)$ $(i=1, 2, \cdots, n_1)$ 都是列 $\tilde{x}_1(\lambda)$，$\tilde{x}_2(\lambda)$，…，$\tilde{x}_{\tilde{n}_1}(\lambda)$的線性組合。故有 $n_1=\tilde{n}_1$ 與 $\varepsilon_{n_1+1}=\tilde{\varepsilon}_{\tilde{n}_1+1}$。現在用類似的推理，知有 $n_2=\tilde{n}_2$ 與 $\varepsilon_{n_2+1}=\tilde{\varepsilon}_{\tilde{n}_2+1}$ 諸如此類。

基礎解系(32)中每一個解 $x_k(\lambda)$ 給出矩陣 $A+\lambda B$ 中諸列的 ε_k 次冪的線性相關性 $(k=1, 2, \cdots, p)$。故稱數 ε_1，ε_2，…，ε_p 爲矩陣束

$A+\lambda B$ 諸列的最小指標。

類似的引進矩陣束諸行的最小指標 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_q$。此處換方程 $(A+\lambda B)x=0$ 為方程 $(A'+\lambda B')y=0$ 而諸數 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_q$ 界說為轉置矩陣束 $A'+\lambda B'$ 諸列的最小指標。

嚴格相抵矩陣束有相同的最小指標。事實上，設給予兩個這種矩陣束：$A+\lambda B$ 與 $P(A+\lambda B)Q$（P 與 Q 為滿秩方陣）。那末對於第一個矩陣束的方程(31)左乘兩節以 P 後可以寫為：

$$P(A+\lambda B)Q\cdot Q^{-1}x=0。$$

故知左乘方程(31)的所有解以 Q^{-1} 就得出方程

$$P(A+\lambda B)Qz=0$$

的全部解。因此矩陣束 $A+\lambda B$ 與 $P(A+\lambda B)Q$ 對於諸列有相同的最小指標。轉移到轉置矩陣束得出諸行的最小指標的一致性。我們來計算標準準對角形矩陣

$$\{h[\overset{g}{\overline{0}}; L_{\varepsilon_{g+1}}, \cdots, L_{\varepsilon_p}; L'_{\eta_{h+1}}, \cdots, L'_{\eta_q}; A_0+\lambda B_0\} \tag{34}$$

的最小指標 [$A_0+\lambda B_0$ 是有法式(6)的形狀的正則束]。

首先注意，準對角形矩陣諸列（行）的完全最小指標組可以由合併對角線上各個子塊的對應最小指標組來得出。矩陣 L_ε 對列祇有一個指標 ε，而這個矩陣的行是線性無關的。同樣的，矩陣 L'_η 對行亦祇有一個指標 η，而這個矩陣的諸列是線性無關的。正則束 $A_0+\lambda B_0$ 沒有最小指標。故矩陣(34)對列有最小指標

$$\varepsilon_1=\cdots=\varepsilon_g=0,\ \varepsilon_{g+1}, \cdots, \varepsilon_p,$$

而對行有最小指標

$$\eta_1=\cdots=\eta_h=0,\ \eta_{h+1}, \cdots, \eta_q。$$

還要注意，矩陣 L_ε 沒有初級因子，因為在他的階最大的 ε 級中有一個子式等於 1，且有一個子式等於 λ^ε。自然，這一論斷對於轉置矩陣 L'_η 亦是適合的。因為準對角形矩陣的初級因子可以由合併對角線上諸

子塊的初級因子來得出(參考第六章，§3,2)，所以 λ-矩陣(34)的初級因子與其正則"核"的初級因子一致。

矩陣束的標準式(34)為所予矩陣束或者(同樣的)與之嚴格相抵的矩陣束 $A+\lambda B$ 的最小指標 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p, \eta_1, \cdots, \eta_q$ 與初級因子所完全確定。因為有相同標準式的兩個矩陣束是彼此嚴格相抵的，所以我們證明了次之定理：

定理 5.（克朗南格）　為了使得任意兩個維數同為 $m\times n$ 的長方矩陣束 $A+\lambda B$ 與 $A_1+\lambda B_1$ 嚴格相抵，充分必要的，是這些矩陣束有相同的最小指標與相同的("有限"與"無限")初級因子。

最後，為了明確起見，寫出一個有最小指標 $\varepsilon_1=0$, $\varepsilon_2=1$, $\varepsilon_3=2$, $\eta_1=0$, $\eta_2=0$, $\eta_3=2$ 與初級因子 $\lambda^2, (\lambda+2)^2, \mu^3$ 的矩陣束 $A+\lambda B$ 的標準式❶：

$$\left\Vert\begin{array}{ccccccccccccccc}
0 \\
0 \\
 & \lambda & 1 \\
 & & & \lambda & 1 & 0 \\
 & & & 0 & \lambda & 1 \\
 & & & & & & \lambda & 0 \\
 & & & & & & 1 & \lambda \\
 & & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & 1 & \lambda & 0 \\
 & & & & & & & & 0 & 1 & \lambda \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & \lambda & 1 \\
 & & & & & & & & & & & 0 & \lambda \\
 & & & & & & & & & & & & & \lambda+2 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & 0 & \lambda+2
\end{array}\right\Vert 。\quad (35)$$

❶ 在這個矩陣中，所有沒有寫出的元素都等於零。

§6. 異二次型束與異安密達型束

設予兩個複二次型：

$$A(x, x)=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k, \quad B(x, x)=\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}x_i x_k;$$

他們產生二次型束 $A(x, x)+\lambda B(x, x)$。這個型束對應於對稱矩陣束 $A+\lambda B(A'=A, B'=B)$。如果我們在型束 $A(x, x)+\lambda B(x, x)$ 中對變數施行一個滿秩線性變換 $x=Tz(|T|\neq 0)$，那末變換後的型束 $\widetilde{A}(z,z)+$ $+\lambda\widetilde{B}(z, z)$ 對應於矩陣束

$$\widetilde{A}+\lambda\widetilde{B}=T'(A+\lambda B)T; \tag{36}$$

此處 T 是一個 n 級常數(亦即與 λ 無關)滿秩方陣。

有恆等式(36)相結合的兩個矩陣束 $A+\lambda B$ 與 $\widetilde{A}+\lambda\widetilde{B}$，稱爲相合的(比較第十章，§1，定義1)。

如果代替二次型束來討論安密達型束

$$A(x,x)+\lambda B(x,x)\left[A(x, x)=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i\bar{x}_k,\ B(x, x)=\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}x_i\bar{x}_k\right],$$

那末這個型束對應於安密達矩陣束 $A+\lambda B(A^*=A, B^*=B)$[1]。經變數的變換 $x=\overline{T}z(|T|\neq 0)$ 後，所得出的型束對應於安密達矩陣束

$$\widetilde{A}+\lambda\widetilde{B}=T^*(A+\lambda B)T \quad (|T|\neq 0)。 \tag{37}$$

有恆等式(37)相結合的兩個矩陣束 $A+\lambda B$ 與 $\widetilde{A}+\lambda\widetilde{B}$ 稱爲聯合的。

顯然，矩陣束的相合性與聯合性都是相抵性的特殊情形。但是在討論兩個對稱矩陣束(或反對稱矩陣束)的相合性或兩個安密達矩陣束的聯合性時，相合性與聯合性概念與相抵性概念是一致的。這就是說：

定理6. 兩個嚴格相抵的複對稱(或反對稱)矩陣束永遠是彼此相合的。兩個嚴格相抵的安密達矩陣束永遠是彼此聯合的。

證明1. 假設給予兩個嚴格相抵的對稱(反對稱)矩陣束 $A=A+$

[1] 在這一節中星號 * 表示轉移到關聯矩陣，亦即復共軛轉置矩陣：$A^*=\overline{A}'$，$B^*=\overline{B}'$。

$+\lambda B$ 與 $\tilde{A}\equiv\tilde{A}+\lambda\tilde{B}$:

$$\tilde{A}=PAQ(A'=\pm A,\ \tilde{A}'=\pm\tilde{A};\ |P|\neq 0,\ |Q|\neq 0)。\tag{38}$$

變爲轉置矩陣後,我們得出:

$$\tilde{A}=Q'AP'。\tag{39}$$

從(38)與(39)求得:

$$AQP'^{-1}=P^{-1}Q'A。\tag{40}$$

命

$$U=QP'^{-1},\tag{41}$$

等式(40)可寫爲:

$$AU=U'A。\tag{42}$$

由(42)很容易得出:

$$AU^k=U'^kA\quad(k=0,1,2,\cdots),$$

一般的有

$$AS=S'A,\tag{43}$$

其中

$$S=f(U),\tag{44}$$

而 $f(\lambda)$ 爲 λ 的任一多項式。假設選取這個多項式,使得有 $|S|\neq 0$。那末由(43)得出:

$$A=S'AS^{-1}。\tag{45}$$

在(38)中,代 A 以所得出的他的表示式,我們有:

$$\tilde{A}=PS'AS^{-1}Q。\tag{46}$$

爲了使得這個關係式是一個相合變換,應當有次之等式

$$(PS')'=S^{-1}Q,$$

這一等式可以寫爲:

$$S^2=QP'^{-1}=U。$$

但是矩陣 $S=f(U)$ 適合這一等式,如果取 $\sqrt{\lambda}$ 在矩陣 U 的影譜上內插多項式作爲 $f(\lambda)$。這是可以做到的,因爲由於有 $|U|\neq 0$,多值函數

$\sqrt{\lambda}$有一個單值分支確定於矩陣 U 的影譜上。

現在從等式(46)我們就得出相合性關係

$$\tilde{A}=T'AT \quad (T=SQ=\sqrt{QP'^{-1}}Q)。 \tag{47}$$

2．對於安密達型的證明與上述證明所差別的祇是換符號 ′ 爲符號 * 。

從所證明的定理與定理 5 推得

推論　兩個二次(安密達)型

$$A(x, x)+\lambda B(x, x) \text{ 與 } \tilde{A}(z, z)+\lambda\tilde{B}(z, z)$$

可以經變換 $x=Tz(|T|\neq 0)$ 互相轉化的充分必要條件是對稱(安密達)矩陣束 $A+\lambda B$ 與 $\tilde{A}+\lambda\tilde{B}$ 有相同的("有限"與"無限")初級因子與相同的最小指標。

註　對於對稱或安密達矩陣束，行與列有相同的最小指標：

$$p=q;\ \varepsilon_1=\eta_1,\ \cdots,\ \varepsilon_p=\eta_p。 \tag{48}$$

提出次之問題：給予兩個任意的複二次型

$$A(x, x)=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i x_k, \quad B(x, x)=\sum_{i,k=1}^{n} b_{ik}x_i x_k。$$

在什麼條件之下，變數的滿秩變換 $x=Tz(|T|\neq 0)$ 可以同時化這些型爲平方和：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i z_i^2 \text{ 與 } \sum_{i=1}^{n} b_i z_i^2 ? \tag{49}$$

對於兩個安密達型 $A(x, x)$ 與 $B(x, x)$ 提出類似的問題，祇是在這一情形要換(49)式爲次之寫法：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i z_i \bar{z}_i \text{ 與 } \sum_{i=1}^{n} b_i z_i \bar{z}_i, \tag{50}$$

而且此處 a_i 與 b_i $(i=1, 2, \cdots, n)$都是實數。

我們假設二次(安密達)型 $A(x, x)$ 與 $B(x, x)$含有所指出的性質。那末矩陣束 $A+\lambda B$ 將相合於(聯合於)對角形矩陣束

$$\{a_1+\lambda b_1,\ a_2+\lambda b_2,\ \cdots,\ a_n+\lambda b_n\}。\tag{51}$$

設在對角線上諸二項式 $a_i+\lambda b_i$ 中恰好有 $r(r\leqslant n)$ 個不恆等於零。並不損失其一般性，可以作爲

$$a_1=b_1=0,\ \cdots,\ a_{n-r}=b_{n-r}=0,\ a_i+\lambda b_i\neq 0\quad (i=n-r+1,\ \cdots,\ n)。$$

命

$$A_0+\lambda B_0\equiv\{a_{n-r+1}+\lambda b_{n-r+1},\ \cdots,\ a_n+\lambda b_n\},$$

我們表矩陣(51)爲次之形狀

$$\{\overbrace{0}^{n-r},\ A_0+\lambda B_0\}。\tag{52}$$

比較(52)與(34)(§5)，我們看到，在所予的情形，所有最小指標都等於零。此外，所有初級因子都是一次式而對於安密達型都是實因子。我們得到了次之定理：

定理 7. 兩個二次或安密達型 $A(x,x)$ 與 $B(x,x)$ 經同一變數變換同時可化爲平方和 [(49)或(50)] 的充分必要條件是矩陣束 $A+\lambda B$ 的所有初級因子（有限與無限的）都是一次的且在安密達情形是實因子，而且所有最小指標都等於零。

爲了使得在一般情形，同時化兩個二次或安密達型 $A(x,x)$ 與 $B(x,x)$ 爲某一標準形式，應當換矩陣束 $A+\lambda B$ 爲與之嚴格相抵的"標準"對稱矩陣束或安密達矩陣束。

設對稱矩陣束 $A+\lambda B$ 有最小指標 $\varepsilon_1=\cdots=\varepsilon_g=0,\ \varepsilon_{g+1}\neq 0,\ \cdots,\ \varepsilon_p\neq 0$ 與無限初級因子 $\mu^{u_1},\ \mu^{u_2},\ \cdots,\ \mu^{u_s}$，有限初級因子 $(\lambda+\lambda_1)^{c_1},\ (\lambda+\lambda_2)^{c_2},\ \cdots,\ (\lambda+\lambda_t)^{c_t}$。那末在標準式(30)中 $g=h,\ p=q,\ \varepsilon_{g+1}=\eta_{g+1},\ \cdots,\ \varepsilon_p=\eta_p$。在(30)中換對角線上每兩個 L_ε 與 L'_ε 子塊爲一個對角線上子塊 $\begin{pmatrix}0 & L'_\varepsilon\\ L_\varepsilon & 0\end{pmatrix}$，換每一個 $N^{(u)}=E^{(u)}+\lambda H^{(u)}$ 形子塊爲與之嚴格相抵的對稱子塊

$$\widetilde{N}^{(u)}=V^{(u)}N^{(u)}=\begin{Vmatrix}0&0&\cdots&0&1\\0&0&\cdots&1&\lambda\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\1&\lambda&\cdots&0&0\end{Vmatrix}\left(V^{(u)}=\begin{Vmatrix}0&0&\cdots&0&1\\0&0&\cdots&1&0\\\vdots&&\cdot&&\vdots\\\cdot&1&&&\cdot\\1&0&\cdots&0&0\end{Vmatrix}\right)。\quad(53)$$

此外代替(30)中對角線上正則子塊 $J+\lambda E$(J 是若唐矩陣)

$$J+\lambda E=\{(\lambda+\lambda_1)E^{(c_1)}+H^{(c_1)},\ \cdots,\ (\lambda+\lambda_t)E^{(c_t)}+H^{(c_t)}\}$$

可取與之嚴格相抵的矩陣束

$$\{Z_{\lambda_1}^{(c_1)},\ \cdots,\ Z_{\lambda_t}^{(c_t)}\},$$

其中

$$Z_{\lambda_i}^{(c_i)}=V^{(c_i)}[(\lambda+\lambda_i)E^{(c_i)}+H^{(c_i)}]=$$

$$=\begin{Vmatrix}0&\cdots&0&\lambda+\lambda_i\\0&\cdots&\lambda+\lambda_i&1\\\vdots&&\cdot&\vdots\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot\ \cdot&&\cdot&\cdot\\\lambda+\lambda_i&1&\cdots&0\end{Vmatrix}\quad(i=1,2,\cdots,t)。\quad(54)$$

矩陣束 $A+\lambda B$ 嚴格相抵於對稱矩陣束

$$\widetilde{A}+\lambda\widetilde{B}=\Big\{0,\begin{pmatrix}0&L'_{\varepsilon_{g+1}}\\L_{\varepsilon_{g+1}}&0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0&L'_{\varepsilon_p}\\L_{\varepsilon_p}&0\end{pmatrix};\ \widetilde{N}^{(u_1)},\ \cdots,\ \widetilde{N}^{(u_s)};$$

$$Z_{\lambda_1}^{(c_1)},\ \cdots,\ Z_{\lambda_t}^{(c_t)}\Big\}。\quad(55)$$

兩個有複係數的二次型 $A(x,x)$ 與 $B(x,x)$ 經變數變換 $x=Tz$ ($|T|\neq0$) 可以同時化爲由等式 (55) 所決定的標準形式 $\widetilde{A}(z,z)$ 與 $\widetilde{B}(z,z)$。

如果 $A(x,x)$與$B(x,x)$是安密達型,那末矩陣束 $A+\lambda B$ 的"有限"初級因子是實因子或爲複共軛對:

$$(\lambda+\lambda_i)^{c_i},\ (\lambda+\lambda_j)^{d_j},\ (\lambda+\bar{\lambda}_j)^{d_j}\quad(i=1,2,\cdots,v;\ j=1,2,\cdots,w)$$

$[\lambda_i (i=1, 2, \cdots, v)$ 都是實數]。每一對複共軛初級因子 $(\lambda+\lambda_j)^{d_j}$，$(\lambda+\bar{\lambda}_j)^{d_j}$ 建立對應的安密達矩陣束

$$W_j = V^{(2d_j)}\{(\lambda+\lambda_j)E+H,\ (\lambda+\bar{\lambda}_j)E+H\} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & V \\ V & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\lambda+\lambda_j)E+H & 0 \\ 0 & (\lambda+\bar{\lambda}_j)E+H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & Z^{(d_j)}_{\lambda_j} \\ Z^{(d_j)}_{\bar{\lambda}_j} & 0 \end{pmatrix}, \quad (56)$$

$$E=E^{(d_j)},\ H=H^{(d_j)},\ V=V^{(d_j)}。$$

這樣一來，對於安密達情形，代替(55)可取標準矩陣束

$$\hat{A}+\lambda\hat{B} = \left\{ \overline{\underset{0}{g}}]h,\ \begin{pmatrix} 0 & L'_{\varepsilon_{g+1}} \\ L_{\varepsilon_{g+1}} & 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 & L'_{\varepsilon_p} \\ L_{\varepsilon_p} & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. N^{(u_1)}, \cdots, N^{(u_s)},\ Z^{(c_1)}_{\lambda_1}, \cdots, Z^{(c_v)}_{\lambda_v},\ W_1, \cdots, W_w \right\}。 \quad (57)$$

兩個安密達型 $A(x,x)$ 與 $B(x,x)$ 經變數的同一變換 $x=Tz\ (|T|\neq 0)$ 可以同時化為由(57)所決定的形狀 $\hat{A}(z,z)$ 與 $\hat{B}(z,z)$。

§7. 對於微分方程的應用

討論把所得出的結果應用於有常係數含 n 個未知函數 m 個一級線性微分方程的方程組的積分[1]

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\frac{dx_k}{dt} = f_i(t) \quad (i=1, 2, \cdots, m) \quad (58)$$

或寫為矩陣形式

$$Ax + B\frac{dx}{dt} = f(t); \quad (59)$$

此處

$$A=\|a_{ik}\|,\ B=\|b_{ik}\| \ (i=1, 2, \cdots, m;\ k=1, 2, \cdots, n),$$

[1] 在 $m=n$ 的特殊情形，(58)組關於導式的解出，已在第五章 §5 中有詳細的研究。

如所熟知，有常係數的任何 s 級線性微分方程組可以化為(58)的形狀，如果未知函數的所有 $s-1$ 級導式都作為新未知函數來補充的引進所討論的微分方程組中。

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad f=(f_1,f_2,\cdots,f_m)$$ ❶。

引進新未知函數 $z_1, z_2, \cdots, z_n$，他們與舊未知函數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 之間有常係數滿秩線性變換的關係存在：

$$x=Qz\quad [z=(z_1, z_2, \cdots, z_n);\quad |Q|\neq 0]。\tag{60}$$

再者，代替方程(58)可以以他們的任何 m 個線性無關的線性組合，這就等於左乘矩陣 A、B，f 以 m 級滿秩方陣 P。在(59)中代 x 以 Qz 且逐項左乘(59)以 P，我們得出：

$$\widetilde{A}z+\widetilde{B}\frac{dz}{dt}=\widetilde{f}(t),\tag{61}$$

其中

$$\widetilde{A}=PAQ,\ \widetilde{B}=PBQ,\ \widetilde{f}=Pf=(\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2, \cdots, \widetilde{f}_n)。\tag{62}$$

此時矩陣束 $A+\lambda B$ 與 $\widetilde{A}+\lambda\widetilde{B}$ 彼此嚴格相抵：

$$\widetilde{A}+\lambda\widetilde{B}=P(A+\lambda B)Q。\tag{63}$$

選取矩陣 P 與 Q 使得矩陣束 $\widetilde{A}+\lambda\widetilde{B}$ 爲標準準對角形矩陣

$$\widetilde{A}+\lambda\widetilde{B}=\{0,\ L_{\varepsilon_{g+1}},\ \cdots,\ L_{\varepsilon_p},\ L'_{\eta_{h-1}},\ \cdots,\ L'_{\eta_q},\ N^{(v_1)},\ \cdots,\ N^{(u_s)},\ J+\lambda E\}。\tag{64}$$

對應於(64)中對角線上諸子塊，我們的微分方程組裂分爲 $\nu=p-g+q-h+s+2$ 個方程組，他們的形狀爲：

$$0\cdot\overset{1}{z}=\overset{1}{\widetilde{f}},\tag{65}$$

$$L_{\varepsilon_{g+i}}\left(\frac{d}{dt}\right)\overset{1+i}{z}=\overset{1+i}{\widetilde{f}}\qquad (i=1,2,\cdots,p-g),\tag{66}$$

$$L'_{\eta_{h-j}}\left(\frac{d}{dt}\right)\overset{p-g+1+j}{z}=\overset{p-g+1+j}{\widetilde{f}}\qquad (j=1,2,\cdots,q-h),\tag{67}$$

$$N^{(u_k)}\left(\frac{d}{dt}\right)\overset{p-g+q-h+1+k}{z}=\overset{p-g+q-h+1+k}{\widetilde{f}}\quad (k=1,2,\cdots,s),\tag{68}$$

$$\left(J+\frac{d}{dt}\right)\overset{\nu}{z}=\overset{\nu}{\widetilde{f}},\tag{69}$$

❶ 記住，圓括號表示列矩陣。例如 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是元素爲 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的列。

其中

$$z=\begin{pmatrix} \overset{1}{z} \\ \overset{2}{z} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \overset{v}{z} \end{pmatrix}, \qquad \tilde{f}=\begin{pmatrix} \overset{1}{\tilde{f}} \\ \overset{2}{\tilde{f}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \overset{v}{\tilde{f}} \end{pmatrix}, \tag{70}$$

$$\overset{1}{z}=(z_1,\ \cdots,\ z_g),\quad \overset{1}{\tilde{f}}=(\tilde{f}_1,\ \cdots,\ \tilde{f}_h),\ \overset{2}{z}=(z_{g+1},\cdots),$$
$$\overset{2}{\tilde{f}}=(\tilde{f}_{h+1},\ \cdots)\text{諸如此類}, \tag{71}$$

$$\Delta\left(\frac{d}{dt}\right)=A+B\ \frac{d}{dt},\ \text{如果}\ \Delta(\lambda)\equiv A+\lambda B。 \tag{72}$$

這樣一來,方程組 (59) 在一般情形的積分化爲這種類型的特殊方程組(65)—(69)的積分。在這些方程中矩陣束 $A+\lambda B$ 有對應的形狀 $0,\ L_\varepsilon,\ L_\eta',\ N^{(u)},\ J+\lambda E$。

(1)爲了使得方程組(65)不會矛盾,充分必要的,是

$$\overset{1}{\tilde{f}}\equiv 0,$$

亦即

$$\tilde{f}_1\equiv 0,\ \cdots,\ \tilde{f}_h\equiv 0。 \tag{73}$$

在這一情形,作爲構成列 $\overset{1}{z}$ 的未知函數 $z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_g$ 可以取 t 的任何函數。

(2)表方程組(66)的形狀爲方程組

$$L_\varepsilon\left(\frac{d}{dt}\right)z=\tilde{f} \tag{74}$$

或者更詳細的寫爲

$$\frac{dz_1}{dt}+z_2=\tilde{f}_1(t),\ \frac{dz_2}{dt}+z_3=\tilde{f}_2(t),\ \cdots,\ \frac{dz_\varepsilon}{dt}+z_{\varepsilon+1}=\tilde{f}_{\varepsilon+1}(t)\text{❶}。 \tag{75}$$

❶ 爲了簡化記法,我們變動 z 與 $\tilde{f}$ 的足數。爲了使得方程組(75)回到方程組(66),應當換 ε 爲 ε_i 且對每一個 z 的足數添加 $g+\varepsilon_{g+1}+\cdots+\varepsilon_{g-i-1}+i-1$,而對每一個 $\tilde{f}$ 的足數添加 $h+\varepsilon_{g+1}+\cdots+\varepsilon_{g+i-1}$。

這種方程組永遠是相容的。如果取任一 t 的函數作爲 $z_{s+1}(t)$，那末從(75)順次求積就定出所有其餘的未知函數 $z_s, z_{s-1}, \cdots, z_1$。

(3)表方程組(67)爲方程組

$$L_\eta'\left(\frac{d}{dt}\right)z=\mathfrak{f} \tag{76}$$

或者更詳細的寫爲

$$\frac{dz_1}{dt}=\mathfrak{f}_1(t),\ \frac{dz_2}{dt}+z_1=\mathfrak{f}_2(t),\ \cdots,\ \frac{dz_\eta}{dt}+z_{\eta-1}=\mathfrak{f}_\eta(t),$$

$$z_\eta=\mathfrak{f}_{\eta+1}(t)\ ❶。 \tag{77}$$

從方程(77)，除開第一個方程外，我們唯一的定出 $z_\eta, z_{\eta-1}, \cdots, z_1$：

$$z_\eta=\mathfrak{f}_{\eta+1},\ z_{\eta-1}=\mathfrak{f}_\eta-\frac{d\mathfrak{f}_{\eta+1}}{dt},\ \cdots,\ z_1=\mathfrak{f}_2-\frac{d\mathfrak{f}_3}{dt}+$$

$$+\cdots+(-1)^{\eta-1}\frac{d^{\eta-1}\mathfrak{f}_{\eta+1}}{dt^{\eta-1}}。 \tag{78}$$

在第一個方程中，代 z_1 以其所得出的表示式，我們得出相容性條件：

$$\mathfrak{f}_1-\frac{d\mathfrak{f}_2}{dt}+\frac{d^2\mathfrak{f}_3}{dt^2}-\cdots+(-1)^\eta\frac{d^\eta\mathfrak{f}_{\eta+1}}{dt^\eta}=0。 \tag{79}$$

(4)表方程(68)爲方程組

$$N^{(u)}\left(\frac{d}{dt}\right)z=\mathfrak{f} \tag{80}$$

或更詳細的寫爲

$$\frac{dz_2}{dt}+z_1=\mathfrak{f}_1,\ \frac{dz_3}{dt}+z_2=\mathfrak{f}_2,\ \cdots,\ \frac{dz_u}{dt}+z_{u-1}=\mathfrak{f}_{u-1},\ z_u=\mathfrak{f}_u。 \tag{81}$$

故可順次唯一的定出解：

$$z_u=\mathfrak{f}_u,\ z_{u-1}=\mathfrak{f}_{u-1}-\frac{d\mathfrak{f}_u}{dt},\ \cdots,\ z_1=\mathfrak{f}_1-\frac{d\mathfrak{f}_2}{dt}+$$

$$+\frac{d^2\mathfrak{f}_3}{dt^2}-\cdots+(-1)^{u-1}\frac{d^{u-1}\mathfrak{f}_u}{dt^{u-1}}。 \tag{82}$$

---

❶ 同上面一樣，在此處我們變動了記法。參考上一個足註。

(5)表方程組(69)爲方程組

$$Jz+\frac{dz}{dt}=\tilde{f}。\tag{83}$$

有如第五章，§5中所已經證明，這種方程組的一般解有次之形狀

$$z=e^{-Jt}z_0+\int_0^t e^{-J(t-\tau)}f(\tau)d\tau;\tag{84}$$

此處 z_0 是有任意元素的列(未知函數在 $t=0$ 時的原始値)。

反過來從方程組(61)轉移到方程組(59)祇要用及公式(60)與(62)。根據這些公式，函數 $x_1, \cdots, x_n$ 中每一個都是函數 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 的線性組合，而函數 $\tilde{f}_1(t), \cdots, \tilde{f}_m(t)$ 中每一個都可以經函數 $f_1(t), \cdots, f_m(t)$ 線性表出(係數爲常數)。

上述分析指出，對於方程組(58)的相容性，在一般的情形，諸方程的右節之間應當適合某些確定的線性有限(常係數)微分相關性。

如果這些條件都能適合，那末方程組的普遍解(一般的)同時含有線性的任意常數與任意函數。

相容性的特性與解的特性(特別是任意常數與任意函數的數量)爲矩陣束 $A+\lambda B$ 的最小指標與初級因子所決定，因爲微分方程組(65)—(69)的標準形式與這些指標及初級因子有密切關係。

第十三章　非負元素所構成的矩陣

在這一章中所研究的是元素都是非負的實矩陣的性質。這些矩陣主要是應用於概率論中馬爾可夫鏈（"斯篤哈斯基（或概率性的）矩陣"，參考[25]）的研究與彈性系統的微振動理論（"顫動矩陣"，參考[7]）。

§1. 一般的性質

首先給予一些定義。

定義 1. 元素都是實數的長方矩陣

$$A=\|a_{ik}\|\quad(i=1,2,\cdots,m;\ k=1,2,\cdots,n)$$

稱為非負的（記之為 $A\geqslant 0$）或正的（記之為 $A>0$），如果矩陣的所有元素都是非負的（或正的）：$a_{ik}\geqslant 0$（或 $a_{ik}>0$）。

定義 2. 方陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 稱為可分離的，如果可裂分所有的足數 $1,2,\cdots,n$ 為兩個互補組（無公共數的）$i_1,i_2,\cdots,i_\mu$；$k_1,k_2,\cdots,k_\nu$ $(\mu+\nu=n)$，使得：

$$a_{i_\alpha k_\beta}=0\quad(\alpha=1,2,\cdots,\mu;\ \beta=1,2,\cdots,\nu)。$$

在相反的情形，我們稱矩陣 A 為不可分離的。

至於在方陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 中次序的置換，我們是指合併矩陣 A 中諸行的置換與諸列的同一置換而言的。

可分離與不可分離矩陣的定義還可述為：

定義 2′. 矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 稱為可分離的，如果次序的置換可以把他變為次之形狀

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}B & 0\\ C & D\end{pmatrix},$$

其中 B 與 D 為二方陣。在相反的情形我們稱矩陣 A 為不可分離的。

設矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 對應於基底爲 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 的 n 維向量空間 $\boldsymbol{R}$ 中線性運算子 $\boldsymbol{A}$。在矩陣 A 中次序的置換對應於基底中向量序數的變動，亦即變基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 爲新基底 $\boldsymbol{e}_1'=\boldsymbol{e}_{j_1}, \boldsymbol{e}_2'=\boldsymbol{e}_{j_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_n'=\boldsymbol{e}_{j_n}$，其中 $(j_1, j_2, \cdots j_n)$ 爲足數 $1, 2, \cdots, n$ 的某一個排列。此時矩陣 A 變爲其相似矩陣 $\tilde{A}=T^{-1}AT$（在變換矩陣 T 的每一行與每一列中祇有一個元素等於 1 而其餘元素都等於零。

至於 $\boldsymbol{R}$ 中 ν 維坐標子空間，我們了解爲任一以 $\boldsymbol{e}_{k_1}, \boldsymbol{e}_{k_2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{k_\nu}$ 爲基底的 $\boldsymbol{R}$ 中子空間 $(1\leq k_1<k_2<\cdots<k_\nu\leq n)$。對於空間 $\boldsymbol{R}$ 的每一個基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ 可以取 C_n^ν 個 ν 維坐標子空間。可分離矩陣的定義還能給予次之形式：

定義 2″. 矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 稱爲可分離的，並且僅當這個矩陣所對應的運算子 $\boldsymbol{A}$ 有 ν 維不變坐標子空間而且 $\nu<n$。

我們來證明次之引：

引 1. 如果 $A\geq 0$ 是一個不可分離矩陣而 n 爲矩陣 A 的階，那末

$$(E+A)^{n-1}>0。\tag{1}$$

證明　爲了證明我們的引，祇要證明對於任意向量（列）❶ $y\geq 0$ $(y\neq 0)$ 都有次之不等式

$$(E+A)^{n-1}y>0。$$

如果我們能夠證明，在條件 $y\geq 0$ 與 $y\neq 0$ 之下，向量 $z=(E+A)y$ 中零坐標的個數常少於向量 y 中零坐標的個數，那末上述不等式就已建立。假設是相反的。那末向量 y 與 z 有相同的零坐標❷。並不損失其一般性，可以對列 y 與 z 取次之形狀❸：

---

❶ 在本章中，此處及以後，我們了解向量爲有 n 個數的列。在某一基底中所予矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 給出某一線性運算子。在這個基底中，我們認爲向量與他的坐標行是相同的。

❷ 此處我們是這樣來得出的，因爲 $z=y+Ay$, $Ay\geq 0$，故向量 y 的正坐標對應於向量 z 的正坐標。

❸ 藉助於坐標序數的某一種調動（對於 y 與 z 是相同的），可以化列 y 與 z 爲這種形狀。

$$y=\begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix},\quad z=\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}\quad (u>0,\ v>0),$$

其中列 u 與 v 有相同的維數。

對應的命
$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

就有:
$$\begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix},$$

故
$$A_{21}u=0。$$

因爲 $u>0$, 所以推得:

$$A_{21}=0。$$

這個等式與矩陣 A 的不可分離性矛盾。

這樣一來,我們的引已經證明。

在討論中,引進矩陣 A 的乘冪:

$$A^q=\|a_{ik}^{(q)}\|_1^n\quad (q=1,2,\cdots)。$$

那末由引推得:

推論 如果 $A\geqslant 0$ 是一個不可分離的矩陣,那末對於任何足數耦 $(1\leqslant)\ i,\ k\ (\leqslant n)$ 都有正整數 q 存在,使得:

$$a_{ik}^{(q)}>0。\tag{2}$$

此處數 q 常可在次之範圍內選取:

$$\left.\begin{aligned} q\leqslant m-1,&\quad \text{如其 } i\neq k, \\ q\leqslant m,\quad &\quad \text{如其 } i=k, \end{aligned}\right\}\tag{3}$$

其中 m 是矩陣 A 的最小多項式 $\psi(\lambda)$ 的次數。

事實上,以 $r(\lambda)$ 記 $\psi(\lambda)$ 除 $(\lambda+1)^{n-1}$ 後所得出的餘式。那末由於(1)知 $r(A)>0$。因爲 $r(\lambda)$ 的次數小於 m, 故從所得出的不等式,推知對於任何 $(1\leqslant)\ i,\ k\ (\leqslant n)$ 至少有一個非負數

$$\delta_{ik},\ a_{ik},\ a_{ik}^{(2)},\ \cdots,\ a_{ik}^{(m-1)}$$

不等於零。因爲在 $i\neq k$ 時有 $\delta_{ik}=0$, 故得關係(3)中第一種關係。(對

於 $i=k$ 的)第二個關係可以類似的得出，如果換不等式 $r(A)>0$ 為不等式 $Ar(A)>0$❶。

註　引的這一個推論證明了，在不等式(1)中可以換數 $n-1$ 為數 $m-1$。

§2. 不可分離非負矩陣的影譜性質

1. 配朗在1907年建立了正矩陣的影譜(亦即特徵數與特徵向量)的卓越性質❷。

定理1(配朗)　正矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 常有實的而且是正的特徵數 r，他是特徵方程的單根而且大於所有其他特徵數的模。這個"極"大特徵數 r 對應於矩陣 A 的一個特徵向量 $z=(z_1, z_2, \cdots, z_n)$，其坐標都是正的：$z_i>0(i=1, 2, \cdots, n)$❸。

正矩陣是不可分離非負矩陣的一種特殊形狀。勿勞別涅斯❹推廣了配朗定理，研究不可分離非負矩陣的影譜性質。

定理2(勿勞別涅斯)　不可分離非負矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 常有正特徵數 r，他是特徵方程的一個單根。所有其他特徵數的模不能超過數 r。"極大"特徵數 r 對應於一個坐標都是正數的特徵向量。

如果此時 A 有 h 個特徵數 $\lambda_0=r, \lambda_1, \cdots, \lambda_{h-1}$，他們的模都等於 r，那末這些數都彼此不同而且是方程

$$\lambda^h-r^h=0 \qquad (4)$$

的根，且如視矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 的整個影譜 $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{n-1}$ 為複 λ-平面上

❶ 不可分離的非負矩陣與正矩陣的乘積永遠是一個正矩陣。

❷ 參考[142a, b]，還有[7]，100頁。

❸ 因為數 r 是一個單重特徵數，所以對應於這個特徵數的特徵向量 z，如果不計純量因子時，是唯一確定的。由配朗定理知向量 z 的坐標都不等於零，都是實數而且同號。乘向量 z 以 $+1$ 或 -1 可以使其坐標都為正數。此時我們稱向量(列) $z=(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ 為正的(比較定義1)。

❹ 參考[125d, e]。

的一組點，則在將這一平面旋轉 $\frac{2\pi}{h}$ 後，仍然變為他們自己。當 $h>1$ 時，矩陣 A 中次序的置換可以將其化為次之"循環"形狀：

$$A=\begin{pmatrix}0 & A_{12} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & A_{23} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{h-1,h}\\ A_{h1} & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}, \tag{5}$$

其中位於對角線上的是方子塊。

因為配朗定理是勿勞別涅斯定理的特殊情形，所以我們祇需要證明後一定理❶。首先規定某些有關的記法。

我們寫：
$$C\leqslant D \quad 或 \quad D\geqslant C,$$
其中 C 與 D 是維數同為 $m\times n$ 的實長方矩陣
$$C=\|c_{ik}\|,\ D=\|d_{ik}\| \quad (i=1,2,\cdots,m;\ k=1,2,\cdots,n),$$
充分必要的是
$$c_{ik}\leqslant d_{ik} \quad (i=1,2,\cdots,m;\ k=1,2,\cdots,n)。 \tag{6}$$

如果在所有的不等式（6）中都可以除去等號，那末我們寫：
$$C<D \quad 或 \quad D>C。$$

特別的，$C\geqslant 0$（$C>0$）表示矩陣 C 的所有元素都是非負的（正的）。

此外，以 C^{+} 記 mod C，亦即將矩陣 C 中所有的元素都換為其模所得出的矩陣。

2. 勿勞別涅斯定理的證明❷。對於固定的實向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant 0$（$x\neq 0$）我們命：
$$r_x=\min_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{(Ax)_i}{x_i} \quad \left[(Ax)_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k;\ i=1,2,\cdots,n\right];$$
此處對於極小的定義，須除去使得 $x_i=0$ 的足數值 i。顯然 $r_x\geqslant 0$ 而且 r_x 是適合次之不等式的諸實數 ρ 的最大數

❶ 配朗定理的直接證明可參考[7]，100 頁以後。

❷ 此處所述的證明見維拉恩達脫[153]。

$$\rho x \leqslant Ax。$$

我們來證明，函數 r_x 對於某一向量 $z\geqslant 0$ 達到他的最大值 r：

$$r = r_z = \max_{(x\geqslant 0)} r_x = \max_{(x\geqslant 0)} \min_{1\leqslant i\leqslant n} \frac{(Ax)_i}{x_i}。 \quad (7)$$

從 r_x 的定義知在乘向量 $x\geqslant 0 (x\neq 0)$ 以數 $\lambda>0$ 時，r_x 的值並無改變。故在找出函數 r_x 的極大值時，可以把向量 x 限制於適合關係

$$x\geqslant 0, \quad (xx) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$$

的諸向量所構成的閉集合 M 中。

如果函數 r_x 在集合 M 上連續，那末其極大值的存在是保險的。函數 r_x 在任一"點" $x>0$ 是連續的，但在集合 M 的邊界點，其中有個坐標變為零時，可能不再連續。所以我們代替集合 M，引進由次形全部向量 y 所構成的集合 N

$$y = (E+A)^{n-1}x \quad (x\in M)。$$

有如集合 M，集合 N 是有界限的閉集合，且由引1是為**正向量**所構成的。

再者，乘不等式

$$r_x x \leqslant Ax$$

的兩節以 $(E+A)^{n-1}>0$，我們得出：

$$r_x y \leqslant Ay \quad [y=(E+A)^{n-1}x]。$$

故從 r_y 的定義推得：

$$r_x \leqslant r_y。$$

因此，在求出 r_x 的極大值時，我們可以換集合 M 為僅由正向量所構成的集合 N。在有界限的閉集合 N 上函數 r_x 是連續的，故對某一向量 $z>0$，他能達到他的最大值。

任意向量 $z\geqslant 0$ 適合等式

$$r_z = r \quad (8)$$

的稱為**極端的**。

現在來證明：(1)等式(7)所確定的數 r 是一個正數而且是矩陣 A 的特徵數，(2)任何極端向量 z 是正的而且是矩陣 A 對於特徵數 r 的特徵向量，亦即

$$r>0,\ z>0,\ Az=rz。\tag{9}$$

事實上，如果 $u=(\underbrace{1, 1, \cdots, 1}_{n})$，那末 $r_u=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}$。但此時 $r_u>0$，因爲不可分離矩陣沒有一個行中的元素能夠全等於零。故有 $r>0$，因爲 $r\geqslant r_u$。再設

$$x=(E+A)^{n-1}z。\tag{10}$$

那末根據引 1，知 $x>0$。現在假設 $Az-rz\neq 0$。那末由(1)，(8)與(10)，我們順次得出：

$$Az-rz\geqslant 0,\ (E+A)^{n-1}(Az-rz)>0,\ Ax-rx>0。$$

最後一個不等式與數 r 的定義衝突，因爲從這個不等式對於足夠小的 $\varepsilon>0$ 將得出 $Ax-(r+\varepsilon)x>0$，亦即 $r_x\geqslant r+\varepsilon>r$。故有 $Az=rz$。但此時

$$0<x=(E+A)^{n-1}z=(1+r)^{n-1}z,$$

故推得：$z>0$。

現在來證明，所有特徵數的模不能超過 r。設

$$Ay=\alpha y\quad (y\neq 0)。\tag{11}$$

取等式(11)左右兩節的模，我們得出[1]：

$$|\alpha|y^+\leqslant Ay^+。\tag{12}$$

故有
$$|\alpha|\leqslant r_{y^+}\leqslant r。$$

我們假設特徵數 r 對應於某一特徵向量 y：

$$Ay=ry\quad (y\neq 0)。$$

那末在(11)與(12)中取 $\alpha=r$，知 y^+ 是一個極端向量，因而 $y^+>0$，亦即 $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，其中 $y_i\neq 0\ (i=1, 2, \cdots, n)$。故知，特徵數 r

[1] 關於符號 y^+ 參考本節 1 的末尾。

祇對應於一個特徵方向，因爲在有兩個線性無關的特徵向量 z 與 z_1 存在時，我們可以選取數 c 與 d 使得向量 $y=cz+dz_1$ 至少有一個零坐標，而這是已經證明不能成立的。

在討論中引進特徵矩陣 $\lambda E-A$ 的附加矩陣：

$$B(\lambda)=\|B_{ik}(\lambda)\|_1^n=\Delta(\lambda)(\lambda E-A)^{-1},$$

其中 $\Delta(\lambda)$ 爲矩陣 A 的特徵多項式，而 $B_{ik}(\lambda)$ 爲行列式 $\Delta(\lambda)$ 中元素 $\lambda\delta_{ki}-a_{ki}$ 的代數餘子式。由於特徵數 r 祇對應於一個特徵向量（不計常數因子）$z=(z_1, z_2, \cdots, z_n)$，其中 $z_1>0$, $z_2>0$, $\cdots$, $z_n>0$，推知 $B(r)\neq 0$，且在矩陣 $B(r)$ 的任一非零列中所有不爲零的元素都是同號的。對於矩陣 $B(r)$ 的行亦有同樣的情形，因爲在上述推理中可以換矩陣 A 爲其轉置矩陣 A'。從所述的矩陣 A 中行與列的性質，推知所有 $B_{ik}(r)$ $(i, k=1, 2, \cdots, n)$ 都不等於零且有相同的符號 σ。因此，

$$\sigma\Delta'(r)=\sigma\sum_{i=1}^{n}B_{ii}(r)>0,$$

亦即 $\Delta'(r)\neq 0$ 而且 r 是特徵方程 $\Delta(\lambda)=0$ 的單根。

因爲 r 是多項式 $\Delta(\lambda)=\lambda^n+\cdots$ 的極大根，所以當 $\lambda\geqslant r$ 時，$\Delta(\lambda)$ 是增加的。故 $\Delta'(r)>0$ 而 $\sigma=1$，亦即

$$B_{ik}(r)>0 \quad (i, k=1, 2, \cdots, n)。 \tag{13}$$

3. 轉移到勿勞別涅斯定理第二部分的證明，我們用及次之有趣味的引❶：

引 2. 如果 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 與 $C=\|c_{ik}\|_1^n$ 是兩個階同爲 n 的方陣，而且 A 是一個不可分離矩陣，且有

$$C^+\leqslant A❷, \tag{14}$$

那末在矩陣 C 的任一特徵數 γ 與矩陣 A 的極大特徵數 r 之間有不等式

$$|\gamma|\leqslant r \tag{15}$$

❶ 參考[153]。

❷ C 是一個複矩陣，而 $A\geqslant 0$。

存在。

在關係(15)中等號成立的充分必要條件是

$$C = e^{i\varphi} D A D^{-1}, \tag{16}$$

其中 $e^{i\varphi}=\dfrac{\gamma}{r}$，而 D 是一個對角形矩陣，其對角線上諸元素的模都等於 $1\ (D^{+}=E)$。

引的證明　以 y 記對應於特徵數 γ 的矩陣 C 的特徵向量：

$$Cy=\gamma y \quad (y \neq 0)。 \tag{17}$$

由(14)與(17)我們求得：

$$|\gamma|\, y^{+} \leqslant C^{+} y^{+} \leqslant A y^{+}。 \tag{18}$$

故有

$$|\gamma| \leqslant r_{y^{+}} \leqslant r。$$

現在來詳細討論 $|\gamma|=r$ 這一情形，在此時由(18)知 y^{+} 是矩陣 A 的極端向量，因而 $y^{+}>0$ 且知 y^{+} 是矩陣 A 對於特徵數 r 的特徵向量。故關係(18)有次之形狀：

$$Ay^{+}=C^{+}y^{+}=ry^{+}, \quad y^{+}>0。 \tag{19}$$

因此，由(14)得：

$$C^{+}=A。 \tag{20}$$

設 $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，其中

$$y_j=|y_j|\, e^{i\psi_j} \quad (j=1, 2, \cdots, n)。$$

以次之等式來定出對角形矩陣 D：

$$D=\{e^{i\psi_1}, e^{i\psi_2}, \cdots, e^{i\psi_n}\}。$$

那末

$$y=Dy^{+}。$$

在(17)式中代 y 以這一個表示式且命 $\gamma=re^{i\varphi}$，易知：

$$Fy^{+}=ry^{+}, \tag{21}$$

其中

$$F=e^{-i\varphi}D^{-1}CD。 \tag{22}$$

比較(19)與(21)，我們得出：

$$Fy^{+}=C^{+}y^{+}=Ay^{+}。 \tag{23}$$

但由(22)與(20)，得

$$F^{+}=C^{+}=A_{\circ}$$

故由(23)我們得出：

$$Fy^{+}=F^{+}y^{+}{\circ}$$

因為 $y^{+}>0$，所以這個等式祇有在

$$F=F^{+}$$

時始能成立，亦即

$$e^{-i\varphi}D^{-1}CD=A_{\circ}$$

故有

$$C=e^{i\varphi}DAD^{-1}{\circ}$$

我們的引已經證明。

4. 回到勿勞別涅斯定理且應用所證明的引於不可分離矩陣 $A\geqslant 0$，他的特徵數恰好有 h 個有極大模 r：

$$\lambda_0=re^{i\varphi_0},\ \lambda_1=re^{i\varphi_1},\cdots,\ \lambda_{h-1}=re^{i\varphi_{h-1}}$$
$$(0=\varphi_0<\varphi_1<\varphi_2<\cdots<\varphi_{h-1}<2\pi)_{\circ}$$

那末，在引中取 $C=A$，$\gamma=\lambda_k$，對於任何 $k=0, 1, \cdots, h-1$ 都有：

$$A=e^{i\varphi_k}D_kAD_k^{-1}, \tag{24}$$

其中 D_k 是一個對角形矩陣且有 $D_k^{+}=E_{\circ}$

仍設 z 為對應於極大特徵數 r 矩陣 A 的正特徵向量：

$$Az=rz\quad(z>0)_{\circ} \tag{25}$$

那末，命

$$\overset{k}{y}=D_kz\quad(\overset{k}{y}{}^{+}=z>0), \tag{26}$$

由(25)與(26)求得：

$$A\overset{k}{y}=\lambda_k\overset{k}{y}\quad(\lambda_k=re^{i\varphi_k};\ k=0, 1, \cdots, h-1)_{\circ} \tag{27}$$

後諸等式證明，為(26)式所確定的向量 $\overset{0}{y}, \overset{1}{y}, \cdots, \overset{h-1}{y}$ 是矩陣 A 對於特徵數 $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{h-1}$ 的特徵向量。

由(24)知不僅 $\lambda_0=r$ 而且矩陣 A 中每一個特徵數 $\lambda_1, \cdots, \lambda_{h-1}$ 都

是單重的。故特徵向量 $\overset{k}{y}$ 說明，如不計純量因子，矩陣 $D_k(k=0,1,\cdots,h-1)$ 是完全確定的。爲了唯一確定矩陣 $D_0, D_1, \cdots, D_{h-1}$，我們選取這些矩陣對角線上第一個元素等於 1。此時 $D_0=E$ 而 $\overset{0}{y}=z>0$。

再者，由(24)得：

$$A=e^{i(\varphi_j\pm\varphi_k)}D_jD_k^{\pm1}AD_k^{\mp1}D_j^{-1}\quad (j,k=0,1,\cdots,h-1)。$$

故類似於上述推理，知向量

$$D_jD_k^{\pm1}z$$

是矩陣 A 對應於特徵數 $re^{i(\varphi_j\pm\varphi_k)}$ 的特徵向量。

故 $e^{i(\varphi_j\pm\varphi_k)}$ 與數 $e^{i\varphi_l}$ 中某兩個重合而矩陣 $D_jD_k^{\pm1}$ 與其對應矩陣 D_l 重合，亦即對於某二數 $(0\leqslant)\ l_1, l_2(\leqslant h-1)$ 有

$$e^{i(\varphi_j+\varphi_k)}=e^{i\varphi_{l_1}},\ e^{i(\varphi_j-\varphi_k)}=e^{i\varphi_{l_2}}$$

$$D_jD_k=D_{l_1},\ D_jD_k^{-1}=D_{l_2}。$$

這樣一來，數 $e^{i\varphi_0}, e^{i\varphi_1},\cdots,e^{i\varphi_{h-1}}$ 與其對應的對角形矩陣 $D_0, D_1,\cdots,D_{h-1}$ 構成兩個彼此同構的阿柏爾乘羣。

在每一個由 h 個不同元素所構成的有限羣中，任一元素的 h 次乘冪都等於羣的么元素❶。故 $e^{i\varphi_0}, e^{i\varphi_1},\cdots,e^{i\varphi_{h-1}}$ 都是 1 的 h 次根。因爲有 h 個 1 的不同的根存在，而 $\varphi_0=0<\varphi_1<\varphi_2<\cdots<\varphi_{h-1}<2\pi$，所以

$$\varphi_k=\frac{2k\pi}{h},\quad (k=0,1,2,\cdots,h-1)$$

且有

$$e^{i\varphi_k}=\varepsilon^k\quad (\varepsilon=e^{i\varphi_1}=e^{\frac{2\pi}{h}i};\ k=0,1,\cdots,h-1),\tag{28}$$

$$\lambda_k=r\varepsilon^k\quad (k=0,1,\cdots,h-1)。\tag{29}$$

數 $\lambda_0, \lambda_1,\cdots,\lambda_{h-1}$ 構成方程(4)的全部根。

對應於(28)我們有❷：

$$D_k=D^k\quad (D=D_1;\ k=0,1,\cdots,h-1)。\tag{30}$$

❶ 參考，例如，[34]，324 頁。

❷ 此處我們所根據的是乘羣 $e^{i\varphi_0}, e^{i\varphi_1},\cdots,e^{i\varphi_{h-1}}$ 與 $D_0, D_1,\cdots,D_{h-1}$ 的同構性。

現在等式(24)給予我們(當 $k=1$ 時)：

$$A = e^{i\frac{2\pi}{h}} DAD^{-1}。 \tag{31}$$

故知乘矩陣 A 以 $e^{\frac{2\pi i}{h}}$ 後變為他的一個相似矩陣，因而在乘矩陣 A 的全部 n 個特徵數以 $e^{i\frac{2\pi}{h}}$ 後，仍然變為他們自己[1]。

再者，

$$D^h = E,$$

故 D 中對角線上所有元素都是 1 的 h 次根。A(對應的 D)中次序的置換可以使得矩陣 D 有次之準對角形：

$$D = \{\eta_0 E_0,\ \eta_1 E_1,\ \cdots,\ \eta_{s-1} E_{s-1}\}, \tag{32}$$

其中 $E_0, E_1, \cdots, E_{s-1}$ 都是么矩陣，而

$$\eta_p = e^{i\psi_p},\ \psi_p = n_p \frac{2\pi}{h}$$

(n_p 都是整數；$p=0, 1, \cdots, s-1$；$0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_{s-1} < h$)。
顯然，有 $s \leqslant h$。

寫 A 為分塊形[與(32)相對應的]

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{ss} \end{pmatrix}, \tag{33}$$

我們換等式(31)為一組等式

$$\varepsilon A_{pq} = \frac{\eta_{q-1}}{\eta_{p-1}} A_{pq} \quad (p,\ q = 1,\ 2,\ \cdots,\ s;\ \varepsilon = e^{\frac{2\pi}{h}i})。 \tag{34}$$

故對於任何 p 與 q，或有 $\frac{\eta_{q-1}}{\eta_{p-1}} = \varepsilon$、或有 $A_{pq} = 0$。

取 $p=1$。因為所有矩陣 $A_{12}, A_{13}, \cdots, A_{1s}$ 不可能同時等於零，所

[1] 數 h 是有這個性質的最大整數，因為矩陣 A 恰好有 h 個特徵數有極大值 r。此外，由(31)推知矩陣的全部特徵數可以分為 $\mu_0, \mu_0\varepsilon, \cdots, \mu_0\varepsilon^{h-1}$ 形的組(每組中有 h 個數)，且在每一個這種組的範圍內，任何一個特徵數所對應的初級因子有相同的次數。這些組中有一組構成方程(4)的根：$\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{h-1}$。

以在數 $\frac{\eta_1}{\eta_0}, \frac{\eta_2}{\eta_0}, \cdots, \frac{\eta_{s-1}}{\eta_0}$ $(\eta_0=1)$中至少有一個數必須等於 ε。這祇有在 $\eta_1=1$ 時始能成立。因此 $\frac{\eta_1}{\eta_0}=\varepsilon$ 而 $A_{11}=A_{13}=\cdots=A_{1s}=0$，在(34)中取 $p=2$，類似的求得 $n_2=2$ 而 $A_{21}=A_{22}=A_{24}=\cdots=A_{2s}=0$，諸如此類。結果得出：

$$A=\begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & A_{23} \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots A_{s-1,s} \\ A_{s1} & A_{s2} & A_{s3} \cdots A_{ss} \end{pmatrix}。$$

此處 $n_1=1, n_2=2, \cdots, n_{s-1}=s-1$。但當 $p=s$ 時，在等式(34)的右節中有因子

$$\frac{\eta_{q-1}}{\eta_{s-1}}=e^{(q-s)\frac{2\pi}{h}i} \quad (q=1, 2, \cdots, s)。$$

這些數裏面有一個數應當等於 $\varepsilon=e^{\frac{2\pi}{h}i}$。這祇有在 $s=h$ 與 $q=1$ 時始能成立，因而 $A_{s2}=\cdots=A_{ss}=0$。

這樣一來，

$$D=\{E_0, \varepsilon E_1, \varepsilon^2 E_2, \cdots, \varepsilon^{h-1}E_{h-1}\}$$

而矩陣 A 有(5)的形狀。

勿勞別涅斯定理已經完全證明。

5. 對於勿勞別涅斯定理有次諸注意之點。

註 1. 在勿勞別涅斯定理的證明中，我們同時建立了，對於有極大特徵數 r 的不可分離矩陣 $A\geqslant 0$，附加矩陣 $B(\lambda)$ 當 $\lambda=r$ 時是正的：

$$B(r)>0, \tag{35}$$

亦即

$$B_{ik}(r)>0 \quad (i, k=1, 2, \cdots, n), \tag{35'}$$

其中 $B_{ik}(r)$ 是行列式 $|rE-A|$ 中元素 $r\delta_{ki}-a_{ki}$ 的代數餘子式。

現在來討論導出附加矩陣(參考第四章，§ 6)

$$C(\lambda)=\frac{B(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)},$$

其中 $D_{n-1}(\lambda)$ 是全部多項式 $B_{ik}(\lambda)$ $(i, k=1, 2, \cdots, n)$ 的最大公因式。此時由(35′)知 $D_{n-1}(r)\neq 0$。多項式 $D_{n-1}(\lambda)$ 的全部根都是不同於 r 的特徵數❶。故 $D_{n-1}(\lambda)$ 的所有根或爲複數，或爲實數，但須小於 r。因此 $D_{n-1}(r)>0$，結合(35)式給出：

$$C(r)=\frac{B(r)}{D_{n-1}(r)}>0\text{❷}。\tag{36}$$

註 2. 不等式(35′)可以定出極大特徵數 r 的值的界限。

引進記法

$$s_i=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\ (i=1, 2, \cdots, n),\ s=\min_{1\leqslant i\leqslant n} s_i,\ S=\max_{1\leqslant i\leqslant n} s_i。$$

那末對於不可分離矩陣 $A\geqslant 0$

$$s\leqslant r\leqslant S,\tag{37}$$

而且在 r 左邊或右邊的等號祇在 $s=S$ 時始能成立，亦即在此時所有的"小字和" $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 都是彼此相等的❸。

事實上，在特徵行列式

$$\Delta(r)=\begin{vmatrix} r-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & r-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & r-a_{nn} \end{vmatrix}$$

中把前 $n-1$ 個列加到最後的列上而後照最後的列來展開。我們得出：

$$\sum_{k=1}^{n}(r-s_k)B_{nk}(r)=0。$$

故由(35′)推得不等式(37)。

註 3. 不可分離矩陣 $A\geqslant 0$ 不可能有兩個線性無關的非負特徵向量。

---

❶ $D_{n-1}(\lambda)$ 是特徵多項式 $D_n(\lambda)\equiv|\lambda E-A|$ 的因子。

❷ 在次節中將證明，對於不可分離矩陣對於任何實數 $\lambda\geqslant r$ 都有 $B(\lambda)>0$, $C(\lambda)>0$。

❸ 對於 r 建立比 (s, S) 更窄小的區間的工作有[134]，[138a]與[121, IV]。

事實上，假設除開對應於極大特徵數 r 的正特徵向量 $z>0$ 以外，矩陣 A 還有對應於特徵數 α 的特徵向量 $y\geqslant 0$（且與 z 線性無關）：

$$Ay=\alpha y \quad (y\neq 0;\ y\geqslant 0)。$$

因為 r 是特徵方程 $|\lambda E-A|=0$ 的單根，故有

$$\alpha\neq r。$$

以 u 記轉置矩陣 A' 對於 $\lambda=r$ 的正特徵向量：

$$A'u=ru \quad (u>0)。$$

那末❶
$$r(y,\ u)=(y,\ A'u)=(Ay,\ u)=\alpha(y\ u);$$

故因 $\alpha\neq r$，得：

$$(y,\ u)=0,$$

但在 $u>0$，$y\geqslant 0$，$y\neq 0$ 時這是不可能的。

註 4. 在勿勞別涅斯定理的證明中我們建立了不可分離矩陣 $A\geqslant 0$ 的極大特徵數 r 的次之特性：

$$r=\max_{(x\geqslant 0)} r_x,$$

其中 r_x 是使得不等式 $\rho x\leqslant Ax$ 能夠適合的數 ρ 中的最大數。換句話說，因為 $r_x=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{(Ax)_i}{x_i}$，所以

$$r=\max_{(x\geqslant 0)}\min_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{(Ax)_i}{x_i}。$$

全相類似的可以對於任何向量 $x\geqslant 0(x\neq 0)$ 定出適合不等式

$$\sigma x\geqslant Ax$$

的諸 σ 中最小的數 r^x，亦卽是：

$$r^x=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{(Ax)_i}{x_i}。$$

此處，如果對於某一個 i 有關係式 $x_i=0$，$(Ax)_i\neq 0$，那末作為 $r^x=$ $=+\infty$。

❶ 如果 $y=(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)$ 與 $u=(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n)$，那末我們了解 $(y,\ u)$ 為"無向積" $y'u=\sum\limits_{i=1}^{n}y_iu_i$。此時 $(y,\ A'u)=y'A'u$ 而 $(Ay,\ u)=(Ay)'u=y'A'u$。

有如對於函數 r_x 所做過的一樣，我們證明函數 r^x，對於某一向量 $v\geqslant 0$，達到他的極小值 $\hat{r}$。

我們來證明，為等式

$$\hat{r}=\min_{(x\geqslant 0)} r^x=\min_{(x\geqslant 0)}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{(Ax)_i}{x_i} \tag{38}$$

所確定的數 $\hat{r}$ 與數 r 重合，而能達到這個極小值的向量 $v\geqslant 0(v\neq 0)$ 是矩陣 A 當 $\lambda=r$ 時的特徵向量。

事實上，

$$\hat{r}v-Av\geqslant 0\quad (v\geqslant 0,\ v\neq 0)。$$

我們假設此處的符號 $\geqslant$ 不能換為等號。那末根據引 1

$$(E+A)^{n-1}(\hat{r}v-Av)>0,\ (E+A)^{n-1}v>0。\tag{39}$$

命
$$u=(E+A)^{n-1}v>0,$$
就有：
$$\hat{r}u>Au,$$
因而對於足夠小的 $\varepsilon>0$，得：

$$(\hat{r}-\varepsilon)u>Au\quad (u>0),$$

這與 $\hat{r}$ 的定義衝突。因此，

$$Av=\hat{r}v。$$

但是
$$u=(E+A)^{n-1}v=(1+\hat{r})^{n-1}v。$$
故由 $u>0$ 得出 $v>0$。

因此根據註 3 知有：

$$\hat{r}=r。$$

這樣一來，對於數 r 我們有兩種特性：

$$r=\max_{(x\geqslant 0)}\min_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{(Ax)_i}{x_i}=\min_{(x\geqslant 0)}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{(Ax)_i}{x_i},\tag{40}$$

而且證明了，$\max\limits_{(x\geqslant 0)}$ 或 $\min\limits_{(x\geqslant 0)}$ 祇是對於 $\lambda=r$ 時的正特徵向量始能達到。

從所建立的數 r 的特性推得不等式[1]

---

[1] 參考[123]與[7]，325 頁及其以後諸頁。

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{(Ax)_i}{x_i}\leqslant r\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{(Ax)_i}{x_i}\quad(x\geqslant 0,\ x\neq 0)。\tag{41}$$

註 5. 因爲在(40)式中 $\max_{(x\geqslant 0)}$ 與 $\min_{(x\geqslant 0)}$ 祇是對於不可分離矩陣 $A\geqslant 0$ 的正特徵向量常能達到，所以由不等式

$$rz\leqslant Az,\ z\geqslant 0,\ z\neq 0$$

或

$$rz\geqslant Az,\ z\geqslant 0,\ z\neq 0$$

常能得出：

$$Az=rz,\ z>0。$$

§3. 可分離矩陣

1. 在上節中所建立的不可分離矩陣非負矩陣的影譜性質，在轉移到可分離矩陣時，不再有效。但是，因爲任一非負矩陣 $A\geqslant 0$ 常可表爲不可分離的正矩陣序列 A_m 的極限：

$$A=\lim_{m\to\infty}A_m\quad(A_m>0,\ m=1,2,\cdots),\tag{42}$$

所以不可分離矩陣的某些影譜性質在較弱的形式對於可分離矩陣亦能成立。

對於任意非負矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 我們來證明次之定理：

定理 3. 非負矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 永遠有一個這樣的非負特徵數 r，矩陣 A 所有特徵數的模都不能超過 r。這個"極大"特徵數 r 對應於非負特徵向量

$$Ay=ry\quad(y\geqslant 0,\ y\neq 0)。$$

對於附加矩陣 $B(\lambda)=\|B_{ik}(\lambda)\|_1^n=(\lambda E-A)^{-1}\Delta(\lambda)$ 有不等式

$$B(\lambda)\geqslant 0,\ \frac{d}{d\lambda}B(\lambda)\geqslant 0\ \ 如其\ \lambda\geqslant r。\tag{43}$$

證明 設對矩陣 A 有表示式(42)。以 $r^{(m)}$ 與 $y^{(m)}$ 各記正矩陣 A_m 的極大特徵數與對應於這些數的標準化❶正特徵向量：

$$A_my^{(m)}=r^{(m)}y^{(m)}\quad[(y^{(m)}y^{(m)})=1,\ y^{(m)}>0;\ m=1,2,\cdots]。\tag{44}$$

❶ 我們了解標準化向量爲列 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，其中 $(yy)=\sum_{i=1}^n y_i^2=1$。

此時由(42)知有極限

$$\lim r^{(m)}=r$$

存在，其中 r 為矩陣 A 的特徵數。由於 $r^{(m)}>0$ 與 $r^{(m)}>|\lambda_0^{(m)}|$，其中 $\lambda_0^{(m)}$ 為矩陣 A_m 的任一特徵數($m=1, 2, \cdots$)，取極限我們得出：

$$r>0, \ r\geqslant|\lambda_0|,$$

其中 λ_0 為矩陣 A 的任一特徵數。同樣的取極限，代替(35)給予我們

$$B(r)\geqslant 0。\tag{45}$$

再者，從標準化特徵向量序列 $y^{(m)}$ ($m=1, 2, \cdots$) 可以選出子序列 $y^{(m_p)}$ ($p=1, 2, \cdots$)收斂於某一標準化(因而不等於零的)向量 y。在等式(44)的兩節對於所予的 m 的子序數 m_p ($p=1, 2, \cdots$) 取極限，我們得出：

$$Ay=ry \quad (y\geqslant 0, \ y\neq 0)。$$

對於階 n 用數學歸納法來建立不等式(43)。當 $n=1$ 時這些不等式是很明顯的❶。我們假設他們對於階 $<n$ 的矩陣是真確的，而對於 n 級矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 來建立(43)式。

把特徵行列式 $\Delta(\lambda)=|\lambda E-A|$ 按照其最後一行與最後一列來展開，我們得出：

$$\Delta(\lambda)=(\lambda-a_{nn})B_{nn}(\lambda)-\sum_{i,k=1}^{n-1}B_{ki}^{(n)}(\lambda)a_{in}a_{nk}。\tag{46}$$

此處 $B_{nn}(\lambda)=|\lambda\delta_{ik}-a_{ik}|_1^{n-1}$ 是 $n-1$ 級"截邊"非負矩陣的特徵行列式，而 $B_{ki}^{(n)}(\lambda)$為行列式 $B_{nn}(\lambda)$中元素 $\lambda\delta_{ik}-a_{ik}$ 的代數餘子式($i, k=1, 2, \cdots, n-1$)。以 r_n 記 $B_{nn}(\lambda)$ 的極大非負根。那末，在(46)中取 $\lambda=r_n$，且注意，由於歸納法的假設

$$B_{ki}^{(n)}(r_n)\geqslant 0 \quad (i, k=1, 2, \cdots, n-1),$$

我們由(46)得出：

$$\Delta(r_n)\leqslant 0。$$

---

❶ 事實上，因為 $B(\lambda)=(\lambda E-A)^{-1}\Delta(\lambda)$，所以當 $n=1$ 時，$B(\lambda)=E$，$\frac{d}{d\lambda}B(\lambda)=0$。

另一方面，$\Delta(\lambda)=\lambda^n+\cdots$ 故有 $\Delta(+\infty)=+\infty$。所以 r_n 或爲 $\Delta(\lambda)$的根，或者小於 $\Delta(\lambda)$的某一實根。在兩種情形都有

$$r_n \leqslant r。$$

因爲在矩陣 A 中經過次序的置換可以取任何 $n-1$ 級主子式 $B_{jj}(\lambda)$ 來代替 $B_{nn}(\lambda)$，故以 r_j 記多項式 $B_{jj}(\lambda)$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$的極大根，就有：

$$r_j \leqslant r \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)。\tag{47}$$

再者，以 $B_{ik}(\lambda)$表特徵矩陣 $\lambda E-A$ 的 $n-1$ 級子式與 $(-1)^{i+k}$ 的乘積。對 λ 來微分這個行列式，我們容易得出：

$$\frac{d}{d\lambda}B_{ik}(\lambda)=\sum B_{ik}^{(j)}(\lambda) \quad (i,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1),\tag{48}$$

其中 $B^{(j)}(\lambda)=\|B_{ik}^{(j)}(\lambda)\|$$(i\neq j,\ k\neq j;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$是 $n-1$ 級矩陣$\|a_{ik}\|$ $(i,\ k=1,\ 2,\cdots,\ j-1,\ j+1,\ \cdots,\ n)$的附加矩陣。但由歸納法的假設

$$B^{(j)}(\lambda)\geqslant 0 \text{ 如其 } \lambda\geqslant r_j \quad (j=1,\ 2,\cdots,\ n),$$

故由(47)與(48)有

$$\frac{d}{d\lambda}B(\lambda)\geqslant 0 \text{ 如其 } \lambda\geqslant r。\tag{49}$$

由(45)與(49)得出：

$$B(\lambda)\geqslant 0 \text{ 如其 } \lambda\geqslant r。$$

定理已經完全證明。

註　對於趨於極限的(42)式，不等式(37)仍然有效。所以這些不等式對於任何非負矩陣都能成立。但是在(37)中等號能成立的條件，對於可分離矩陣是不真確的。

2. 從定理 3 可推出一系列的重要命題：

1°　如果 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 是一個有極大特徵數 r 的非負矩陣，而$C(\lambda)$爲其導出附加矩陣，那末

$$C(\lambda)\geqslant 0 \text{ 如其 } \lambda\geqslant r。\tag{50}$$

事實上，

$$C(\lambda)=\frac{B(\lambda)}{D_{n-1}(\lambda)}, \tag{51}$$

其中 $D_{n-1}(\lambda)$ 為矩陣 $B(\lambda)$ 中所有元素的最大公因式。因為 $D_{n-1}(\lambda)$ 是特徵多項式 $\Delta(\lambda)$ 的因式而且 $D_{n-1}(\lambda)=\lambda^l+\cdots$，所以

$$D_{n-1}(\lambda)>0 \text{ 如其 } \lambda\geqslant r。 \tag{52}$$

由(43)，(51)與(52)得出(50)。

2° 如果 $A\geqslant 0$ 是一個有極大特徵數 r 的不可分離矩陣，那末

$$B(\lambda)>0,\ C(\lambda)>0 \text{ 如其 } \lambda\geqslant r。 \tag{53}$$

事實上，根據(35)，$B(r)>0$。但此時當 $\lambda\geqslant r$ 時有 $\frac{d}{d\lambda}B(\lambda)\geqslant 0$ [參考(43)]。故得：

$$B(\lambda)>0 \text{ 如其 } \lambda\geqslant r。 \tag{54}$$

(53)的第二個不等式可以從(51)，(52)與(54)來得出。

3° 如果 $A\geqslant 0$ 是一個有極大特徵數 r 的不可分離矩陣，那末

$$(\lambda E-A)^{-1}>0 \text{ 如其 } \lambda>r。 \tag{55}$$

這個不等式可以從公式

$$(\lambda E-A)^{-1}=\frac{B(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

來推出，因為當 $\lambda>r$ 時有 $B(\lambda)>0$ 與 $\Delta(\lambda)>0$。

4° 非負矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 的(階 $<n$ 的)任一主子式❶的極大特徵數 r' 不能超過矩陣 A 的極大特徵數 r：

$$r'\leqslant r。 \tag{56}$$

如果 A 是一個不可分離矩陣，那末在(56)式中可以除去等號。

如果 A 是一個可分離矩陣，那末至少對於一個主子式在(56)中等號能夠成立。

事實上，不等式(56)對於任何 $n-1$ 級主子式都能成立[參考(47)]。

❶ 此處我們了解主子式為由主子式的元素所構成的矩陣。

如果 A 是一個不可分離矩陣，那末根據(35')，$B_{jj}(r)>0$ ($j=1, 2, \cdots, n$)，因而 $r'\neq r$。

逐漸的從 $n-1$ 轉移到 $n-2$，從 $n-2$ 轉移到 $n-3$，諸如此類，我們可以證明不等式(56)對於任何級主子式都是真確的。

如果 A 是一個可分離矩陣，那末經次序的置換可以把他表爲形狀

$$A=\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}。$$

此時數 r 應當爲兩個主子式 B 與 D 中某一個的特徵數。論斷 4° 已經證明。

由 4° 推得

5° 如果 $A\geqslant 0$ 且在特徵行列式

$$\Delta(r)=\begin{vmatrix} r-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & r-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & r-a_{nn} \end{vmatrix}$$

中有些主子式變爲零(矩陣 A 是可分離的！)，那末任何包含某一零主子式的"增大"主子式亦變爲零，特別的，在 $n-1$ 級主子式

$$B_{11}(\lambda),\ B_{22}(\lambda),\ \cdots,\ B_{nn}(\lambda)$$

中至少有一個在 $\lambda=r$ 時變爲零。

由 4° 與 5° 得：

6° 矩陣 $A\geqslant 0$ 是可分離的充分必要條件，是在關係式

$$B_{ii}(r)\geqslant 0 \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

中有一個式子對於等號能夠成立。

由4° 亦可推得：

7° 如果 r 是矩陣 $A\geqslant 0$ 的極大特徵數，那末對於任何 $\lambda>r$，特徵矩陣 $A_\lambda\equiv\lambda E-A$ 的所有主子式都是正的：

$$A_\lambda\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \cdots i_p \\ i_1 & i_2 \cdots i_p \end{pmatrix}>0 \ (\lambda>r;\ 1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n;\ p=1, 2, \cdots, n)。\quad (57)$$

不難看出，相反的，從不等式(57)得出：$\lambda > r$。事實上，

$$\Delta(\lambda+\mu) = |(\lambda+\mu)E - A| = |A_\lambda + \mu E| = \sum_{k=0}^{n} S_k \mu^{n-k},$$

其中 S_k 爲特徵矩陣 $A_\lambda = \lambda E - A$ 中所有 k 級主子式的和($k=1, 2, \cdots, n$)❶。故如對於某一實數 λ，特徵數矩陣 A_λ 的全部主子式都是正的，那末對於任何 $\mu \geqslant 0$ 都有

$$\Delta(\lambda+\mu) \neq 0,$$

亦即每一個 $\geqslant \lambda$ 的數都不是矩陣 A 的特徵數。因此，

$$r < \lambda。$$

這樣一來，不等式(57)是使得數 λ 爲矩陣 A 諸特徵數的模的上界的充分必要條件❷。但並非所有不等式(57)都是彼此無關的。

矩陣 $\lambda E - A$ 是一個在對角線以外都是非正元素的矩陣❸。德.蒙.柯且略恩斯基❹證明了，對於這種矩陣，有如對稱矩陣，所有主子式都是正的這一性質可以從順序的主子式(從左上角順次列出的一級，二級，…，n 級主子式)都是正的這一性質來推出。

引3(柯且略恩斯基)　如果在實矩陣 $G = \|g_{ik}\|_1^n$ 中所有非對角線上的元素都是負的或等於零

$$g_{ik} \leqslant 0 \quad (i \neq k;\ i, k = 1, 2, \cdots, n), \tag{58}$$

而順序的主子式都是正的

$$g_{11} = G\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} > 0,\ G\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} > 0, \cdots, G\begin{pmatrix} 1 & 2 \cdots n \\ 1 & 2 \cdots n \end{pmatrix} > 0, \tag{59}$$

那末矩陣 G 的所有主子式都是正的：

---

❶ 參考第三章，§7，(58)與(57)式。

❷ 參考[96]。

❸ 不難看出，相反的，每一個在對角線以外的元素都是負的或等於零的矩陣永遠可以表爲 $\lambda E - A$ 的形狀，其中 A 爲一個非負矩陣，而 λ 爲一個實數。

❹ 參考[75a]。這篇論文對於所有非對角線上元素都有相同符號的矩陣得出一系列的結果。

$$G\begin{pmatrix} i_1 & i_2\cdots i_p \\ i_1 & i_2\cdots i_p \end{pmatrix}>0 \quad (1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n;\ p=1,\ 2,\cdots,\ n)。$$

證明　對於矩陣的階 n 取數學歸納法來證明我們的引。當 $n=2$ 時，引是成立的，因為由

$$g_{12}\leqslant 0,\ g_{21}\leqslant 0,\ g_{11}>0,\ g_{11}g_{22}-g_{12}g_{21}>0$$

得出：$g_{22}>0$。假設對於階 $<n$ 的矩陣我們的引是眞確的；來證明對於矩陣 $G=\|g_{ik}\|_1^n$，他亦是眞確的。在討論中引進加邊行列式

$$t_{ik}=G\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & k \end{pmatrix}=g_{11}g_{ik}-g_{1k}g_{i1} \quad (i,\ k=2,\ \cdots,\ n)。$$

從(58)與(59)得出：

$$t_{ik}\leqslant 0 \quad (i\neq k;\ i,\ k=2,\ \cdots,\ n)。$$

另一方面，對矩陣 $T=\|t_{ik}\|_2^n$ 應用薛爾凡斯透硬等式[第二章，§3，等式(30)]，我們得出：

$$T\begin{pmatrix} i_1 & i_2\cdots i_p \\ i_1 & i_2\cdots i_p \end{pmatrix}=$$

$$=(g_{11})^{p-1}G\begin{pmatrix} 1 & i_1 & i_2\cdots i_p \\ 1 & i_1 & i_2\cdots i_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n, \\ p=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1 \end{pmatrix}。 \quad (60)$$

故由(59)知矩陣 $T=\|t_{ik}\|_2^n$ 的順序的主子式都是正的：

$$t_{22}=T\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}>0,\ T\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}>0,\ \cdots,\ T\begin{pmatrix} 2 & 3\cdots n \\ 2 & 3\cdots n \end{pmatrix}>0。$$

這樣一來，$n-1$ 級矩陣 $T=\|t_{ik}\|_2^n$ 適合引的條件。故由歸納法的假設知矩陣 T 的所有主子式都是正的：

$$T\begin{pmatrix} i_1 & i_2\cdots i_p \\ i_1 & i_2\cdots i_p \end{pmatrix}>0 \ (2\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n;\ p=1,\ 2,\cdots,\ n-1)。$$

但此時由(60)推知矩陣 G 的所有含有第一行的主子式都是正的：

$$G\begin{pmatrix} 1 & i_1 & i_2\cdots i_p \\ 1 & i_1 & i_2\cdots i_p \end{pmatrix}>0$$

$$(2\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n;\ p=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)。 \quad (61)$$

取固定的足數$(1<)i_1<i_2<\cdots<i_{n-2}(\leqslant n)$且建立 $n-1$ 級矩陣

$$\|g_{\alpha\beta}\| \quad (\alpha,\ \beta=1,\ i_1,\ i_2,\cdots,\ i_{n-2})。 \tag{62}$$

由(61)知這個矩陣的順序的主子式都是正的：

$$g_{11}>0,\ G\begin{pmatrix}1 & i_1\\ 1 & i_1\end{pmatrix}>0,\cdots,\ G\begin{pmatrix}1 & i_1 & i_2\cdots i_{n-2}\\ 1 & i_1 & i_2\cdots i_{n-2}\end{pmatrix}>0,$$

而非對角線上的元素都是非正的：

$$g_{\alpha\beta}\leqslant 0 \quad (\alpha\neq\beta;\ \alpha,\ \beta=1,\ i_1,\ i_2,\cdots,\ i_{n-2})。$$

但是矩陣(62)的階等於 $n-1$。故由歸納法的假設，這個矩陣的所有主子式都是正的；特別的，

$$G\begin{pmatrix}i_1 & i_2\cdots i_p\\ i_1 & i_2\cdots i_p\end{pmatrix}>0$$
$$(2\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n;\ p=1,\ 2,\ \cdots,\ n-2)。 \tag{63}$$

這樣一來，矩陣 G 的所有階 $\leqslant n-2$ 的主子式都是正的。

因爲由於(63)知 $g_{22}>0$，所以我們在討論中可以引進元素 g_{22}（不是上面的 g_{11}）的二級加邊行列式：

$$t^*_{ik}=G\begin{pmatrix}2 & i\\ 2 & k\end{pmatrix} \quad (i,\ k=1,\ 3,\ \cdots,\ n)。$$

有如上面對於矩陣 T 所做的運算，對矩陣 $T^*=\|t^*_{ik}\|$ 來同樣的做，我們得出類似於不等式(61)的次之不等式：

$$G\begin{pmatrix}2 & i_1\cdots i_p\\ 2 & i_1\cdots i_p\end{pmatrix}>0 \tag{64}$$
$$(i_1<i_2<\cdots<i_p;\ i_1,\cdots,\ i_p=1,\ 3,\ \cdots,\ n;\ p=1,\ 2,\cdots,\ n-1)。$$

因爲矩陣 $G=\|g_{ik}\|_1^n$ 的任一主子式或者含有第一行，或者含有第二行，或者其階 $\leqslant n-2$，所以由不等式(61)，(63)與(64)，知矩陣 G 的所有主子式都是正的。我們的引已經證明。

所證明的引說明在條件(57)中祇是用及順序的主子式，故有次之定理：

定理 4. 爲了使得實數 λ 大於矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n\geqslant 0$ 的極大特徵數 r,

$$r<\lambda,$$

充分必要的，是對於這個值 λ，特徵矩陣 $A_\lambda\equiv\lambda E-A$ 的所有順序的主子式都是正的：

$$\lambda-a_{11}>0,$$

$$\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22}\end{vmatrix}>0,\ \cdots,\ \begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}>0。\quad (65)$$

討論這個定理的一個應用。設在矩陣 $C=\|c_{ik}\|_1^n$ 中所有非對角線上的元素都是非負的。那末對於某一個 $\lambda>0$ 可使矩陣 $A=C+\lambda E\geqslant 0$。把矩陣 C 的特徵數 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 按照其實數部分的上升次序來排列：

$$\operatorname{Re}\lambda_1\leqslant\operatorname{Re}\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\operatorname{Re}\lambda_n。$$

以 r 記矩陣 A 的極大特徵數。因爲矩陣 A 的特徵數是和 $\lambda_i+\lambda(i=1,2,\cdots,n)$，所以

$$\lambda_n+\lambda=r。$$

在所予的情形不等式 $r<\lambda$ 祇在 $\lambda_n<0$ 時始能成立，這就是說矩陣 C 的所有特徵數都有負的實數部分。寫出關於矩陣 $-C=\lambda E-A$ 的不等式 (65)，我們得出次之定理[1]：

定理 5. 爲了使得非對角線上都是非負元素

$$c_{ik}\geqslant 0\quad(i\neq k;\ i,k=1,2,\cdots,n)$$

的實矩陣 $C=\|c_{ik}\|_1^n$ 的所有特徵數都有負實數部分，充分必要的，是次諸不等式都能成立

---

[1] 參考 [96, 75B]。因爲 $C=A-\lambda E$，$A\geqslant 0$，所以 λ_n 是一個實數（這可以從等式 $\lambda_n+\lambda=r$ 來得出），而且這個特徵數對應矩陣 C 的一個非負特徵向量：$Cy=\lambda_n y(y\geqslant 0, y\neq 0)$。

$$C_{11}<0,\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}>0,\cdots,(-1)^n\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12}\cdots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}\cdots c_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ c_{n1} & c_{n2}\cdots c_{nn} \end{vmatrix}>0。\qquad(66)$$

§4. 可分離矩陣的法式

討論任一可分離矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$。經次序的置換可將其表爲形狀

$$A=\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix},\qquad(67)$$

其中 B, D 都是方陣。

如果矩陣 B 與 D 的某一個是可分離的，那末類似於(67)還可以表矩陣 A 爲形狀

$$A=\begin{pmatrix} K & 0 & 0 \\ H & L & 0 \\ F & G & M \end{pmatrix}.$$

如果矩陣 K, L, M 中某一些是可分離的，那末這種方法還可以繼續下去。其結果是經過次序的適當的置換，可以表矩陣 A 爲三角形分塊式：

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & 0\cdots\cdots 0 \\ A_{21} & A_{22}\cdots 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ A_{s1} & A_{s2}\cdots A_{ss} \end{pmatrix},\qquad(68)$$

其中位於對角線上的子塊都是不可分離的方陣。

對角線上子塊 $A_{ii}(1\leqslant i\leqslant s)$ 稱爲被隔離的，如果

$$A_{ik}=0\quad(k=1,\ 2,\cdots,\ i-1,\ i+1,\ \cdots,\ s)。$$

在矩陣(68)中經過諸子塊次序的置換(參考本章§1)可以把所有被隔離的子塊放在對角線的左上方，此後矩陣有次之形狀

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & 0\cdots 0 & 0\cdots 0 \\ 0 & A_2\cdots 0 & 0\cdots 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0\cdots A_g & 0\cdots 0 \\ A_{g+1,1} & A_{g+1,2}\cdots A_{g+1,g} & A_{g+1}\cdots 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ A_{s1} & A_{s2}\cdots A_{sg} & A_{s,g+1}\cdots A_s \end{pmatrix}; \tag{69}$$

其中 $A_1, A_2, \cdots, A_s$ 都是不可分離的矩陣，而在每一序列

$$A_{f1}, A_{f2}, \cdots, A_{f,f-1} \quad (f=g+1, \cdots, s)$$

中至少有一個矩陣不等於零。

矩陣(69)稱爲可分離矩陣 A 的法式。

我們來證明，如果不計子塊次序的置換❶，矩陣 A 的法式是唯一確定的。爲了這一目的，討論 n 維向量空間 $\boldsymbol{R}$ 中對應於矩陣 A 的線性運算子 $\boldsymbol{A}$。表矩陣 A 爲(69)形對應於分解空間 $\boldsymbol{R}$ 爲坐標子空間

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_1+\boldsymbol{R}_2+\cdots+\boldsymbol{R}_g+\boldsymbol{R}_{g+1}+\cdots+\boldsymbol{R}_s; \tag{70}$$

此處 $\boldsymbol{R}_s$, $\boldsymbol{R}_{s-1}+\boldsymbol{R}_s$, $\boldsymbol{R}_{s-2}+\boldsymbol{R}_{s-1}+\boldsymbol{R}_s$, $\cdots$, 都是運算子 $\boldsymbol{A}$ 的不變坐標子空間，而且在這些子空間中任何兩個相鄰的中間不能有居中的不變子空間存在。

我們假設，與法式(69)相平行的，所予矩陣有另一法式存在，他對應於 R 對坐標子空間的另一分解式：

$$\boldsymbol{R}=\widehat{\boldsymbol{R}}_1+\widehat{\boldsymbol{R}}_2+\cdots+\widehat{\boldsymbol{R}}_g+\widehat{\boldsymbol{R}}_{g+1}+\cdots+\widehat{\boldsymbol{R}}_t。\tag{71}$$

法式的唯一性能夠證明，如果我們證明在不計項的次序時分解式(70)與(71)彼此重合。

設不變子空間 $\widehat{\boldsymbol{R}}_t$ 與 $\boldsymbol{R}_k$ 有公共的坐標向量而與 $\boldsymbol{R}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{R}_s$ 沒有公共的坐標向量。那末 $\widehat{\boldsymbol{R}}_t$ 應當全部含於 $\boldsymbol{R}_k$ 中，因爲在相反的情形 $\widehat{\boldsymbol{R}}_t$ 將含有"較小的"不變子空間——$\widehat{\boldsymbol{R}}_t$ 與 $\boldsymbol{R}_k+\boldsymbol{R}_{k+1}+\cdots+\boldsymbol{R}_s$ 的交。再者，

❶ 並不損及法式，可以在前 g 個子塊行中取任何次序的置換。此外，有時在後 $s-g$ 個子塊行中，亦可作某種次序的置換使得該式仍能保持其標準形狀。

$\widehat{\boldsymbol{R}}_t$ 應當與 $\boldsymbol{R}_k$ 重合，因為在相反的情形不變子空間 $\widehat{\boldsymbol{R}}_t+\boldsymbol{R}_{k+1}+\cdots+\boldsymbol{R}_s$ 將介於不變子空間 $\boldsymbol{R}_k+\boldsymbol{R}_{k+1}+\cdots+\boldsymbol{R}_s$ 與 $\boldsymbol{R}_{k+1}+\cdots+\boldsymbol{R}_s$ 的中間。因為 $\boldsymbol{R}_k$ 與 $\widehat{\boldsymbol{R}}_t$ 重合，故 $\boldsymbol{R}_k$ 是一不變子空間。所以並不損及矩陣的法式可以換 $\boldsymbol{R}_s$ 為 $\boldsymbol{R}_k$。這樣一來，在分解式 (70) 與 (71) 中我們可以作為 $\boldsymbol{R}_s\equiv\widehat{\boldsymbol{R}}_t$。

現在來討論坐標子空間 $\widehat{\boldsymbol{R}}_{t-1}$。設其與 $\boldsymbol{R}_l(l<s)$ 有公共的坐標向量，而與 $\boldsymbol{R}_{l-1}+\cdots+\boldsymbol{R}_1$ 沒有公共的向量。那末不變子空間 $\widehat{\boldsymbol{R}}_{t-1}+\widehat{\boldsymbol{R}}_t$ 應當完全包含於 $\boldsymbol{R}_l+\boldsymbol{R}_{l+1}+\cdots+\boldsymbol{R}_s$ 裏面，因為在相反的情形，介乎 $\widehat{\boldsymbol{R}}_t$ 與 $\widehat{\boldsymbol{R}}_{t-1}+\widehat{\boldsymbol{R}}_t$ 之間將有中間的不變子空間存在。故有 $\widehat{\boldsymbol{R}}_{t-1}\subset\boldsymbol{R}_l$。再者，$\widehat{\boldsymbol{R}}_{t-1}\equiv\boldsymbol{R}_l$，因為在相反的情形 $\widehat{\boldsymbol{R}}_{t-1}+\boldsymbol{R}_{l+1}+\cdots+\boldsymbol{R}_s$ 將為 $\boldsymbol{R}_l+$ $+\boldsymbol{R}_{l+1}+\cdots+\boldsymbol{R}_s$ 與 $\boldsymbol{R}_{l+1}+\cdots+\boldsymbol{R}_s$ 之間的中間不變子空間。由 $\widehat{\boldsymbol{R}}_{t-1}\equiv$ $\equiv\boldsymbol{R}_l$ 知 $\boldsymbol{R}_l+\boldsymbol{R}_s$ 是一個不變子空間。故可換 $\boldsymbol{R}_{s-1}$ 為 $\boldsymbol{R}_l$，此時我們有：

$$\widehat{\boldsymbol{R}}_{t-1}\equiv\boldsymbol{R}_{s-1},\ \widehat{\boldsymbol{R}}_t\equiv\boldsymbol{R}_s\text{。}$$

繼續這一方法，最後我們得到 $s=t$ 且如不計項的次序，分解式(70)與(71)彼此重合。故如不計子塊次序的置換，其對應的法式彼此重合。

由法式的唯一性，我們知數 g 與 s 是非負矩陣 A 的不變量❶。

利用矩陣的法式，我們來證明次之定理：

定理 6. 矩陣 $A\geqslant 0$ 的極大特徵數 r 對應於正特徵向量的充分必要條件，是在矩陣 A 的法式(69)中有：1° 每一個矩陣 $A_1, A_2, \cdots, A_g$ 都以數 r 為其特徵數且（當 $g<s$ 時）2° 矩陣 $A_{g+1}, \cdots, A_s$ 都沒有這一個性質。

證明 1. 設極大特徵數 r 對應於正特徵向量 $z>0$。與(69)中的分塊相對應的裂分列 z 為諸部分列 z^k $(k=1, 2, \cdots, s)$。那末等式

$$Az=rz\quad(z>0)\tag{72}$$

可以換為兩組等式：

$$A_iz^i=rz^i\quad(i=1, 2, \cdots, g),\tag{72'}$$

❶ 對於不可分離矩陣有 $g=s=1$。

$$\sum_{h=1}^{j-1} A_{jh} z^h + A_j z^j = r z^j \quad (j=g+1, \cdots, s)。 \tag{72''}$$

由(72′)知數 r 是矩陣 $A_1, A_2, \cdots, A_g$ 中每一個矩陣的特徵數。由(72″)求得：

$$A_j z^j \geq r z^j, \; A_j z^j \neq r z^j \quad (j=g+1, \cdots, s)。 \tag{73}$$

以 r_j 記矩陣 $A_j\,(j=g+1, \cdots, s)$的極大特徵數。那末[參考本章，§2,(41)式]由(73)我們得出：

$$r_j \leqslant \max_i \frac{(A_j z^j)_i}{z_i^j} \leqslant r \quad (j=g+1, \cdots, s)。$$

另一方面，等式 $r_j=r$ 與關係(73)的第二式衝突(參考本章，§2，註5)。故有

$$r_j < r \quad (j=g+1, \cdots, s)。 \tag{74}$$

2．現在假設，相反的，已知矩陣 $A_i\,(i=1, 2, \cdots, g)$ 的極大特徵數等於 r，而對於矩陣 $A_j\,(j=g+1, \cdots, s)$不等式(74)能夠成立。那末換所求的等式(72)為等式組(72′)，(72″)，我們可以從(72′)定出矩陣 A_i 的正特徵列 $z^i\,(i=1, 2, \cdots, g)$。此後由(72″)求出列 $z^j\,(j=g+1, \cdots, s)$：

$$z^j = (rE_j - A_j)^{-1} \sum_{h=1}^{j-1} A_{jh} z^h \quad (j=g+1, \cdots, s), \tag{75}$$

其中 E_j 是與矩陣 A_j 有相同階的么矩陣$(j=g+1, \cdots, s)$。

因為 $r_j < r\,(j=g+1, \cdots, s)$，所以[參考本章，§3,(55)式]有：

$$(rE_j - A_j)^{-1} > 0 \quad (j=g+1, \cdots, s)。 \tag{76}$$

用歸納法來證明由(75)式所定出的列 $z^{g+1}, \cdots, z^s$ 都是正的。我們來證明對於任何 $j\,(g+1 \leqslant j \leqslant s)$ 由列 $z^1, z^2, \cdots, z^{j-1}$ 都是正的這個性質得出：$z^j > 0$。事實上，在這一情形

$$\sum_{h=1}^{j-1} A_{jh} z^h \geq 0, \; \sum_{h=1}^{j-1} A_{jh} z^h \neq 0,$$

故合併(76)與基本公式(75)給出：

$$z^j > 0。$$

這樣一來，正列 $z=\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ 是矩陣 A 對於特徵數 r 的特徵向量。定理已經證明。

次之定理給予我們矩陣 $A\geqslant 0$ 的一種特性，使他與他的轉置矩陣 A' 含有相同的性質，使極大特徵數對應於正特徵向量。

定理 7.[1]　矩陣 $A\geqslant 0$ 的極大特徵數 r 對應於矩陣 A 的正特徵向量與矩陣 A' 的正特徵向量，充分必要的，是矩陣 A 可經次序的置換表為準對角形

$$A=\{A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_s\},\tag{77}$$

其中 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_s$ 都是不可分離的矩陣而且每一個都以數 r 為其極大特徵數。

證明　設矩陣 A 與 A' 對於 $\lambda=r$ 有正特徵向量。那末由定理 6 矩陣 A 可表為法式 (69)，其中矩陣 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_g$ 都有極大特徵數 r 且(當 $g<s$ 時)矩陣 $A_{g+1},\ \cdots,\ A_s$ 都有極大特徵數 $<r$。此時我們有：

$$A'=\begin{pmatrix} A'_1 & \cdots & 0 & A'_{g+1,1} & \cdots & A'_{s1} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & A'_g & A'_{g+1,g} & \cdots & A'_{sg} \\ 0 & \cdots & 0 & A'_{g+1} & \cdots & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & A'_s \end{pmatrix}。$$

更動子塊序列為倒轉的次序：

$$\begin{pmatrix} A'_s & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ A'_{s,s-1} & A'_{s-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ A'_{s1} & A'_{s-1,1} & \cdots & \cdots & A'_1 \end{pmatrix},\tag{78}$$

[1] 參考[125c]。

因爲矩陣 $A'_s, A'_{s-1}, \cdots, A'_1$ 都是不可分離的，所以從矩陣(78)經子塊次序的置換我們可以得出一個法式，沿主對角線上在其前面的位置都是被隔離的子塊。在這些被隔離的子塊中有一個是子塊 A'_s。因爲矩陣 A' 的法式應當適合上面定理中的條件，所以矩陣 A'_s 的極大特徵數應當等於 r。這祇有在 $g=s$ 時始能成立。在此時法式(69)就變爲(77)。

如果，相反的，矩陣 A 有表示式(77)，那末

$$A'=\{A'_1,\ A'_2,\ \cdots,\ A'_s\}。\tag{79}$$

此時由(77)與(79)再根據上面的定理得出，矩陣 A 與 A' 對於極大特徵數 r 都有正特徵向量。

定理已經證明。

推論 如果矩陣 $A\geqslant 0$ 的極大特徵數 r 是單重的而且對應於矩陣 A 與 A' 的正特徵向量，那末 A 是一個不可分離矩陣。

因爲，相反的，每一個不可分離矩陣都含有這個推論中所指出的性質，所以這些性質就是不可分離非負矩陣的影譜性質。

§5. 原矩陣與非原矩陣

我們開始對不可分離矩陣來分類。

定義 3. 如果不可分離矩陣 $A\geqslant 0$ 有極大模 r 的全部特徵數爲 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_h (\lambda_1=|\lambda_2|=\cdots=|\lambda_h|=r)$，那末在 $h=1$ 時稱矩陣 A 爲原矩陣而在 $h>1$ 時稱爲非原矩陣。數 h 稱爲矩陣 A 的非原性指標。

非原性指標立刻可以定出，如果已經知道矩陣的特徵方程的係數

$$\Delta(\lambda)\equiv\lambda^n+a_1\lambda^{n_1}+a_2\lambda^{n_2}+\cdots+a_t\lambda^{n_t}=0$$

$$(n>n_1>\cdots>n_t;\ a_1\neq 0,\ a_2\neq 0,\ \cdots,\ a_t\neq 0),$$

就是數 h 等於諸差

$$n-n_1,\ n_1-n_2,\ \cdots,\ n_{t-1}-n_t \tag{80}$$

的最大公因子。

事實上，根據勿勞別涅斯定理在複 λ- 平面上繞點 $\lambda=0$ 旋轉 $\frac{2\pi}{h}$

角時矩陣 A 的影譜變爲他自己。所以多項式 $\Delta(\lambda)$ 應當從某一多項式 $g(\mu)$ 由公式

$$\Delta(\lambda)=g(\lambda^h)\lambda^{n'}$$

來得出。故知 h 是諸差(80)的公因子。最後，h 等於這些差的最大公因子 d，因爲在旋轉角 $\frac{2\pi}{d}$ 時影譜不變，而在 $h<d$ 時這是不可能的。

次之定理建立了原矩陣的重要性質：

定理 8. 矩陣 $A\geqslant 0$ 是原矩陣的充分必要條件，是矩陣 A 的某一個乘冪是正的：

$$A^p>0 \quad (p\geqslant 1)。 \tag{81}$$

證明 如果 $A^p>0$，那末矩陣 A 是不可分離的，因爲從矩陣 A 的可分離性將得出矩陣 A^p 的可分離性。再者，對於矩陣 A 有數 $h=1$，因爲在相反的情形正矩陣 A^p 將有 $h(>1)$ 個特徵數 $\lambda_1^p, \lambda_2^p, \cdots, \lambda_h^p$ 都有極大模 r^p，這與配朗定理衝突。

現在假設，相反的，已知 A 是一個原矩陣。對於乘冪 A^p，第五章，§3 的公式(23)爲

$$A^p=\sum_{k=1}^{s}\frac{1}{(m_k-1)!}\left[\frac{C(\lambda)\lambda^p}{\overset{k}{\psi}(\lambda)}\right]^{(m_k-1)}_{\lambda=\lambda_k}, \tag{82}$$

其中

$$\psi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{m_s} \quad (\lambda_j\neq\lambda_f \text{ 如其 } j\neq f)$$

爲矩陣 A 的最小多項式，$\overset{k}{\psi}(\lambda)=\frac{\psi(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)^{m_k}}$ $(k=1, 2, \cdots, s)$，而 $C(\lambda)$ 爲導出附加矩陣 $C(\lambda)=(\lambda E-A)^{-1}\psi(\lambda)$。

在所予的情形可以設：

$$\lambda_1=r>|\lambda_2|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_s|,\ m_1=1。 \tag{83}$$

那末(82)式有次之形狀

$$A^p=\frac{C(r)}{\psi'(r)}r^p+\sum_{k=2}^{s}\frac{1}{(m_k-1)!}\left[\frac{C(\lambda)\lambda^p}{\overset{k}{\psi}(\lambda)}\right]^{(m_k-1)}_{\lambda=\lambda_k}。$$

故由(83)容易推得：

$$\lim_{p\to\infty}\frac{A^p}{r^p}=\frac{C(r)}{\psi'(r)}。\tag{84}$$

另一方面，$C(r)>0$[參考(53)]與$\psi'(r)>0$[由於(83)式]。故有

$$\lim_{p\to\infty}\frac{A^p}{r^p}>0,$$

因而從某一個p開始就使不等式(81)能夠成立❶。

定理已經證明。

現在來證明次之定理：

定理9. 如果$A\geqslant 0$是一個不可分離矩陣而這個矩陣的某一個乘冪A^q是可分離的，那末乘冪A^q是完全可分離的，亦即A^q經次序的置換可以表為形狀

$$A^q=\{A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_d\},\tag{85}$$

其中$A_1, A_2, \cdots, A_d$都是不可分離的矩陣。這些矩陣有相同的極大特徵數，而且數d是數q與h的最大公因子，其中h為矩陣A的非原性指標。

證明　因為矩陣A是不可分離的，所以根據勿勞別涅斯定理其極大特徵數r對應於矩陣A與A'的正特徵向量。但是這些正向量是對應於非負矩陣A^q與$(A^q)'$的特徵數$\lambda=r^q$的特徵向量。故對乘冪A^q應用定理7，我們(經次序的適當置換後)表這個乘冪為(85)形，其中$A_1, A_2, \cdots, A_d$都是不可分離矩陣而且有相同的極大特徵數r^q。但矩陣A有h個特徵數都有極大模r：

$$r,\ r\varepsilon,\cdots,\ r\varepsilon^{h-1}\left(\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{h}}\right)。$$

故矩陣A^q亦有h個特徵數其模是極大的

$$r^q,\ r^q\varepsilon^q,\ \cdots,\ r^q\varepsilon^{q(h-1)},$$

在他們裏面有d個等於r^q。這祇有在d為數q與h的最大公因子時始能成立。定理已經證明。

---

❶ 關於不等式(81)中冪次p的下界可參考[[illegible]]。

當 $h=1$ 時我們得出

推論 1. 原矩陣的乘羃永遠是不可分離的而且亦是一個原矩陣。

如果在定理的敍述中設 $q=h$，那末得出：

推論 2. 如果 A 是一個有非原性指標 h 的非原矩陣，那末乘羃 A^h 可分解爲 h 個原矩陣，他們都有相同的極大特徵數。

§6. 斯篤哈斯基矩陣

討論 n 個隨機事件組

$$S_1, S_2, \cdots, S_n \tag{86}$$

與時刻序列　$t_0, t_1, t_2, \cdots$

設在這些時刻的每一瞬間，(86) 的事件組中有一個且祇有一個能夠出現，且以 p_{ij} 記在時刻 t_k，事件 S_j 出現的概率，如果在前一時刻 t_{k-1} 出現的事件爲 $S_i (i, j=1, 2, \cdots, n; k=1, 2, \cdots)$。我們假設，條件概率 $p_{ij}(i, j=1, 2, \cdots, n)$ 與足數 k（時刻 t_k 的序數）無關。

如果給予了條件概率的矩陣

$$P=\|p_{ij}\|_1^n,$$

我們說給予了有限多事件的純馬爾可夫鏈[1]。此處顯然有：

$$p_{ij}\geqslant 0, \sum_{j=1}^{n} p_{ij}=1 \quad (i, j=1, 2, \cdots, n)。\tag{87}$$

定義 4. 方陣 $P=\|p_{ij}\|_1^n$ 稱爲斯篤哈斯基矩陣，如果矩陣 P 是非負的，而且矩陣 P 的每一行中元素的和都等於 1，亦即關係 (87) 能夠成立[2]。

這樣一來，對於每一個純馬爾可夫鏈，條件概率矩陣是一個斯篤哈斯基矩陣，相反的，任何斯篤哈斯基矩陣可以視爲某一個純馬爾可夫鏈

---

[1] 參考[74與25]，9—12 頁。

[2] 有時在斯篤哈斯基矩陣的定義中包含有補充條件：

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ij}\neq 0 \quad (j=1, 2, \cdots, n)。$$ 參考[25]，13 頁。

的條件概率矩陣。故可用矩陣的方法來研究純馬爾可夫鏈❶。

斯篤哈斯基矩陣是非負矩陣的特殊形狀。故對這種矩陣可以應用上面諸節中的全部概念與結果。

我們要注意斯篤哈斯基矩陣的一些特殊性質。從斯篤哈斯基矩陣的定義，知道這種矩陣有特徵數 1 且與之對應的爲正特徵向量 $z=(1, 1, \cdots, 1)$。容易看出，相反的，每一個矩陣 $P\geqslant 0$，有特徵數 1 且對應於 1 的特徵向量爲 $(1, 1, \cdots, 1)$ 時，都是斯篤哈斯基矩陣。而且 1 是斯篤哈斯基矩陣的極大特徵數，因爲極大特徵數常在行中元素和的最大值與最小值之間❷，而對於斯篤哈斯基矩陣任一行中元素的和都等於 1。這樣一來，我們證明了次之論斷：

1° 非負矩陣 $P\geqslant 0$ 是一個斯篤哈斯基矩陣的充分必要條件，爲其有特徵數 1 且對應於 1 的特徵向量爲 $(1, 1, \cdots, 1)$。特徵數 1 是斯篤哈斯基矩陣的極大特徵數。

現在假設給予一個非負矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$，他有正極大特徵數 $r>0$，且對應於這個特徵數的有正特徵向量 $z=(z_1, z_2, \cdots, z_n)>0$：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}z_j = rz_i \quad (i=1, 2, \cdots, n)。 \tag{88}$$

在討論中引進對角形矩陣 $Z=\{z_1, z_2, \cdots, z_n\}$ 與矩陣 $P=\|p_{ij}\|_1^n$

$$P=\frac{1}{r}Z^{-1}AZ。$$

那末
$$p_{ij}=\frac{1}{r}z_i^{-1}a_{ij}z_j\geqslant 0 \quad (i, j=1, 2, \cdots, n),$$

且由(88)得：
$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}=1 \quad (i=1, 2, \cdots, n)。$$

這樣一來，我們有：

---

❶ 有限多(與可數個)事件的純馬爾可夫鏈的理論爲院士阿.恩.柯爾莫哥洛夫所得出(參考[74])。關於應用矩陣方法於純馬爾可夫鏈的繼續du進與發展，讀者可在扶.伊.羅馬諾夫斯基的論文[946]與專著[25]中找到(還有[4]，補篇5)。

❷ 參考不等式(37)與本章，§3，1 末尾的註。

2° 非負矩陣 $A\geqslant 0$ 如有正極大特徵數 $r>0$ 且對應於這個數有正特徵向量 $z=(z_1, z_2, \cdots, z_n)>0$，那末他就能相似於數 r 與某一個斯篤哈斯基矩陣的乘積：

$$A=ZrPZ^{-1}\quad (Z=\{z_1, z_2, \cdots, z_n\}>0)\text{❶}\tag{89}$$

在前節中已經建立（參考定理 6）當 $\lambda=r$ 時有正特徵向量的非負矩陣類的特性。(89) 式建立了這類矩陣與斯篤哈斯基矩陣類的密切關係。

現在我們來證明次之定理：

定理 10. 斯篤哈斯基矩陣的特徵數 1 永遠祇對應於一次初級因子。

證明 應用 §4 的分解式 (69) 於斯篤哈斯基矩陣 $P=\|p_{ij}\|_1^n$，我們有：

$$P=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & A_g & 0 & \cdots & 0 \\ A_{g+1,1} & \cdots & A_{g+1,g} & A_{g+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sg} & \cdots & \cdots & A_s \end{pmatrix},$$

其中 $A_1, A_2, \cdots, A_s$ 爲不可分離的矩陣，且有

$$A_{f1}+A_{f2}+\cdots+A_{f,f-1}\neq 0\quad (f=g+1, \cdots, s)。$$

此處 $A_1, A_2, \cdots, A_g$ 是不可分離的斯篤哈斯基矩陣，故這些矩陣的每一個都有單重特徵數 1。至於其餘的不可分離矩陣 $A_{g+1}, \cdots, A_s$，則根據本章 §2 的註 2，知其極大特徵數都 <1，因爲在這些矩陣的每一個裏

❶ 論斷 2° 對於 $r=0$ 亦能成立，因爲由 $A\geqslant 0$, $z>0$ 得出 $A=0$。

面至少有一行的元素和小於1 ❶。

這樣一來，矩陣 P 可表為形狀

$$P=\begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ S & Q_2 \end{pmatrix},$$

其中矩陣 Q_1 的特徵數1對應於一次初級因子，而對於矩陣 Q_2，數1不是一個特徵數。因此，定理的眞確性可以直接從次引推出：

引4. 如果矩陣 A 有形狀

$$A=\begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ S & Q_2 \end{pmatrix}, \tag{90}$$

其中 Q_1 與 Q_2 都是方陣，而且矩陣 A 的特徵數 λ_0 是矩陣 Q_1 的特徵數但不是矩陣 Q_2 的特徵數，

$$|Q_1-\lambda_0E|=0, \quad |Q_2-\lambda_0E|\neq 0,$$

那末矩陣 A 與 Q_1 中對應於特徵數 λ_0 的初級因子是相同的。

證明 1. 首先討論 Q_1 與 Q_2 沒有公共特徵數的情形。我們來證明在這一情形矩陣 Q_1 與 Q_2 的全部初級因子構成矩陣 A 的初級因子組，亦即有某一矩陣 $T(|T|\neq 0)$ 存在使得

$$TAT^{-1}=\begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}。 \tag{91}$$

矩陣 T 的形狀應該是

$$T=\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ U & E_2 \end{pmatrix}$$

（矩陣 T 的分塊與 A 中分塊是相類似的；E_1 與 E_2 都是么矩陣）。此時

$$TAT^{-1}=\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ U & E_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ S & Q_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ -U & E_2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ UQ_1-Q_2U+S & Q_2 \end{pmatrix}。 \tag{91'}$$

❶ 矩陣 $A_1,\cdots,A_s$ 的這些性質亦可從定理6推出。

等式(91′)變爲等式(91)，如果我們能夠選取長方矩陣 U 使得他適合矩陣方程

$$Q_2U-UQ_1=S。$$

在 Q_1 與 Q_2 沒有公共特徵數的情形，對於右節的任何 S 這個方程常有一個確定的解(參考第八章，§3)。

2. 在矩陣 Q_1 與 Q_2 有公共特徵數的情形，我們在(90)式中換矩陣 Q_1 爲其若唐式 J (結果是換矩陣 A 爲其相似矩陣)。此時 $J=\{J_1, J_2\}$，其中矩陣 J_1 是所有特徵數爲 λ_0 的若唐塊的全部。那末

$$A=\begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 \\ S_{11} & S_{12} & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{Q_2}} \\ S_{21} & S_{22} & & \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ S_{11} & & \hat{Q}_2 & \\ S_{21} & & & \end{pmatrix}。$$

這個矩陣適合第一種情形，因爲 J_1 與 $\hat{Q}_2$ 沒有公共特徵數。故知$(\lambda-\lambda_0)^p$ 形初級因子在矩陣 A 與 J_1 中是相同的，因而在矩陣 A 與 Q_1 中亦是相同的。我們的引已經證明。

如果不可分離的斯篤哈斯基矩陣 P 有複特徵數 λ_0 且有 $|\lambda_0|=1$，那末矩陣 λ_0P 與矩陣 P 相似[參考(24)]，故由定理 10 推知特徵數 λ_0 祇對應於一次初級因子。應用矩陣的法式與引 4，很容易把這個論斷推廣到可分離的斯篤哈斯基矩陣。這樣一來，我們得出

推論 1. 如果 λ_0 是斯篤哈斯基矩陣 P 的特徵數且有 $|\lambda_0|=1$，那末數 λ_0 對應於矩陣 P 的一次初級因子。

從定理 10 與他前面的 2°，我們又推得：

推論 2. 如果非負矩陣 A 的極大特徵數 r 對應於一個正特徵向量，那末對應於任何有 $|\lambda_0|=r$ 的特徵數 λ_0 的所有矩陣 A 中初級因子都是一次的。

我們來指出與斯篤哈斯基矩陣特徵數的分佈有關的一些工作。

斯篤哈斯基矩陣 P 的特徵數常在 λ-平面上圓 $|\lambda|\leq 1$ 中。以 M_n

記這個圓中表示某些 n 級斯篤哈斯基矩陣特徵數的所有點的集合。

在 1938 年，結合馬爾可夫鏈的研究，阿.恩.柯爾莫哥洛夫提出確定區域 M_n 的結構問題。這個問題在 1945 年被恩.阿.達米脫利也夫與也.拔.亭金[67a, $б$]解決了一部分，且在 1951 年為弗.伊.卡爾片連維赤的工作[72]所完全解決。發現 M_n 的邊界是由圓周 $|\lambda|=1$ 上有限個點所構成的且定出順序連結這些點的曲線弧。

我們注意，由於定理 10 前面的命題 $2°$，當 $\lambda=r$ 時有正特徵向量的矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n\geq 0$ 的特徵數，對於固定的 r 構成集合 $r\cdot M_n$❶。因為任意矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n\geq 0$ 可以視為所指類型諸非負矩陣的序列的極限，而集合 $r\cdot M_n$ 是閉合的，所以有已予極大特徵數 r 的任意矩陣 $A=$ $=\|a_{ik}\|_1^n>0$ 的特徵數都落入集合 $r\cdot M_n$ 中❷。

與這個問題的固有關的，有赫.爾.蘇連伊馬諾娃的工作 [100]，在這一工作中建立了某些充分的判定，使得 n 個已知實數 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是某一個斯篤哈斯基矩陣 $P=\|p_{ij}\|_1^n$ 的特徵數❸。

§7. 關於有限多事件純馬爾可夫鏈的極限概率

1. 設
$$S_1, S_2, \cdots, S_n$$
為純馬爾可夫鏈中所有的隨機事件組，而 $P=\|p_{ij}\|_1^n$ 為由條件概率 $p_{ij}(i, j=1, 2,\cdots, n)$ 所構成的，為這個鏈所確定的斯篤哈斯基矩陣。

以 $p_{ij}^{(q)}$ 記在時刻 t_k 事件 S_j 出現的概率，如果已知在時刻 t_{k-q} 出現的為事件 $S_i(i, j=1, 2,\cdots, n;\ q=1, 2, \cdots)$。顯然，$p_{ij}^{(1)}=p_{ij}(i, j=1, 2,\cdots, n)$。應用關於概率的加法與乘法定理，我們易知：

$$p_{ij}^{(q+1)}=\sum_{h=1}^{n}p_{ih}^{(q)}p_{hj} \quad (i, j=1, 2,\cdots, n),$$

❶ $r\cdot M_n$ 是 λ-平面上 $r\mu$ 形的點的集合，其中 $\mu\in M_n$。

❷ 化所指出的對於任意矩陣 $A\geq 0$ 的問題為對於斯篤哈斯基矩陣的類似問題的可能性曾經為阿.恩.柯爾莫哥洛夫所指出(參考[67$б$]，補篇)。

❸ 還可參考[141b]。

或用矩陣寫法：　$\|p_{ij}^{(q+1)}\| = \|p_{ij}^{(q)}\|_1^n \|p_{ij}\|_1^n$。

因此，對於數序 1, 2, … 中已予的 q，我們得出重要公式❶

$$\|p_{ij}^{(q)}\| = P^q \quad (q=1, 2, \cdots)。$$

如果有極限

$$\lim_{q\to\infty} p_{ij}^{(q)} = p_{ij}^{\infty} \quad (i, j=1, 2, \cdots, n)$$

存在，或寫爲矩陣形狀

$$\lim_{q\to\infty} P^q = P^{\infty} = \|p_{ij}^{\infty}\|_1^n,$$

那末稱 p_{ij}^{∞} $(i, j=1, 2, \cdots, n)$ 爲極限條件概率或終極條件概率❷。

爲了判斷在什麼情形之下有極限條件概率存在，與對於諸對應公式的推演，我們引進次諸名詞。

我們稱斯篤哈斯基矩陣 P 與其對應的純馬爾可夫鏈爲正常的，如果矩陣 P 沒有不等於 1 而模能等於 1 的特徵數，且稱爲正則的，如果補充一個條件，數 1 是矩陣 P 的特徵方程的單重根。

正常矩陣 P 的特性是在其法式 (69) 中 (本章，§ 4) 矩陣 A_1, A_2, …, A_g 都是原矩陣。對於正則矩陣要補充一個 $g=1$ 的條件。

此外，純馬爾可夫鏈稱爲不可分離的，可分離的，非環狀的，環狀的，如果對於這個鏈的斯篤哈斯基矩陣相對應的是不可分離的，可分離的，原的，非原的。

因爲原斯篤哈斯基矩陣是正常矩陣的特殊形狀，故非環狀馬爾可夫鏈是正常鏈的特殊形狀。

我們來證明，極限條件概率祇對於正常純馬爾可夫鏈始能存在。

事實上，設 $\psi(\lambda)$ 爲正常矩陣 $P=\|p_{ij}\|_1^n$ 的最小多項式。那末

$$\psi(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_u)^{m_u}$$
$$(\lambda_i \neq \lambda_k;\ i, k=1, 2, \cdots, u)。\qquad (92)$$

❶ 從這一公式，知概率 $p_{ij}^{(q)}$，有如 p_{ij} $(i, j=1, 2, \cdots, n;\ q=1, 2, \cdots)$ 與原始時刻 t_k 的序數 k 無關。

❷ 爲斯篤哈斯基矩陣的極限矩陣 P^{∞} 亦是一個斯篤哈斯基矩陣。

根據定理 10 可以取

$$\lambda_1 = 1,\ m_1 = 1。\tag{93}$$

但由第五章的基本公式(23)(第五章，§3)，有：

$$P^q = \frac{C(1)}{\overset{1}{\psi}(1)} + \sum_{k=2}^{u} \frac{1}{(m_k-1)!}\left[\frac{C(\lambda)}{\overset{k}{\psi}(\lambda)}\lambda^q\right]^{(m_k-1)}_{\lambda=\lambda_k},\tag{94}$$

其中 $C(\lambda) = (\lambda E - P)^{-1}\psi(\lambda)$ 是導出附加矩陣，而

$$\overset{k}{\psi}(\lambda) = \frac{\psi(\lambda)}{(\lambda-\lambda_k)^{m_k}} \quad (k=1,\ 2,\cdots,\ u);$$

還有
$$\overset{1}{\psi}(\lambda) = \frac{\psi(\lambda)}{\lambda-1},\ \overset{1}{\psi}(1) = \psi'(1)。$$

如果 P 是一個正常矩陣，那末

$$|\lambda_k| < 1 \quad (k=2,\ 3,\ \cdots,\ u),$$

故在(94)式的右節，除第一項外，其他諸項當 $q\to\infty$ 時都趨於零。故對於正常矩陣 P，有由極限條件概率所構成的矩陣 P^∞ 存在，且有

$$P^\infty = \frac{C(1)}{\psi'(1)}。\tag{95}$$

相反的情況是很明顯的。如果有極限

$$P^\infty = \lim_{q\to\infty} P^q\tag{96}$$

存在，那末矩陣 P 不可能有特徵數 $\lambda_k \neq 1$ 而且 $|\lambda_k| = 1$，因為此時極限 $\lim\limits_{q\to\infty}\lambda_k^q$ 不可能存在。[由於極限(96)的存在，這個極限是應當存在的]。

我們已經證明了，對於正常(亦祇是對於正常的)純馬爾可夫鏈，有矩陣 P^∞ 存在。這個矩陣為公式(95)所定出。

我們來證明，矩陣 P^∞ 可以經特徵多項式

$$\Delta(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_u)^{n_u}\tag{97}$$

與附加矩陣 $B(\lambda) = (\lambda E - P)^{-1}\Delta(\lambda)$ 來表出。

從恆等式
$$\frac{B(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{C(\lambda)}{\psi(\lambda)}$$

與(92)，(93)，(97)式推得：

$$\frac{n_1 B^{(n_1-1)}(1)}{\Delta^{(n_1)}(1)}=\frac{C(1)}{\psi'(1)}。$$

故可換(95)式為公式

$$P^{\infty}=\frac{n_1 B^{(n_1-1)}(1)}{\Delta^{(n_1)}(1)}。\tag{98}$$

對於正則馬爾可夫鏈，因為他是正常鏈的特殊情形，故矩陣 P^{∞} 是存在的且可用任一公式(95)或(98)來定出。在此時，$n_1=1$ 而公式(98)有次之形狀：

$$P^{\infty}=\frac{B(1)}{\Delta'(1)}。\tag{99}$$

2. 討論一般的正常鏈（不一定是正則的）。將其對應矩陣 P 寫為法式

$$P=\begin{pmatrix} Q_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & Q_g & 0 & \cdots & 0 \\ U_{g+1,1} & \cdots & U_{g+1,g} & Q_{g+1} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ U_{s1} & \cdots & U_{sg} & \cdots & U_{s,s-1} & Q_s \end{pmatrix},\tag{100}$$

其中 $Q_1, \cdots, Q_g$ 為原斯篤哈斯基矩陣，而且對於不可分離的矩陣 $Q_{g+1}, \cdots, Q_s$，其極大特徵數 <1。命

$$U=\begin{pmatrix} U_{g+1,1} \cdots U_{g+1,g} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ U_{s1} \cdots U_{sg} \end{pmatrix},\quad W=\begin{pmatrix} Q_{g+1} \cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ U_{s,g+1} \cdots Q_s \end{pmatrix},$$

寫 P 為形狀

$$P=\begin{pmatrix} Q_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & Q_g & 0 \\ & U & & W \end{pmatrix}。$$

那末

$$P^q=\begin{pmatrix} Q_1^q & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & Q_g^q & 0 \\ & U_q & & W^q \end{pmatrix} \tag{101}$$

而

$$P^\infty=\lim_{q\to\infty} P^q=\begin{pmatrix} Q_1^\infty & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & Q_g^\infty & 0 \\ & U_\infty & & W^\infty \end{pmatrix}.$$

但 $W^\infty=\lim\limits_{q\to\infty} W^q=0$，因爲矩陣 W 所有的特徵數的模都小於1。故

$$P^\infty=\begin{pmatrix} Q_1^\infty & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & Q_g^\infty & 0 \\ & U_\infty & & 0 \end{pmatrix}。\tag{102}$$

因爲 $Q_1, \cdots, Q_g$ 都是原斯篤哈斯基矩陣，所以由公式 (99) 與 (35)（本章，§ 2）知矩陣 $Q_1^\infty, \cdots, Q_g^\infty$ 都是正的

$$Q_1^\infty>0,\ \cdots,\ Q_g^\infty>0,$$

且在這些矩陣的每一個中，每一列的元素都彼此相等：

$$Q_h^{\infty}=\|q_{*j}^{(h)}\|_{i,j=1}^{n}\quad(h=1,2,\cdots,g)。$$

我們注意，與斯篤哈斯基矩陣 P 的法式(100)相對應的裂分事件組 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 爲次之諸羣：

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_g, \Sigma_{g+1}, \cdots, \Sigma_s。\qquad(103)$$

在(103)中每一個羣是(101)中的對應羣。按照阿.恩.柯爾莫哥洛夫❶的詞彙，在 $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_g$ 中出現的事件組稱爲主要的，而在其餘諸羣 $\Sigma_{g+1}, \cdots, \Sigma_s$ 中出現的事件稱爲非主要的。

由(101)形矩陣 P^q，知道對於任意有限序數 q（從時刻 t_{k-q} 到時刻 t_k）諸組的過渡祇有次之可能：（a）從主要的事件過渡爲同一羣中主要的事件，（$б$）從非主要的事件過渡爲主要的事件與（$в$）從非主要的事件過渡爲同一羣中或其前面的羣中非主要的事件。

從矩陣 P^∞ 的形狀(102)，知取極限時任何事件祇能過渡到主要事件，亦即當序數 $q\to\infty$ 時任何非主要事件的條件概率都趨於零。因此，有時稱主要事件爲極限事件。

3．從(95)式得出：

$$(E-P)P^\infty=0❷。$$

故知，矩陣 P^∞ 的每一個列都是斯篤哈斯基矩陣 P 對於特徵數 $\lambda=1$ 的特徵向量。

對於正則矩陣 P，數 1 是其特徵方程的單重根，所以這一個數祇對應於矩陣 P 的一個（不計純量因子的）特徵向量$(1, 1, \cdots, 1)$。故在矩陣 P^∞ 的任何一個第 j 列中所有的元素都等於同一非負數 p_{*j}^∞：

$$p_{ij}^\infty=p_{*j}^\infty\geqslant 0\quad(j=1,2,\cdots,n;\sum_{j=1}^{n}p_{*j}=1)。\qquad(104)$$

這樣一來，在正則鏈中，極限條件概率與原始事件無關。

反之，如果在某一正常純馬爾可夫鏈中，極限條件概率與原始事件

❶ 參考[74]，還有[25]，37—39頁。

❷ 這個公式對於任何正常鏈都能成立而且可以從明顯的等式 $P^q-P\cdot P^{q-1}=0$ 當 $q\to\infty$ 時取極限來得出。

無關，亦即(104)式成立，那末在矩陣 P^{∞} 的(102)式中自然有 $g=1$。此時 $n_1=1$ 而這個鏈是正則的。

對於非環狀鏈，他是正則鏈的特殊情形，故 P 是一個原矩陣。所以對於某一個 $q>0$ 有 $P^q>0$（參考本章§5的定理8）。此時

$$P^{\infty}=P^{\infty}P^q>0\,❶。$$

反之，由 $P^{\infty}>0$ 知道對於某一個 $q>0$ 有 $P^q>0$，故由定理8知矩陣 P 是一個原矩陣，因而得出所予純馬爾可夫鏈的非環狀性。

我們總結所得出的結果為次之定理：

定理 11. 1. 為了使得純馬爾可夫鏈的所有極限條件概率都能存在，充分必要的，為這一個鏈是正常的。在此時，為極限條件概率所構成的矩陣 P^{∞}，為公式(95)或(98)所定出。

2. 為了使得在正常純馬爾可夫鏈中極限條件概率與原始事件無關，充分必要的，為這一個鏈是正則的。此時矩陣 P^{∞} 為公式(99)所定出。

3. 為了使得正常純馬爾可夫鏈的所有極限條件概率都不等於零，充分必要的，為這一個鏈是非環狀的❷。

4. 在討論中引進絕對概率列

$$\overset{k}{p}=(\overset{k}{p}_1,\ \overset{k}{p}_2,\ \cdots,\ \overset{k}{p}_n)\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots),\tag{105}$$

其中 $\overset{k}{p}_i$ 是在時刻 t_k 出現事件 $S_i\,(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ 的概率。應用概率的加法與乘法定理，我們得出：

$$\overset{k}{p}_i=\sum_{h=1}^{n}\overset{0}{p}_h\,p_{hi}^{(k)}\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ k=1,\ 2,\ \cdots),$$

或寫為矩陣的形狀

---

❶ 這個矩陣等式可以從等式 $P^m=P^{m-q}\cdot P^q\ (m>q)$ 在 $m\to\infty$ 時取極限來得出。P^{∞} 是一個斯篤哈斯基矩陣；故 $P^{\infty}\geq 0$ 且在矩陣 P^{∞} 的任何列中都有非零元素。因此 $P^{\infty}P^q>0$。替代定理8，在此處可以應用公式(99)與不等式(35)（本章，§2）。

❷ 我們注意，從 $P^{\infty}>0$ 推得非環狀性，因而得出鏈的正則性。故由 $P^{\infty}>0$ 自動的得出，極限條件概率與原始事件無關，亦即公式(104)能夠成立。

$$\overset{k}{p}=P'^{k}\overset{0}{p}\quad (k=1,\ 2,\ \cdots),\tag{106}$$

其中 P' 爲矩陣 P 的轉置矩陣。

從公式(106)定出所有的絕對概率(105)，如果已經知道原始概率 $\overset{0}{p}_1,\ \overset{0}{p}_2,\cdots,\ \overset{0}{p}_n$ 與條件概率矩陣 $P=\|p_{ij}\|_1^n$。

在討論中引進極限絕對概率

$$\overset{\infty}{p}_i=\lim_{k\to\infty}\overset{k}{p}_i\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

或

$$\overset{\infty}{p}=(\overset{\infty}{p}_1,\ \overset{\infty}{p}_2,\ \cdots,\ \overset{\infty}{p}_n)=\lim_{k\to\infty}\overset{k}{p}。$$

當 $k\to\infty$ 時，在等式(106)的兩節取極限，我們得出

$$\overset{\infty}{p}=P^{\infty\prime}\overset{0}{p}。\tag{107}$$

我們注意，極限條件概率矩陣的存在性可推出有任何原始概率 $\overset{0}{p}=(\overset{0}{p}_1,\ \overset{0}{p}_2,\cdots,\ \overset{0}{p}_n)$ 的極限絕對概率 $\overset{\infty}{p}=(\overset{\infty}{p}_1,\ \overset{\infty}{p}_2,\cdots,\ \overset{\infty}{p}_n)$ 的存在性，反之亦然。

從公式(107)與(102)形矩陣 P^{∞} 推知，對應於非主要事件的極限絕對概率都等於零。

右乘矩陣等式　　$P'\cdot P^{\infty\prime}=P^{\infty\prime}$

的兩節以 $\overset{0}{p}$，由(107)我們得出：

$$P'\overset{\infty}{p}=\overset{\infty}{p},\tag{108}$$

亦卽極限絕對概率列 $\overset{\infty}{p}$ 是矩陣 P' 對於特徵數 $\lambda=1$ 的特徵向量。

如果所給的馬爾可夫鏈是正則的，那末 $\lambda=1$ 是矩陣 P' 的特徵方程的單重根。在此時極限絕對概率列爲(108)所唯一確定(因爲 $\overset{\infty}{p}_j\geqslant 0$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 而 $\sum_{j=1}^{n}\overset{\infty}{p}_j=1$)。

設已給予一個正則馬爾可夫鏈。那末由(104)與(107)得出：

$$\overset{\infty}{p}_j=\sum_{h=1}^{n}\overset{0}{p}_h\,p_{hj}^{\infty}=p_j^{\infty}\sum_{h=1}^{n}\overset{0}{p}_h=p_{j}^{\infty}\quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)。\tag{109}$$

在這一情形極限絕對概率 $\overset{\infty}{p}_1, \overset{\infty}{p}_2, \cdots, \overset{\infty}{p}_n$ 與原始概率 $\overset{0}{p}_1, \overset{0}{p}_2, \cdots, \overset{0}{p}_n$ 無關。

反之，在(107)式中出現的 $\overset{\infty}{p}$ 能與 $\overset{0}{p}$ 無關的充分必要條件，是矩陣 P^∞ 的行都彼此相同，亦即

$$p_{hj}^{\infty} = p_{j}^{\infty} \quad (h, j = 1, 2, \cdots, n),$$

故(根據定理11) P 是一個正則矩陣。

如果 P 是一個原矩陣，那末 $P^\infty > 0$，故由(109)得

$$\overset{\infty}{p}_j > 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n)。$$

相反的，如果所有的 $\overset{\infty}{p}_j > 0\ (j = 1, 2, \cdots, n)$，且與原始概率無關，那末矩陣 P^∞ 中每一個列中的全部元素都是相同的且由(109)得 $P^\infty > 0$，因而由定理 11 知道 P 是一個原矩陣，亦即所予的鏈是非環狀的。

從所述的結果推知定理 11 可以述爲：

定理 11′. 1. 爲了使得在純馬爾可夫鏈中所有極限絕對概率對於任何原始概率都能存在，充分必要的，爲這一個鏈是正常的。

2. 爲了使得在純馬爾可夫鏈中所有極限絕對概率對於任何原始概率都能存在而且與這些原始概率無關，充分必要的，爲這一個鏈是正則的。

3. 爲了使得在純馬爾可夫鏈中對於任何原始概率都有正極限絕對概率存在而且這些極限概率與原始概率無關，充分必要的，爲這一個鏈是非環狀的[1]。

5. 現在我們來討論有條件概率矩陣 P 的一般的純馬爾可夫鏈。

取矩陣 P 的法式(69)且以 $h_1, h_2, \cdots, h_g$ 記(69)中矩陣 $A_1, A_2, \cdots, A_g$ 的非原性指標。設 h 爲整數 $h_1, h_2, \cdots, h_g$ 的最小公倍數。那末矩陣 P^h 的特徵數除 1 以外，沒有一個特徵數的模能等於 1，亦即 P^h 是

[1] 定理 11′ 的第二部分有時稱爲對於純馬爾可夫鏈的安哥基定理而其第一部分有時稱爲廣義的準安哥基定理(參考[4]，473—476 頁)。

一個正常矩陣；此處 h 是使得 P^h 為一個正常矩陣的最小方次。數 h 稱為所予純馬爾可夫鏈的週期。

因為 P^h 是一個正常矩陣，故有極限

$$\lim_{q\to\infty} P^{hq}=(P^h)^\infty$$

存在，說明極限

$$\lim_{q\to\infty} P^{r+qh}=P_r=P^r(P^h)^\infty \quad (r=0,\ 1,\ \cdots,\ h-1)。$$

這樣一來，在一般的情形，矩陣列

$$P,\ P^2,\ P^3,\ \cdots$$

裂分為有極限 $P_r=P^r(P^h)^\infty$ $(r=0,\ 1,\ \cdots,\ h-1)$ 的 h 個子列。

從條件概率用(106)式轉移到絕對概率，我們得出，序列

$$\overset{1}{p},\ \overset{2}{p},\ \overset{3}{p},\ \cdots$$

裂分為 h 個子列，他們的極限為

$$\lim_{q\to\infty} \overset{r+qh}{p}=(P'^h)^\infty \overset{r}{p} \quad (r=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ h-1)。$$

對於任何有限事件的純馬爾可夫鏈永遠有次之算術中數極限存在：

$$\widetilde{P}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}P^k=\frac{1}{h}(E+P+\cdots+P^{h-1})(P^h)^\infty \tag{110}$$

與

$$\widetilde{p}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\overset{k}{p}=\widetilde{P}'\overset{0}{p}\ 。\tag{110'}$$

此處 $\widetilde{P}=\|\widetilde{p}_{ij}\|_1^n$ 而 $\widetilde{p}=(\widetilde{p}_1,\ \widetilde{p}_2,\ \cdots,\ \widetilde{p}_n)$。值 $\widetilde{p}_{ij}(i,\ j=1,\ 2,\cdots,\ n)$ 與 $\widetilde{p}_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 各稱為極限條件概率中數與極限絕對概率中數。

因為
$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=2}^{N+1}P^k=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}P^k,$$

所以
$$\widetilde{P}P=\widetilde{P},$$

因而由(110')，有
$$P'\widetilde{p}=\widetilde{p}, \tag{111}$$

亦即 $\tilde{p}$ 是矩陣 P' 對於 $\lambda=1$ 的特徵向量。

我們注意，由公式(69)與(110)我們可以表矩陣 $\tilde{P}$ 爲次之形狀

$$\tilde{P}=\begin{pmatrix} \tilde{A}_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{A}_g & 0 \\ & & \tilde{U} & & \tilde{W} \end{pmatrix},$$

其中

$$\tilde{A}_i=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}A_i^k\ (i=1,\ 2,\cdots,\ g),\quad \tilde{W}=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}W^k,$$

$$W=\begin{pmatrix} A_{g+1} & 0 & \cdots & 0 \\ * & A_{g+2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ * & * & \cdots & A_s \end{pmatrix}。$$

因爲矩陣 W 的所有特徵數的模都小於1，所以

$$\lim_{k\to\infty}W^k=0,$$

因而 $\tilde{W}=0$。

故有

$$\tilde{P}=\begin{pmatrix} \tilde{A}_1 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \tilde{A}_2 & \cdots & 0 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{A}_g & \\ & & \tilde{U} & & 0 \end{pmatrix}, \tag{112}$$

因爲 $\tilde{P}$ 是一個斯篤哈斯基矩陣，所以在此處的矩陣 $\tilde{A}_1,\ \tilde{A}_2,\ \cdots,\ \tilde{A}_g$ 都是斯篤哈斯基矩陣。

從所得出的對於 $\tilde{P}$ 的表示式與(107)，知對應於非主要事件的極限絕對概率中數都等於零。

如果在矩陣 P 的法式中，數 $g=1$，那末對於矩陣 P' 數 $\lambda=1$ 是一個單重特徵數。

在這一情形，$\tilde{p}$ 爲(111)所唯一確定，而且極限概率中數 $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \cdots, \tilde{p}_n$ 與原始概率 $\overset{0}{p}_1, \overset{0}{p}_2, \cdots, \overset{0}{p}_n$ 無關。反之，如果 $\tilde{p}$ 與 $\overset{0}{p}$ 無關，那末由(110′)知矩陣 $\tilde{P}$ 的秩爲 1。但矩陣(112)祇有在 $g=1$ 時始能有等於 1 的秩。

我們來把所得出的結果述爲次之定理：

定理 12. ❶ 對於任何有週期 h 的純馬爾可夫鏈，當 $k\to\infty$ 時概率矩陣 P^k 與 $\overset{k}{p}$ 趨於有週期 h 的週期性的重複；此時常有由公式(110)與(110′)所定出的極限條件概率中數與極限絕對概率中數存在，$\tilde{P}=\|\tilde{p}_{ij}\|_1^n$ 與 $\tilde{p}=(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \cdots, \tilde{p}_n)$。

對應於非主要事件的極限絕對概率中數都等於零。

如果在矩陣 P 的法式中有 $g=1$（亦祇有在這一情形），那末極限絕對概率中數 $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \cdots, \tilde{p}_n$ 與原始概率 $\overset{0}{p}_1, \overset{0}{p}_2, \cdots, \overset{0}{p}_n$ 無關，而且爲方程(111)所唯一確定。

§8. 完全非負矩陣

在這一節及次節中我們討論這樣的實矩陣，不僅他的所有元素，而且他的所有的任意級子式都是非負的。這種矩陣對於彈性系統的微振動理論有重要的應用。這些矩陣及其應用的詳細研究讀者可於書[7]中找到。此處我們祇給予這些矩陣的某些基本性質。

1. 首先給予次之定義：

定義 5. 長方矩陣

$$A=\|a_{ik}\| \quad (i=1, 2, \cdots, m;\ k=1, 2, \cdots, n)$$

稱爲完全非負的（完全正的），如果這個矩陣的所有任意級子式都是非負的（正的）：

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \cdots i_p \\ k_1 & k_2 \cdots k_p \end{pmatrix} \geq 0 \quad (>0)$$

❶ 這個定理有時稱爲純馬爾可夫鏈的漸近的定理。參考[4]，479—482 頁。

$$\left(1\leq {i_1<i_2<\cdots<i_p \atop k_1<k_2<\cdots<k_p}\leq n;\ p=1,2,\cdots,\min(m,n)\right)。$$

在以後我們祇限於討論完全非負方陣與完全正方陣。

例 1. 廣義范德蒙矩陣

$$V=\|a_i^{\alpha_k}\|_1^n \quad (0<a_1<a_2<\cdots<a_n;\ \alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n)$$

是完全正的。首先證明 $|V|\neq 0$。事實上，由等式 $|V|=0$ 推得次之結果：我們可以定出不同時等於零的實數 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 使得函數

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k x^{\alpha_k}$$

有 n 個零點 $x_i=a_i(i=1,2,\cdots,n)$，其中 n 為乘冪的項數。當 $n=1$ 時，這是不可能的。應用歸納法的假設，這對於項數少於 n 個的乘冪的和是不可能的，而後來證明這對於所予的函數 $f(x)$ 亦是不可能的。假使說有相反的情形。那末由洛爾定理，為 $n-1$ 個乘冪的項所構成的函數 $f_1(x)=[x^{-\alpha_1}f(x)]'$ 將有 $n-1$ 個正的零點，而這就與歸納法的假設衝突。

因此 $|V|\neq 0$。但當 $\alpha_1=0, \alpha_2=1, \cdots, \alpha_n=n-1$ 時，行列式 $|V|$ 變為平常的范德蒙行列式 $|a_i^{k-1}|_1^n$，他是正的。因為可以對冪次 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 施行連續變動，使得他們之間的不等式 $\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n$ 保持不動的，來化這個范德蒙行列式為廣義的范德蒙行列式，而且由所證明的結果此時這個行列式不能變為零，所以對於任何 $(0<)\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n$ 都有 $|V|>0$。

因為矩陣 V 的任何子式都可視為一個廣義范德蒙矩陣，故矩陣 V 的所有子式都是正的。

2. 討論耶可比矩陣

$$J=\left\|\begin{matrix} a_1 & b_1 & 0\cdots 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2\cdots 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3\cdots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0\cdots c_{n-1} & a_n \end{matrix}\right\|, \tag{113}$$

是即這樣的一個矩陣，不在主對角線，第一上對角線與第一下對角線中的元素都等於零。建立這樣的公式，經由主子式與元素 b，c 來表出這個矩陣的任意子式。設

$$1\leq {i_1<i_2<\cdots<i_p \atop k_1<k_2<\cdots<k_p}\leq n$$

而且

$$i_1=k_1,\ i_2=k_2,\cdots,\ i_{\nu_1}=k_{\nu_1};\ i_{\nu_1+1}\neq k_{\nu_1+1},\cdots,\ i_{\nu_2}\neq k_{\nu_2};\ i_{\nu_2+1}=k_{\nu_2+1},\cdots,\ i_{\nu_3}=k_{\nu_3};\cdots$$

那末

$$J\begin{pmatrix} i_1 & i_2\cdots i_p \\ k_1 & k_2\cdots k_p \end{pmatrix}=J\begin{pmatrix} i_1\cdots i_{\nu_1} \\ k_1\cdots k_{\nu_1} \end{pmatrix}J\begin{pmatrix} i_{\nu_1+1} \\ k_{\nu_1+1} \end{pmatrix}\cdots J\begin{pmatrix} i_{\nu_2} \\ k_{\nu_2} \end{pmatrix}J\begin{pmatrix} i_{\nu_2+1}\cdots i_{\nu_3} \\ k_{\nu_2+1}\cdots k_{\nu_3} \end{pmatrix}\cdots \tag{114}$$

這個式子的真確性可以驗證次之等式來推出：

$$J\begin{pmatrix} i_1\cdots i_p \\ k_1\cdots k_p \end{pmatrix}=J\begin{pmatrix} i_1\cdots i_{\nu-1} \\ k_1\cdots k_{\nu-1} \end{pmatrix}J\begin{pmatrix} i_\nu \\ k_\nu \end{pmatrix}J\begin{pmatrix} i_{\nu+1}\cdots i_p \\ k_{\nu+1}\cdots k_p \end{pmatrix}\quad(\text{如其 } i_\nu \neq k_\nu)。\tag{115}$$

從公式(114)知道矩陣 J 的任何子式都等於其某些主子式與某些元素的乘積。這樣一來，爲了使得矩陣 J 完全非負，充分必要的，爲其所有主子式與元素 b，c 都是非負的。

2．對於完全非負矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 常有次之重要的行列式的不等式❶：

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2\cdots n \\ 1 & 2\cdots n \end{pmatrix}\leqslant A\begin{pmatrix} 1 & 2\cdots p \\ 1 & 2\cdots p \end{pmatrix}A\begin{pmatrix} p+1\cdots n \\ p+1\cdots n \end{pmatrix}\quad(p<n)。\tag{116}$$

爲了推出這個不等式，首先建立次之引：

引5．如果在完全非負矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 中有些主子式等於零，那末任何含有爲零主子式的"增大"主子式都等於零。

證明　引已證明，如果我們能夠證明，對於完全非負矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 由

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2\cdots q \\ 1 & 2\cdots q \end{pmatrix}=0\quad(q<n)\tag{117}$$

常能得出：

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2\cdots n \\ 1 & 2\cdots n \end{pmatrix}=0。\tag{118}$$

[因爲此處的 n 可以爲任何大於 q 的數]。

對此我們來討論兩種情形：

(1) $a_{11}=0$。因爲 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1k} \\ a_{i1} & a_{ik} \end{vmatrix}=-a_{i1}a_{1k}\geqslant 0$，$a_{i1}\geqslant 0$，$a_{1k}\geqslant 0$ $(i, k=$

---

❶ 參考[61в]，還有[7]，111 頁及其以後。在同一地方斷定了在(116)式中的等號可以成立的情形祇有次之很明顯的二種情形：

(1)(116)的右節的因式中有一個等於零，

(2)全部元素 a_{ik} $(i=1, 2, \cdots, p;\ k=p+1, \cdots, n)$ 或全部元素 a_{ik} $(i=p+1, \cdots, n;\ k=1, 2, \cdots, p)$ 都等於零。

不等式(116)與關於恆正安密達或二次型的廣義阿達馬不等式[參考第九章，§5，5，(33)]有相同的外表。

$=2, \cdots, n$)，所以或者全部 $a_{i1}=0(i=2, \cdots, n)$，或者全部 $a_{1k}=0(k=$ $=2, \cdots, n$)。從這些等式與等式 $a_{11}=0$ 得出(118)。

（2）$a_{11}=0$，那末對於某一個 $p(1<p\leq q)$ 有：

$$A\begin{pmatrix}1 & 2\cdots p-1\\ 1 & 2\cdots p-1\end{pmatrix}=0,\ A\begin{pmatrix}1 & 2\cdots p-1 & p\\ 1 & 2\cdots p-1 & p\end{pmatrix}=0。\tag{119}$$

引進加邊行列式

$$d_{ik}=A\begin{pmatrix}1 & 2\cdots p-1 & i\\ 1 & 2\cdots p-1 & k\end{pmatrix}\quad (i, k=p, p+1, \cdots, n)。\tag{120}$$

用他們來建立矩陣 $D=\|d_{ik}\|_p^n$。

根據薛爾凡斯透恆等式(第二章，§3)得：

$$D\begin{pmatrix}i_1 & i_2\cdots i_g\\ k_1 & k_2\cdots k_g\end{pmatrix}=$$

$$=\left[A\begin{pmatrix}1 & 2\cdots p-1\\ 1 & 2\cdots p-1\end{pmatrix}\right]^{g-1}A\begin{pmatrix}1 & 2\cdots p-1 & i_1 & i_2\cdots i_g\\ 1 & 2\cdots p-1 & k_1 & k_2\cdots k_g\end{pmatrix}\geq 0\tag{121}$$

$$\left(p\leq\begin{matrix}i_1<i_2<\cdots<i_g\\ k_1<k_2<\cdots<k_g\end{matrix}\leq n;\ g=1, 2, \cdots, n-p+1\right),$$

故知 D 是一個完全非負矩陣。

因爲由(119)得：

$$d_{pp}=A\begin{pmatrix}1 & 2\cdots p\\ 1 & 2\cdots p\end{pmatrix}=0,$$

所以矩陣 $D=\|d_{ik}\|_p^n$ 適合已經討論過的情形(1)，因而

$$D\begin{pmatrix}p & p+1\cdots n\\ p & p+1\cdots n\end{pmatrix}=\left[A\begin{pmatrix}1 & 2\cdots p-1\\ 1 & 2\cdots p-1\end{pmatrix}\right]^{n-p}A\begin{pmatrix}1 & 2\cdots n\\ 1 & 2\cdots n\end{pmatrix}=0。$$

故因 $A\begin{pmatrix}1 & 2\cdots p-1\\ 1 & 2\cdots p-1\end{pmatrix}\neq 0$，得出(118)。我們的引已經證明。

3. 現在我們可以推出不等式(116)，且可假設矩陣 A 的所有主子式都不等於零，因爲根據引5主子式中如有一個等於零就會得出

$|A|=0$，而此時不等式(116)是很明顯的。

當 $n=2$ 時不等式(116)的眞確性是可以直接驗證的:

$$A\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\leqslant a_{11}a_{22},$$

因爲 $a_{12}\geqslant 0$，$a_{21}\geqslant 0$。假設不等式(116)對於階 $<n$ 的矩陣是眞確的，而來證明其對於 $n>2$ 亦是眞確的。此外，並不損失其普通性，可以作爲 $p>1$，因爲在相反的情形可以倒轉行列式的序數來互易數 p 與 $n-p$ 的作用。

在討論中再來引進矩陣 $D=\|d_{ik}\|_p^n$，其中 $d_{ik}(i,k=p,p+1,\cdots,n)$ 是爲(120)式所確定的，應用兩次錫爾凡斯透爾等式與關於階 $<n$ 的矩陣的基本不等式(116)，我們有

$$A\begin{pmatrix}1&2\cdots n\\1&2\cdots n\end{pmatrix}=\frac{D\begin{pmatrix}p&p+1\cdots n\\p&p+1\cdots n\end{pmatrix}}{\left[A\begin{pmatrix}1&2\cdots p-1\\1&2\cdots p-1\end{pmatrix}\right]^{n-p}}\leqslant\frac{d_{pp}D\begin{pmatrix}p+1\cdots n\\p+1\cdots n\end{pmatrix}}{\left[A\begin{pmatrix}1&2\cdots p-1\\1&2\cdots p-1\end{pmatrix}\right]^{n-p}}=$$

$$=\frac{A\begin{pmatrix}1&2\cdots p\\1&2\cdots p\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1&2\cdots p-1&p+1\cdots n\\1&2\cdots p-1&p+1\cdots n\end{pmatrix}}{A\begin{pmatrix}1&2\cdots p-1\\1&2\cdots p-1\end{pmatrix}}\leqslant$$

$$\leqslant A\begin{pmatrix}1&2\cdots p\\1&2\cdots p\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}p+1\cdots n\\p+1\cdots n\end{pmatrix}。\tag{122}$$

這樣一來，不等式(116)可以作爲是已經建立好了的。

引進次之

定義 6. 矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 的子式

$$A\begin{pmatrix}i_1&i_2\cdots i_p\\k_1&k_2\cdots k_p\end{pmatrix}\quad\left(1\leqslant\begin{matrix}i_1<i_2<\cdots<i_p\\k_1<k_2<\cdots<k_p\end{matrix}\leqslant n\right)\tag{123}$$

稱爲近主子式，如果在差 i_1-k_1，i_2-k_2，$\cdots$，i_p-k_p 中祇有一個差不等於零。

我們注意，得出不等式(116)的全部推理(包括他的輔助引的證明在內)仍然有效，如果換條件"A 是一個完全非負矩陣"爲較弱的條件

"在矩陣 A 中所有主子式與近主子式都是非負的"❶。

§9. 顫動矩陣

1. 完全正矩陣的特徵數與特徵向量有一系列的顯著性質。但是從對於彈性系統微振動的應用這一觀點來看，完全正矩陣類是不夠的。對於這一關係，完全非負矩陣類是足夠應用的。但亦不是所有完全非負矩陣的影譜性質都是必要的。有一種中間類（在完全正矩陣類與完全非負矩陣類之間的）存在，他們保有完全正矩陣的影譜性質且對於應用的目的是足夠達到的。這種中間矩陣類稱為"顫動的"矩陣類。這個名詞是這樣來的，因為顫動矩陣構成一種數學工具用來研究線性彈性系統微振動的顫動性質❷。

定義 7. 矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 稱為顫動的，如果 A 是一個完全非負矩陣且有這樣的整數 $q>0$ 存在使得 A^q 是一個完全正矩陣。

例 耶可比矩陣 J［參考(113)］是一個顫動矩陣的充分必要條件為 1° 所有數 b，c 都是正的與 2° 順序主子式都是正的：

$$a_1>0,\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & a_2 \end{vmatrix}>0,\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 & a_3 \end{vmatrix}>0,\cdots,\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \cdots 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 \cdots 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 \cdots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots c_{n-1} & a_n \end{vmatrix}>0。\quad (124)$$

條件 1°，2° 的必要性 數 b，c 是非負的，因為矩陣 $J\geqslant 0$。再者沒有一個數 b，c 能夠等於零，因為在相反的情形我們的矩陣將是可分離的，因而對於任何 $q>0$，不等式 $J^q>0$ 都

---

❶ 參考[756]。我們常常引用到的弗．爾．甘特馬赫爾與蒙．格．克萊因所著書[7]中（第二版）在這一點上發生錯誤，這是篤逵．蒙．柯且梁斯基所最先指出的。在書[7] 111 頁中以等式

$$\sum_{\nu=1}^{p}|i_\nu-k_\nu|=1$$

來定義近主子式(123)。對於這樣的近主子式定義，從主子式與近主子式的非負性不能得出不等式(116)。但是[7]中第二章 §6 所從事的關於基本不等式的述設及其證明是真確的，如果對於近主子式給予此處所引進來的定義，至於這個定義是取自論文[756]中的。

❷ 參考[7]，緒論與第三，第四章。

不能成立。因此，所有數 b, c 都是正的。根據引 5，所有主子式 (124) 都是正的，因爲從 $|J|\geq 0$ 與 $|\tilde{J}|\geq 0$ 得出：$|J|>0$。

條件 1°, 2° 的充分性　展開 $|J|$，很容易證明，在 $|J|$ 的各項中數 b, c 祇能在乘積 b_1c_1, b_2c_2, $\cdots$, $b_{n-1}c_{n-1}$ 裏面出現。對於任何"零密接的"主子式，亦卽由依次引進行與列(沒有刪去的)所構成的子式，都有同樣的關係。但矩陣 J 的任何主子式都可分解爲零密接主子式的乘積。故在矩陣 J 的任何主子式中，數 b 與 c 祇在乘積 b_1c_1, b_2c_2, $\cdots$, $b_{n-1}c_{n-1}$ 中出現。

建立對稱耶可比矩陣

$$\tilde{J}=\left\|\begin{matrix} a_1 & \tilde{b}_1 & & & 0 \\ \tilde{b}_1 & a_2 & \tilde{b}_2 & & \\ & \tilde{b}_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \tilde{b}_{n-1} \\ 0 & & & \tilde{b}_{n-1} & a_n \end{matrix}\right\|,\quad \tilde{b}_i=\sqrt{b_ic_i}>0\quad (i=1,\,2,\,\cdots,\,n)。\tag{125}$$

從上面所得出的耶可比矩陣中主子式的性質，知道在矩陣 J 與 $\tilde{J}$ 中對應的主子式彼此相等。此時條件(124)說明二次型

$$\tilde{J}(x,\,x)$$

是恆正的(參考第十章，§4，定理 3)。但是恆正二次型的所有主子式都是正的。故在矩陣 J 中所有主子式都是正的。因爲由條件 1° 所有 b 與 c 都是正數，所以由(114)式知所有矩陣 J 的子式都是非負的。亦卽 J 是一個完全非負矩陣。

對於適合條件 1°, 2° 的完全非負矩陣 J 的振動性，可以直接從次之振動性判定來推出。

爲了使得完全非負矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 是一個振動矩陣，充分必要的，是要適合次之條件：

(1) A 是一個滿秩矩陣($|A|>0$)。

(2) 矩陣 A 中位於主對角線中的，位於第一上對角線中的與位於第一下對角線中的元素都不等於零($a_{ik}>0$ 如其 $|i-k|\leq 1$)。

對於這一命題的證明，讀者可在[17]的第二章§7中找到。

2. 爲了便於敍述振動矩陣的特徵數與特徵向量的性質，我們預先引進一些概念與記號。

討論向量(列)

$$u=(u_1,\,u_2,\,\cdots,\,u_n)。$$

我們要計算向量 u 諸坐標序列 u_1, u_2, $\cdots$, u_n 的變號數，此時對於零坐標(如果有這樣的坐標時)可予以任何符號。按照我們給予零坐標的符號寫法，變號數將在已知限中擺動。我們以 S_u^- 與 S_u^+ 各記這樣得出來的

極大的與極小的變號數。在 $S_u^-=S_u^+$ 的情形，我們說恰好有若干變號數且記之以 S_u。顯然，$S_u^-=S_u^+$ 的充分必要條件，是1° 向量 u 的兩端坐標 u_1 與 u_n 都不等於零，而且 2° 等式 $u_i=0(1<i<n)$ 常伴以不等式 $u_{i-1}u_{i+1}<0$。

現在我們來證明次之基本定理：

定理 13. 1. 振動矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 常有 n 個不同的正特徵數

$$\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_n>0。\tag{126}$$

2. 對於矩陣 A，對應於最大特徵數 λ_1 的特徵向量 $\overset{1}{u}=(u_{11}, u_{21}, \cdots, u_{n1})$ 中，所有坐標都不等於零且有相同的符號；至於在對應於第二個特徵數 λ_2 的特徵向量 $\overset{2}{u}=(u_{12}, u_{22}, \cdots, u_{n2})$ 中，坐標序列恰好有一個變號數；一般的，在對應於特徵數 λ_k 的特徵向量 $\overset{k}{u}=(u_{1k}, u_{2k}, \cdots, u_{nk})$ 的坐標序列中，恰好有 $k-1$ 個變號數 $(k=1, 2, \cdots, n)$。

3. 對於任何實數 $c_g, c_{g+1}, \cdots, c_h\left(1\leqslant g\leqslant h\leqslant n;\ \sum\limits_{k=g}^{h}c_k^2>0\right)$，在向量

$$u=\sum_{k=g}^{h}c_k\overset{k}{u}\tag{127}$$

中坐標序列的變號數含於 $g-1$ 與 $h-1$ 之間

$$g-1\leqslant S_u^-\leqslant S_u^+\leqslant h-1。\tag{128}$$

證明 1. 給予矩陣 A 的特徵數 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的序數，使得

$$|\lambda_1|\geqslant|\lambda_2|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n|,$$

且在討論中引進 p 層締結矩陣 $\mathfrak{A}_p(p=1, 2,\cdots, n)$（參考第一章，§4）。矩陣 $\mathfrak{A}_p$ 的特徵數是在矩陣 A 的特徵數中所有可能的取出 p 個的乘積（參考第三章，§8 的末尾），亦卽乘積

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_p,\ \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{p-1}\lambda_{p+1},\cdots$$

由定理的條件知道對於某一個整數 q，乘冪 A^q 是一個完全正矩陣。此時 $\mathfrak{A}_p\geqslant0$, $\mathfrak{A}_p^q>0$❶，亦卽 $\mathfrak{A}_p$ 是一個不可分離的原非負矩陣。

❶ 矩陣 $\mathfrak{A}_p^q$ 是矩陣 A^q 的 p 層締結矩陣（參考第一章，§4）。

應用勿勞別涅斯定理(參考本章，§2，定理 2) 於原矩陣 $\mathfrak{A}_p(p=1, 2, \cdots, n)$，我們得出：

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_p>0 \quad (p=1, 2, \cdots, n),$$

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_p>\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{p-1}\lambda_{p+1} \quad (p=1, 2, \cdots, n-1)。$$

故可推出不等式(126)。

2. 從所建立的不等式(126)推知 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 是一個單構矩陣。那末所有締結矩陣 $\mathfrak{A}_p(p=1, 2, \cdots, n)$ 都是單構矩陣(參考第三章，§8，定理 3)。

在討論中引進矩陣 A 的基礎矩陣 $U=\|u_{ik}\|_1^n$ (位於矩陣 U 的第 k 列是矩陣 A 諸特徵向量 u 的第 k 個坐標；$k=1, 2, \cdots, n$)。那末(參考第三章，§8 末尾)矩陣 $\mathfrak{A}_p$ 的特徵數 $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_p$ 將對應於有坐標

$$U\begin{pmatrix} i_1 & i_2\cdots i_p \\ 1 & 2\cdots p \end{pmatrix} \quad (1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n) \tag{129}$$

的特徵向量。

根據勿勞別涅斯定理所有的數(129)都不等於零而且是同號的。乘向量 $\overset{1}{u}, \overset{2}{u}, \cdots, \overset{n}{u}$ 以 $+1$ 或 -1，可以視所有子式(129)都是正的：

$$U\begin{pmatrix} i_1 & i_2\cdots i_p \\ 1 & 2\cdots p \end{pmatrix}>0 \quad \begin{pmatrix} 1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n; \\ p=1, 2, \cdots, n \end{pmatrix}。 \tag{130}$$

矩陣 A 的基礎矩陣 $U=\|u_{ik}\|_1^n$ 與矩陣 A 間有次之結合等式：

$$A=U\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}U^{-1}。 \tag{131}$$

故有

$$A'=U'^{-1}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}U'。 \tag{132}$$

比較(131)與(132)我們看到，矩陣

$$V=U'^{-1} \tag{133}$$

是特徵數同爲 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的轉置矩陣 A' 的基礎矩陣。但從矩陣 A 的顫動性得出轉置矩陣 A' 的顫動性。故對於任何 $p=1, 2, \cdots, n$，矩陣 V 的所有子式

$$V\begin{pmatrix} i_1 & i_2\cdots i_p \\ 1 & 2\cdots p \end{pmatrix} \quad (1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n) \tag{134}$$

都不等於零而且是同號的。

另一方面，根據(133)矩陣 U 與 V 間有等式關係

$$UV=E\text{。}$$

變爲 p 階縮結矩陣(參考第一章，§ 4)，我們有：

$$\mathfrak{U}_p\mathfrak{B}_p=\mathfrak{E}_p\text{。}$$

因此，特別的，由於矩陣 $\mathfrak{E}_p$ 的對角線上元素都等於 1，我們得出：

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n} U\begin{pmatrix} i_1 & i_2\cdots i_p \\ 1 & 2\cdots p \end{pmatrix} V\begin{pmatrix} i_1 & i_2\cdots i_p \\ 1 & 2\cdots p \end{pmatrix}=1\text{。} \tag{135}$$

在這個等式的左節諸項中第一個因子是正的，而第二個因子都不等於零而且是同號的。那末顯然，其第二個因子亦都是正的，亦即

$$V\begin{pmatrix} i_1 & i_2\cdots i_p \\ 1 & 2\cdots p \end{pmatrix}>0 \quad \begin{pmatrix} 1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n; \\ p=1,2,\cdots,n \end{pmatrix}\text{。} \tag{136}$$

這樣一來，對於矩陣 $U=\|a_{ik}\|_1^n$ 與 $V=U'^{-1}$ 同時有不等式(130)與(136)。

把矩陣 V 的子式用已知公式[參考第一章，§ 4]經其逆矩陣 $V^{-1}=U'$ 的子式來表出，我們得出：

$$V\begin{pmatrix} j_1 & j_2\cdots j_{n-p} \\ 1 & 2\cdots n-p \end{pmatrix}=\frac{(-1)^{np+\sum_{\nu=1}^{p} i_\nu}}{|U|}U\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ n & n-1 & \cdots & n-p+1 \end{pmatrix}, \tag{137}$$

其中合併 $i_1<i_2<\cdots<i_p$ 與 $j_1<j_2<\cdots<j_{n-p}$ 給予全部足數組 $1,2,\cdots,n$。因爲由(130)知 $|U|>0$，故由(136)與(137)推得：

$$(-1)^{np+\sum_{\nu=1}^{p} i_\nu}U\begin{pmatrix} i_1 & i_2\cdots i_p \\ 1 & 2\cdots p \end{pmatrix}>0 \quad \begin{pmatrix} 1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_p\leqslant n; \\ p=1,2,\cdots,n \end{pmatrix}\text{。} \tag{138}$$

現在設 $u=\sum_{k=g}^{h} c_k \overset{k}{u}$ $\left(\sum_{k=g}^{h} c_k^2>0\right)$。我們來證明，從不等式(130)得出不等式(128)的第二部分：

$$S_u^+ \leqslant h-1, \tag{139}$$

而由不等式(138)來得其第一部分:

$$S_u^- \geqslant g-1。 \tag{140}$$

假設 $S_u^+ > h-1$。那末可以找到向量 u 的這樣的 $h+1$ 個坐標

$$u_{i_1},\ u_{i_2},\ \cdots,\ u_{i_{h+1}} \quad (1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_{h+1} \leqslant n), \tag{141}$$

使得

$$u_{i_\alpha} u_{i_{\alpha+1}} \leqslant 0 \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, h)。$$

此處坐標(141)不能同時等於零,因爲使向量 $u = \sum_{k=1}^{h} c_k \overset{k}{u}$ $(c_1 = \cdots = c_{g-1} = 0;\ \sum_{k=1}^{h} c_k^2 > 0)$ 的對應坐標等於零,我們將得出齊次方程組

$$\sum_{k=1}^{h} c_k u_{i_\alpha k} = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, h)$$

有非零解 $c_1, c_2, \cdots, c_h$; 而這個方程組的行列式

$$U\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \cdots i_h \\ 1 & 2 \cdots h \end{pmatrix}$$

根據(130)式却不能等於零。

現在來討論等於零的行列式

$$\begin{vmatrix} u_{i_1 1} & \cdots & u_{i_1 h} & u_{i_1} \\ u_{i_2 1} & \cdots & u_{i_2 h} & u_{i_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{i_{h+1} 1} & \cdots & u_{i_{h+1} h} & u_{i_{h+1}} \end{vmatrix} = 0。$$

按照最後一列的元素來展開這個行列式:

$$\sum_{\alpha=1}^{h+1} (-1)^{h+\alpha+1} u_{i_\alpha} U\begin{pmatrix} i_1 \cdots i_{\alpha-1} i_{\alpha+1} \cdots i_{h+1} \\ 1 \cdots\cdots\cdots\cdots h \end{pmatrix} = 0。$$

但是這個等式不能成立,因爲在左節中沒有兩個項是異號的而且至少有一個項不等於零。這樣一來,由於我們的假設 $S_u^+ > h-1$ 得出矛盾的結果,故不等式(139)可視爲是已經建立的。

在討論中引進向量

$$\overset{k}{v}{}^* = (v_{1k}^*, v_{2k}^*, \cdots, v_{nk}^*) \quad (k=1, 2, \cdots, n),$$

其中 $$u_{ik}^* = (-1)^{n+i+k} u_{ik} \quad (i, k=1, 2, \cdots, n)。$$

那末對於矩陣 $U^* = \| u_{ik}^* \|$ 由於(138)將有：

$$U^*\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_p \\ n & n-1 & \cdots & n-p+1 \end{pmatrix} > 0 \quad \begin{pmatrix} 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant n; \\ p=1, 2, \cdots, n \end{pmatrix}。 \tag{142}$$

但不等式(142)類似於不等式(130)。故命

$$u^* = \sum_{k=g}^{h} (-1)^k c_k \overset{k}{u}{}^*, \tag{143}$$

將有不等式，類似於不等式(139) ❶：

$$S_{u^*}^- \leqslant n-g。 \tag{144}$$

設 $u=(u_1, u_2, \cdots, u_n)$，$u^*=(u_1^*, u_2^*, \cdots, u_n^*)$。易知

$$u_i^* = (-1)^i u_i \quad (i=1, 2, \cdots, n)。$$

故有 $$S_{u^*}^+ + S_u^- = n-1,$$

因而，由(144)得出關係式(140)。

不等式(128)已經證明。因爲從這個不等式當 $g=h=k$ 時得出定理的論斷 2，所以我們的定理已經完全證明。

3. 討論所證明的定理對於集中於部分彈性連續體(有限長的弦或軸)的動點 $x_1<x_2<\cdots<x_n$ 上 n 個質量 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 的微振動的研究。這個連續體是置於(在平衡狀況中) x 軸的線段 $0\leqslant x\leqslant l$ 上。

以 $K(x, s)$ $(0\leqslant x, s\leqslant l)$ 記這個連續體的影響函數[$K(x, s)$ 是在點 s 作用單位力時，在點 x 的垂度]，而以 k_{ij} 記所予 n 個質量的影響係數：

$$k_{ij} = K(x_i, x_j) \quad (i, j=1, 2, \cdots, n)。$$

如果在點 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 用上 n 個力 $F_1, F_2, \cdots, F_n$，那末由於垂度的線性疊置，對應的靜定垂度 $y(x)$ $(0\leqslant x\leqslant l)$ 可表爲公式

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} K(x, x_j) F_j。$$

❶ 在不等式(142)中向量 $\overset{k}{u}$ $(k=1, 2, \cdots, n)$ 列成相反的次序 $\overset{n}{u}, \overset{n-1}{u}, \cdots$ 向量 $\overset{g}{u}$ 在這一序列的 $n-g$ 個向量的後面。

在此處換力 F_j 爲慣性力 $-m_j\frac{\partial^2}{\partial t^2}y(x_j;t)$ $(j=1, 2, \cdots, n)$，我們得出自由振動方程

$$y(x)=-\sum_{j=1}^{n} m_j K(x, x_j)\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x_j; t)。\tag{145}$$

我們所要找出的連續體的調和振動有形狀

$$y(x)=u(x)\sin(pt+\alpha) \quad (0<x<l)。\tag{146}$$

此處 $u(x)$ 爲振幅函數，p 爲頻率，α 爲原始位相。在(145)中代 $y(x)$ 以其這一個表示式且約去 $\sin(pt+\alpha)$，我們得出：

$$u(x)=p^2\sum_{j=1}^{n} m_j K(x, x_j)u(x_j)。\tag{147}$$

對於安置質量點上變量垂度與振幅垂度引進記法：

$$y_i=y(x_i, t),\ u_i=u(x_i) \quad (i=1, 2, \cdots, n)。$$

那末　$$y_i=u_i\sin(pt+\alpha) \quad (i=1, 2, \cdots, n)。$$

還引進導出振幅垂度與導出影響係數

$$\tilde{u}_i=\sqrt{m_i}\,u_i,\ a_{ij}=\sqrt{m_i m_j}\,k_{ij} \quad (i, j=1, 2, \cdots, n)。\tag{148}$$

在(147)中順次換 x 爲 $x_i(i=1, 2, \cdots, n)$，我們得出振幅垂度方程組：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{u}_j=\lambda\tilde{u}_i \quad \left(\lambda=\frac{1}{p^2};\ i=1, 2, \cdots, n\right)。\tag{149}$$

故知，振幅向量 $\tilde{u}=(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \cdots, \tilde{u}_n)$ 是矩陣 $A=\|a_{ij}\|_1^n=\|\sqrt{m_i m_j}\,k_{ij}\|_1^n$ 對於 $\lambda=\frac{1}{p^2}$ 的特徵向量(參考第十章，§8)。

詳細分析的結果❶，得出部分連續體的影響係數矩陣 $\|k_{ij}\|_1^n$ 常爲一個顫動矩陣。故矩陣 $A=\|a_{ij}\|_1^n=\|\sqrt{m_i m_j}\,k_{ij}\|_1^n$ 是一個顫動矩陣！因此矩陣 A(根據定理 13)有 n 個正特徵數

$$\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_n>0,$$

❶ 參考[79a, c]與[7]，第三章。

亦卽連續體有 n 個調和振動存在其不同頻率爲：

$$(0<)p_1<p_2<\cdots<p_n \quad \left(\lambda_i=\frac{1}{p_i^2};\ i=1,2,\cdots,n\right)。$$

由於同一定理知有頻率 p_1 的基音所對應的振幅垂度都不等於零而且是同號的。第二個振幅垂度，其所對應的爲有頻率 p_2 的第一泛音，恰好有一個變號，一般的對於有頻率 p_j 的泛音所對應的振幅垂度恰好有 $j-1$ 個變號($j=1, 2, \cdots, n$)。

從這個事實，就是影響係數矩陣 $\|k_{ij}\|_1^n$ 是顫動矩陣，推出連續體的其他的顫動性質：(1)當 $p=p_1$ 時，與振幅垂度以公式(147)相結合的振幅函數沒有結點；一般的當 $p=p_j$ 時這個函數有 $j-1$ 個結點($j=1, 2, \cdots, n$)；(2)兩個鄰音的結點是間欵的，諸如此類。

對於這些性質我們此處不作進一步的研究[1]。

[1] 參考[7]，第三，第四章。

第十四章　矩陣論對於線性微分方程組的應用

§1. 有變量係數的線性微分方程組．一般的概念

設已了一級齊次線性微分方程組：

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{k=1}^{n}p_{ik}(t)x_k \quad (i=1,2,\cdots,n), \tag{1}$$

其中 $p_{ik}(t)$ $(i,k=1,2,\cdots,n)$ 爲實變數 t 的複函數，在 t 所變動的隔間（有限的或無限的）中他們都是連續的[1]。

命 $P(t)=\|p_{ik}(t)\|_1^n$ 與 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，我們可以寫組（1）爲：

$$\frac{dx}{dt}=P(t)x\text{。} \tag{2}$$

組（1）的積分矩陣是指方陣 $X(t)=\|x_{ik}(t)\|_1^n$，他的諸列是方程組的 n 個線性無關解。

因爲矩陣的每一個列都適合方程(2)，所以積分矩陣 X 適合方程

$$\frac{dX}{dt}=P(t)X\text{。} \tag{3}$$

以後我們討論矩陣方程（3）來代替組（1）的討論。

從關於線性微分方程組的解的存在性與唯一性定理[2]，知積分矩陣 $X(t)$ 是唯一確定的，如果對於某一（"原始"）值 $t=t_0$[3]，這個矩陣的值是已知的，$X(t_0)=X_0$。可以取任何 n 級滿秩方陣作爲 X_0。在 $X(t_0)=E$ 的特殊情形，我們稱積分矩陣 $X(t)$ 爲標準化的。

微分矩陣 X 的行列式時要順次微分行列式的行而且要用及微分關係

---

[1] 在這一章所有關係中出現的 t 的函數，都對於 t 所變動的已知隔間是有意義的。

[2] 這個定理的證明將在 §5 中引進。參考伊．格．片脫羅夫斯基，常微分方程論講義，1952（俄文）。

[3] 假設 t_0 是在 t 所變動的隔間中。

$$\frac{dx_{ij}}{dt}=\sum_{k=1}^{n}p_{ik}x_{kj}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)。$$

此時我們得出：

$$\frac{d|X|}{dt}=(p_{11}+p_{22}+\cdots+p_{nn})|X|。$$

故得已知的耶可比恆等式

$$|X|=ce^{\int_{t_0}^{t}\mathrm{Sp}\,P\,dt},\tag{4}$$

其中 c 爲常數，而

$$\mathrm{Sp}\,P=p_{11}+p_{22}+\cdots+p_{nn}$$

爲矩陣 $P(t)$ 的追跡。

因爲行列式 $|X|$ 不能恆等於零，所以 $c\neq0$。但由耶可比恆等式，知對變數的任何値，行列式 $|X|$ 都不等於零

$$|X|\neq0,$$

亦即對於變數的任何値積分矩陣都是滿秩的。

如果 $\widetilde{X}(t)$ 是方程(3)的滿秩 ($|\widetilde{X}|\neq0$) 特殊解，那末這個方程的一般解爲次之公式所確定

$$X=\widetilde{X}C,\tag{5}$$

其中 C 爲任何常數矩陣。

事實上，右乘等式

$$\frac{d\widetilde{X}}{dt}=P\widetilde{X}\tag{6}$$

的兩節以 C，證明矩陣 $\widetilde{X}C$ 適合方程(3)。另一方面，如果 X 是方程(3)的任一解，那末由(6)得出：

$$\frac{dX}{dt}=\frac{d}{dt}(\widetilde{X}\cdot\widetilde{X}^{-1}X)=\frac{d\widetilde{X}}{dt}\widetilde{X}^{-1}X+\widetilde{X}\frac{d}{dt}(\widetilde{X}^{-1}X)=$$

$$=PX+\widetilde{X}\frac{d}{dt}(\widetilde{X}^{-1}X),$$

故由(3)得：

$$\frac{d}{dt}(\tilde{X}^{-1}X)=0$$

或
$$\tilde{X}^{-1}X=\text{常數矩陣}=C,$$

亦即(5)式是眞確的。

組(1)的所有積分矩陣 X 都可以在(5)式中取 $|C|\neq 0$ 來得出。

討論特殊情形：

$$\frac{dX}{dt}=AX, \tag{7}$$

其中 A 爲常數矩陣。此時 $\tilde{X}=e^{At}$ 是方程(7)的一個特殊滿秩解❶，故這個方程的一般解有形狀

$$X=e^{At}C, \tag{8}$$

其中 C 爲任意的常數矩陣。

在(8)中取 $t=t_0$，我們得出 $X_0=e^{At_0}C$。故 $C=e^{-At_0}X_0$ 因而(8)式可以表爲形狀

$$X=e^{A(t-t_0)}X_0。 \tag{9}$$

這個公式與以前在第五章§5中所得出的公式(46)相當。

還要討論所謂柯許組：

$$\frac{dX}{dt}=\frac{A}{t-a}X \quad (A\text{是一個常數矩陣})。 \tag{10}$$

經次之變數的代換

$$u=\ln(t-a)$$

可以把這一組化爲前面的方程。故組(10)的一般解有形狀：

$$X=e^{A\ln(t-a)}C=(t-a)^{A}C。 \tag{11}$$

在公式(8)與(11)中所遇到的函數 e^{At} 與 $(t-a)^A$ 可以表爲[第五章，§5，(44)]：

---

❶ 對級數 $e^{At}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}t^k$ 逐項微分，我們得出：

$$\frac{d}{dt}e^{At}=Ae^{At}。$$

$$e^{At}=\sum_{k=1}^{s}(Z_{k1}+Z_{k2}t+\cdots+Z_{km_k}t^{m_k-1})e^{\lambda_k t},\tag{12}$$

$$(t-a)^{A}=\sum_{k=1}^{s}(Z_{k1}+Z_{k2}\ln(t-a)+\cdots+$$
$$+Z_{km_k}[\ln(t-a)]^{m_k-1})(t-a)^{\lambda_k}。\tag{13}$$

此處　　$\psi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}$

（在 $i\neq k$ 時 $\lambda_i\neq\lambda_k$；$i,k=1,2,\cdots,s$）

爲矩陣 A 的最小多項式，而 Z_{kj} $(j=1,2,\cdots,m_k;\ k=1,2,\cdots,s)$ 爲線性無關的常數矩陣，都是 A 的多項式❶。

註　有時取矩陣 W 作爲微分方程組（1）的積分矩陣，在 W 中所有的**行**是方程組的線性無關解。顯然矩陣 W 是矩陣 X 的轉置矩陣：

$$W=X'。$$

在等式（3）的兩節取轉置矩陣，就換（3）爲次之 W 的方程：

$$\frac{dW}{dt}=WP(t)。\tag{3'}$$

在這個方程的右節中 W 是第一個因子，而在方程（3）中 X 是第二個因子。

§2. 略晉諾夫變換

現在假設，在組（1）中［或在方程（3）中］係數矩陣 $P(t)=\|p_{ik}(t)\|_1^n$ 是隔間 (t_0,∞) 中 t 的連續有界函數❷。

代替未知函數 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 利用次之變換引進新的未知函數 $y_1,y_2,\cdots,y_n$：

---

❶　在(12)式的右節中每一項 $X_k=(Z_{k1}+Z_{k2}t+\cdots+Z_{km_k}t^{m_k-1})e^{\lambda_k t}$ $(k=1,2,\cdots,s)$ 都是方程（7）的解。事實上，對於任何函數 $g(\lambda)$，乘積 $g(A)e^{At}$ 都適合這個方程。但是 $X_k=f(A)=g(A)e^{At}$，如果 $f(\lambda)=g(\lambda)e^{\lambda t}$ 與 $g(\lambda_k)=1$，而所有其餘的 $g(\lambda)$ 在矩陣 A 的影譜上的 $m-1$個値都等於零［參考第五章，§3，(17)］。

❷　這就是說，每一個函數 $p_{ik}(t)$ $(i,k=1,2,\cdots,n)$ 都在隔間 (t_0,∞) 中，亦即當 $t\geq t_0$ 時，是連續有界的。

$$x_i=\sum_{k=1}^{n} l_{ik}(t)\,y_k \quad (i=1,2,\cdots,n)。 \tag{14}$$

對變換矩陣 $L(t)=\|l_{ik}(t)\|_1^n$ 加上次諸限制：

1° $L(t)$ 在隔間 (t_0,∞) 中有連續導函數 $\frac{dL}{dt}$；

2° $L(t)$ 與 $\frac{dL}{dt}$ 在隔間 (t_0,∞) 中是有界的；

3° 有這樣的常數 m 存在使得

$$0<m<\operatorname{mod}|L(t)| \quad (t\geqslant t_0),$$

亦即行列式 $|L(t)|$ 的模有正常數下界 m。

係數矩陣 $L(t)=\|l_{ik}(t)\|_1^n$ 適合條件 $1^\circ-3^\circ$ 的變換 (14) 我們稱爲略普諾夫變換，其對應矩陣 $L(t)$ 稱爲略普諾夫矩陣。

阿.蒙.略普諾夫在其名著"關於運動的穩定性的一般問題"中曾研究過這種變換。

例 1. 如果 $L=$ 常數矩陣而且 $|L|\neq 0$，那末矩陣 L 適合條件 $1^\circ—3^\circ$。故常係數的滿秩變換永遠是一個略普諾夫變換。

2. 如果 $D=\|d_{ik}\|_1^n$ 是一個特徵數爲純虛數的單構矩陣，那末矩陣

$$L(t)=e^{Dt}$$

適合條件 $1^\circ—3^\circ$，因而是一個略普諾夫矩陣❶。

容易驗證，從矩陣 $L(t)$ 的性質 $1^\circ—3^\circ$，知有逆矩陣 $L^{-1}(t)$ 存在而且他亦適合條件 $1^\circ—3^\circ$，亦即略普諾夫變換的逆變換仍然是一個略普諾夫變換。同樣的可以驗證，繼續施行兩個略普諾夫變換其結果仍然是一個略普諾夫變換。這樣一來，略普諾夫變換構成一個羣。略普諾夫變換有次之重要性質：

如果經變換 (14) 後化方程組 (1) 爲方程組

$$\frac{dy_i}{dt}=\sum_{k=1}^{n} q_{ik}(t)\,y_k, \tag{15}$$

其零解是略普諾夫穩定的，漸近穩定的或非穩定的（參考第五章，§ 6），那末原方程組 (1) 亦有同樣的性質。

❶ 此時在公式 (12) 中所有的 $m_k=1$，而 $\lambda_k=i\varphi_k$ (φ_k 爲實數，$k=1,2,\cdots,s$)。

換句話說，略普諾夫變換並不改變（關於穩定性的）零解的特性。故在研究穩定性時可以用這種變換來簡化原方程組。

略普諾夫變換在組（1）與(15)的解之間建立了一個一一對應關係，而且解的線性無關性經變換後亦是不變的。故略普諾夫變換變組（1）的積分矩陣 X 爲組(15)的某一個積分矩陣 Y，此處

$$X=L(t)Y\text{。}\tag{16}$$

寫組(15)的矩陣爲形狀

$$\frac{dY}{dt}=Q(t)Y,\tag{17}$$

其中 $Q(t)=\|q_{ik}(t)\|_1^n$ 爲組(15)的係數矩陣。

在（3）中代 X 以乘積 LY 且將所得出的方程與(17)相比較，容易得出經矩陣 P 與 L 來表出矩陣 Q 的次之公式：

$$Q=L^{-1}PL-L^{-1}\frac{dL}{dt}\text{。}\tag{18}$$

我們稱兩組（1）與(15)或者同樣的（3）與(17)爲相抵的（在略普諾夫的意義下），如果他們可以經略普諾夫變換互相轉化。相抵組的係數矩陣 P 與 Q 常由公式(18)相結合，其中矩陣 L 適合條件 $1^\circ-3^\circ$。

§3. 可化組

在一級線性微分方程組中最簡單的與討論得最多的是常係數方程組。所以我們對於可以利用略普諾夫變換化爲常係數組的這種方程組最表關心。阿.遼.略普諾夫稱這種組爲可化的。

設已予可化組

$$\frac{dX}{dt}=PX\text{。}\tag{19}$$

那末某一個略普諾夫變換

$$X=L(t)Y\tag{20}$$

變其爲組

$$\frac{dY}{dt}=AY, \tag{21}$$

其中 A 為常數矩陣。故組(19)有特殊解

$$X=L(t)e^{At}。 \tag{22}$$

易知，相反的，每一個有特殊解(22)的組(19)，其中 $L(t)$ 為略普諾夫矩陣，而 A 為常數矩陣者，都是可化的，而且可用略普諾夫變換(20)把他化為(21)形。

我們根據阿.蒙.略普諾夫的方法證明每一有週期性係數的組(19)都是可化的❶。

設在所予組(19)中，$P(t)$ 是區間 $(-\infty, +\infty)$ 中連續函數且有週期 τ:

$$P(t+\tau)=P(t)。 \tag{23}$$

在(19)中換 t 為 $t+\tau$ 且應用(23)，我們得出：

$$\frac{dX(t+\tau)}{dt}=P(t)X(t+\tau)。$$

這樣一來，與 $X(t)$ 一樣，$X(t+\tau)$ 亦是組(19)的積分矩陣。故有

$$X(t+\tau)=X(t)V,$$

其中 V 為某一個滿秩常數矩陣。因為 $|V|\neq 0$，故可定出❷

$$V^{\frac{t}{\tau}}=e^{\frac{t}{\tau}\ln V}。$$

這個 t 的矩陣函數，有如 $X(t)$，如果對變數增加 τ，就等於右乘以 V。所以"商"

$$L(t)=X(t)V^{-\frac{t}{\tau}}=X(t)e^{-\frac{t}{\tau}\ln V}$$

是有週期 τ 的週期性連續函數：

$$L(t+\tau)=L(t),$$

❶ 參考[19]，§47。

❷ 此處 $\ln V=f(V)$，其中 $f(\lambda)$ 是在簡單連結區域 G 上函數 $\ln\lambda$ 的某一個單值分支，區域 G 含有矩陣 V 的所有特徵數而不含有數 0。參考第五章。

而且其行列式 $|L(t)|\neq 0$。矩陣 $L(t)$ 適合上節的條件 $1^\circ-3^\circ$，故為一個略普諾夫矩陣。

另一方面，因為組(19)的解 X 可表為形狀

$$X=L(t)e^{\frac{\ln V}{\tau}t},$$

所以組(19)是可化的。

在所予的情形略普諾夫變換

$$X=L(t)Y$$

化有週期 τ 的週期性係數方程組(19)為次之形狀

$$\frac{dY}{dt}=\frac{1}{\tau}\ln V\cdot Y\ 。$$

阿.蒙.略普諾夫[1]對於非線性微分方程組用第一線性近似式來建立穩定性與非穩定性的重要判定。此處所說的非線性微分方程組為：

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k+(**)\quad(i=1,2,\cdots,n),\tag{24}$$

其中位於右節的是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的收斂羃級數，而 $(**)$ 記這些級數中關於 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次以上的諸項之和；線性項的係數 a_{ik} $(i,k=1,2,\cdots,n)$ 都是常數[2]。

略普諾夫判定 組(24)的零解是穩定的(而且是漸近的)，如果第一線性近似式的係數矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 的所有特徵數都有負實數部分，是非穩定的，如果在這些特徵數中至少有一個數有正實數部分。

上述推理使得這個判定對於線性項有週期性係數的方程組：

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{k=1}^{n}p_{ik}(t)x_k+(**)\tag{25}$$

亦能應用。事實上，根據上述推理可以應用略普諾夫變換變(25)為(24)形，其中

[1] 參考[19]，§24。

[2] 非線性項的係數可能與 t 有關。對於這些函數係數要加上已知的限制(參考[19]，§11)。

$$A = \| a_{ik} \|_1^n = \frac{1}{\tau} \ln V,$$

而 V 爲一個常數矩陣。當變數增加 τ 時線性組(19)的積分矩陣變爲其與矩陣 V 的乘積。並不損失其一般性,可以作爲 $\tau > 0$。由於略普諾夫變換的性質,原方程組的零解與變換後方程組的零解同爲穩定的,漸近穩定的或非穩定的。但矩陣 A 與 V 的特徵數 λ_i 與 ν_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ 有等式關係

$$\lambda_i = \frac{1}{\tau} \ln \nu_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)。$$

故應用略普諾夫判定於可化組,我們得出❶:

組(25)的零解是漸近穩定的,如果矩陣 V 的所有特徵數的模都 <1,是非穩定的,如果在這些特徵數中至少有一個數的模 >1。

阿.蒙.略普諾夫對於很廣大的一類方程組用線性近似式建立了他的判定,這類方程組有(24)的形狀,但是他們的線性近似式不一定是常係數方程組,而是屬於所謂略普諾夫正常組的類中❷。

正常線性組的類含有全部化出組爲其一部分。

對於第一線性近似式是正常組這種情形的非穩定性判定是爲恩.格.切大也夫❸所建立的。

§4. 可化組的標準式. 也羅琴定理

設給予可化組(19)與其相抵(在略普諾夫的意義下)組

$$\frac{dY}{dt} = AY,$$

其中 A 是一個常數矩陣。

我們有興趣的問題是:所予組(19)確定矩陣 A 到什麼程度。這個

❶ 參考[19], §55。

❷ 參考[19], §9。

❸ 參考[23], 181 頁。

問題還可以述爲：

在什麼情形之下，兩組方程

$$\frac{dY}{dt}=AY \quad 與 \quad \frac{dz}{dt}=Bz,$$

其中 A 與 B 爲常數矩陣者，是對略普諾夫相抵的，亦卽可經略普諾夫變換互相轉化的？

爲了回答這個問題，我們引進關於有同一實影譜部分的矩陣概念。

我們說，兩個 n 級矩陣 A 與 B 有同一實影譜部分，充分必要的，是矩陣 A 與 B 的初級因子有對應的形狀

$$(\lambda-\lambda_1)^{m_1},\ (\lambda-\lambda_2)^{m_2},\ \cdots,\ (\lambda-\lambda_s)^{m_s}$$

與
$$(\lambda-\mu_1)^{m_1},\ (\lambda-\mu_2)^{m_2},\ \cdots,\ (\lambda-\mu_s)^{m_s},$$

其中
$$\operatorname{Re}\lambda_k=\operatorname{Re}\mu_k \quad (k=1,2,\cdots,s)。$$

我們有次之爲恩、潑、也羅琴所建立的定理❶：

定理 1（也羅琴） 兩組

$$\frac{dY}{dt}=AY \quad 與 \quad \frac{dz}{dt}=Bz \tag{26}$$

（A 與 B 爲 n 級常數矩陣）在略普諾夫的意義下相抵的充分必要條件，是 A 與 B 有同一實影譜部分。

證明 設已予組(26)。化矩陣 A 爲若唐法式❷（參考第六章，§7）

$$A=T\{\lambda_1E_1+H_1,\ \lambda_2E_2+H_2,\ \cdots,\ \lambda_sE_s+H_s\}T^{-1}, \tag{27}$$

其中

$$\lambda_k=\alpha_k+i\beta_k \quad (\alpha_k,\beta_k \text{ 爲實數}; k=1,2,\cdots,s)。 \tag{28}$$

對應於(27)與(28)設：

$$\left.\begin{aligned}A_1&=T\{\alpha_1E_1+H_1,\alpha_2E_2+H_2,\cdots,\alpha_sE_s+H_s\}T^{-1},\\ A_2&=T\{i\beta_1E_1,i\beta_2E_2,\cdots,i\beta_sE_s\}T^{-1}。\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

❶ 參考[11]，9—15 頁。此處所述的證明與恩、潑、也羅琴的證明不同。

❷ E_k 爲么矩陣，在 H_k 中第一上對角線中元素都等於 1，而其餘的元素都等於零；E_k，H_k 的階等於矩陣 A 的第 k 個初級因子的次數，亦卽 m_k $(k=1,2,\cdots,s)$。

那末

$$A=A_1+A_2,\quad A_1A_2=A_2A_1。\tag{30}$$

以等式

$$L(t)=e^{A_2t}$$

界說 $L(t)$。$L(t)$ 是一個略普諾夫矩陣(參考本章，§ 2，例 2)。

但是由於(30)，知(26)中第一組方程的特殊解有形狀

$$e^{At}=e^{A_2t}e^{A_1t}=L(t)e^{A_1t}。$$

故知，(26)中第一組相抵於組

$$\frac{dU}{dt}=A_1U,\tag{31}$$

其中矩陣 A_1，由於(29)，其特徵數都是實數且其影譜與矩陣 A 的實影譜部分相同。

相類似的，我們可以換(26)中第二組爲相抵組

$$\frac{dV}{dt}=B_1V,\tag{32}$$

其中 B_1 的特徵數都是實數且其影譜與矩陣 B 的實影譜部分相同。

我們的定理將被證明，如果我們能夠證明，特徵數全是實數的常數矩陣 A_1 與 B_1 所構成的組(31)與(32)，祇有在矩陣 A_1 與 B_1 相似時始能相抵[1]。

設略普諾夫變換

$$U=L_1V$$

變(31)爲(32)。那末矩陣 L_1 適方程

$$\frac{dL_1}{dt}=A_1L_1-L_1B_1。\tag{33}$$

這個關於 L_1 的矩陣方程與關於矩陣 L_1 的 n^2 個元素的含 n^2 個微分方程的方程組相抵。(33)中右節表示在 n^2 維空間中對"向量" L_1 的線性運算

---

[1] 從這個結果得出定理 1，因爲組(31)與(32)的相抵性表示組(26)的相抵性而矩陣 A_1 與 B_1 的相似表示這些矩陣有相同的初級因子，因而矩陣 A 與 B 有同一的實影譜部分。

$$\frac{dL_1}{dt}=\hat{F}(L_1), \quad [\hat{F}(L_1)=A_1L_1-L_1B_1]。 \tag{33'}$$

線性運算子 $\hat{F}$（與其對應的 n^2 級矩陣）的任一特徵數都可表爲差 $\gamma-\delta$ 的形狀，其中 γ 是矩陣 A_1 的特徵數，而 δ 是矩陣 B_1 的特徵數❶。故知，運算子 $\hat{F}$ 祇有實特徵數。

以 $\hat{\psi}(\lambda)=(\lambda-\hat{\lambda}_1)^{\hat{m}_1}(\lambda-\hat{\lambda}_2)^{\hat{m}_2}\cdots(\lambda-\hat{\lambda}_u)^{\hat{m}_u}$（$\hat{\lambda}_i$ 爲實數；當 $i\neq j$ 時有 $\hat{\lambda}_i\neq\hat{\lambda}_j$；$i,j=1,2,\cdots,u$）記 $\hat{F}$ 的最小多項式。那末由於公式(12)（本章，§1），組(33′)的解 $L_1(t)=e^{\hat{F}t}L^{(0)}$ 可以寫爲：

$$L_1(t)=\sum_{k=1}^{u}\sum_{j=0}^{\hat{m}_k-1}L_{kj}t^je^{\hat{\lambda}_kt}, \tag{34}$$

其中 L_{kj} 爲 n 級常數矩陣。因爲矩陣 $L_1(t)$ 在區間 (t_0,∞) 中是有界的，所以無論是對於 $\hat{\lambda}_k>0$ 或者是在 $\hat{\lambda}_k=0$ 而 $j>0$ 時，對應的矩陣 $L_{kj}=0$。以 $L_-(t)$ 記(34)中所有 $\hat{\lambda}_k<0$ 的諸項之和。那末

$$L_1(t)=L_-(t)+L_0, \tag{35}$$

其中

$$\lim_{t\to+\infty}L_-(t)=0,\ \lim_{t\to+\infty}\frac{dL_-(t)}{dt}=0,\ L_0=\text{常數矩陣}。 \tag{35'}$$

故由(35)與(35′)得

$$\lim_{t\to+\infty}L_1(t)=L_0,$$

因而知 $$|L_0|\neq0,$$

因爲行列式 $|L_1(t)|$ 對模是有下界的。

---

❶ 事實上，設 Λ_0 爲運算子 $\hat{F}$ 的某一特徵數。那末有這樣的矩陣 $L\neq0$ 存在使得

$$\hat{F}(L)=\Lambda_0L \quad \text{或} \quad (A_1-\Lambda_0E)L=LB_1。 \tag{*}$$

矩陣 $A_1-\Lambda_0E$ 與 B_1 至少有一個公共的特徵數，因爲在相反的情形將有這樣的多項式 $g(\lambda)$ 存在，使得

$$g(A_1-\Lambda_0E)=0, \quad g(B_1)=E,$$

而這是不可能的，因爲由（*）得出：$g(A_1-\Lambda_0E)\cdot L=L\cdot g(B_1)$ 而 $L\neq0$。但是如果矩陣 $A_1-\Lambda_0E$ 與 B_1 有公共的特徵數，那末 $\Lambda_0=\gamma-\delta$，其中 γ 與 δ 各爲矩陣 A_1 與 B_1 的特徵數。關於運算子 $\hat{F}$ 的詳細研究可在弗.哥普波契可夫的工作[63]中找到。

在(33)中代 $L_1(t)$ 以和 $L_-(t)+L_0$，我們得出

$$\frac{dL_-(t)}{dt}-A_1L_-(t)+L_-(t)B_1=A_1L_0-L_0B_1,$$

故由(35′)得

$$A_1L_0-L_0B_1=0,$$

因而有

$$B_1=L_0^{-1}A_1L_0\text{。} \tag{36}$$

反之，如果(36)成立，那末略普諾夫變換

$$U=L_0V$$

化組(31)爲(32)。定理已經證明。

從所證明的定理推得，每一個可化組(19)都可以用略普諾夫變換 $X=LY$ 化爲次之形狀

$$\frac{dY}{dt}=JY,$$

其中 J 是特徵數全爲實數的若庻矩陣。如不計 J 中對角線上諸子塊的次序，那末已予矩陣 $P(t)$ 的組的這個標準式是唯一確定的。

§5. 矩陣子

討論微分方程組

$$\frac{dX}{dt}=P(t)X, \tag{37}$$

其中 $P(t)=\|p_{ik}(t)\|_1^n$ 是在某一隔間 (a,b) 中變數 t 的連續矩陣函數[1]。

應用逐步漸近法來定出組(37)的標準化解，亦即當 $t=t_0$ 時變爲么矩陣的解[t_0 是隔間(a,b)中固定的數]。逐步漸近值 X_k $(k=0,1,2,\cdots)$ 將由循環關係

[1] (a,b) 是任何(有限的或無限的)區間。矩陣 $P(t)$ 的所有元素 $p_{ik}(t)$ $(i,k=1,2,\cdots,n)$ 是在隔間 (a,b) 中連續的，實變數 t 的複函數。所有以後的結果仍然有效，如果換所有函數 $p_{ik}(t)$ $(i,k=1,2\cdots,n)$ 的連續性爲有界性與［在隔間 (a,b) 的任何有限多個子隔間中］黎曼可積性。

$$\frac{dX_k}{dt}=P(t)X_{k-1}\quad (k=1,2,\cdots),$$

來求出,此時選擇么矩陣 E 作爲漸近値 X_0。

取 $X_k(t_0)=E\ (k=0,1,2,\cdots)$,我們可以表 X_k 爲次之形狀

$$X_k=E+\int_{t_0}^{t}P(t)X_{k-1}dt\quad (k=1,2,\cdots)。$$

這樣一來,

$$X_0=E,\ X_1=E+\int_{t_0}^{t}P(t)dt,$$

$$X_2=E+\int_{t_0}^{t}P(t)dt+\int_{t_0}^{t}P(t)dt\int_{t_0}^{t}P(t)dt,\cdots,$$

亦卽 $X_k\ (k=0,1,2,\cdots)$ 爲次之矩陣級數前 $k+1$ 項的和:

$$E+\int_{t_0}^{t}P(t)dt+\int_{t_0}^{t}P(t)dt\int_{t_0}^{t}P(t)dt+\cdots \tag{38}$$

爲了證明這個級數在隔間 (a,b) 的任何閉子隔間中絕對且一致收斂,與定出所求的方程(37)的解,我們來構造囿級數。

在隔間 (a,b) 中界說非負函數 $g(t)$ 與 $h(t)$ 各等於❶

$$g(t)=\max[|p_{11}(t)|,\ |p_{12}(t)|,\ \cdots,\ |p_{nn}(t)|],$$

$$h(t)=\left|\int_{t_0}^{t}g(t)dt\right|。$$

容易驗證,函數 $g(t)$,因而 $h(t)$ 在隔間 (a,b) 中連續❷。

分矩陣級數(38)爲 n^2 個純量級數,其中每一個都囿於級數

$$1+h(t)+\frac{nh^2(t)}{2!}+\frac{n^2h^3(t)}{3!}+\cdots \tag{39}$$

事實上,

$$\left|\left\{\int_{t_0}^{t}P(t)dt\right\}_{i,k}\right|=\left|\int_{t_0}^{t}p_{ik}(t)dt\right|\leq\left|\int_{t_0}^{t}g(t)dt\right|=h(t),$$

❶ 由定義,對於 t 的任一値,函數 $g(t)$ 的値等於(對於同一値 t) n^2 個 $p_{ik}(t)\ (i,k=1,2,\cdots,n)$ 的模的値中之最大者。

❷ 在隔間 (a,b) 的任一點 t_1 函數 $g(t)$ 的連續性可以這樣來得出,當 t 足夠接近於 t_1 時,差 $g(t)-g(t_1)$ 常與 n^2 個差 $|p_{ik}(t)|-|p_{ik}(t_1)|$ 中的某一個重合 $(i,k=1,2,\cdots,n)$。

$$\left|\left\{\int_{t_0}^{t} P(t)dt\int_{t_0}^{t} P(t)dt\right\}_{i,k}\right| = \left|\sum_{j=1}^{n}\int_{t_0}^{t} p_{ij}(t)dt\int_{t_0}^{t} p_{jk}(t)dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant n\left|\int_{t_0}^{t} g(t)dt\int_{t_0}^{t} g(t)dt\right| = \frac{nh^2(t)}{2}, \quad \text{諸如此類。}$$

級數(39)在隔間 (a, b) 中收斂，而且在這個隔間的任何閉子隔間中一致收斂。故知矩陣級數(38)在 (a, b) 中收斂而且在 (a, b) 的任何閉子隔間中絕對且一致收斂。

逐項微分證明級數和(38)表示方程(37)的一個解；且當 $t=t_0$ 時這個解就變爲 E。級數(38)是允許逐項微分的，因爲經微分後所得出的級數與級數(38)祇差一個因子 $P(t)$，因而與級數(38)一樣，是在隔間 (a, b) 的任何閉子隔間中一致收斂的。

這樣一來，我們已經證明了關於方程(37)有標準化解存在的定理。這個解將記爲 $\Omega_{t_0}^{t}(P)$ 或簡記爲 $\Omega_{t_0}^{t}$。有如 §1 中所已經證明，任何其他的解都有形狀

$$X=\Omega_{t_0}^{t}C,$$

其中 C 爲任意的常數矩陣。從這個公式，知任何解，特別是標準化解，爲 $t=t_0$ 時的原始值所唯一確定。

方程(37)的標準化解 $\Omega_{t_0}^{t}$ 有時稱爲矩陣子。

我們已經證明矩陣子可表爲次形❶級數

$$\Omega_{t_0}^{t}=E+\int_{t_0}^{t} P(t)dt+\int_{t_0}^{t} P(t)dt\int_{t_0}^{t} P(t)dt+\cdots, \tag{40}$$

他在 $P(t)$ 連續的任何閉隔間中都是絕對且一致收斂的。

我們注意矩陣子的一些公式。

1°　　$\Omega_{t_0}^{t}=\Omega_{t_1}^{t}\Omega_{t_0}^{t_1}\quad (t_0, t_1, t\subset (ab))$。

事實上，因爲 $\Omega_{t_0}^{t}$ 與 $\Omega_{t_1}^{t}$ 是方程(37)的兩組解，所以

$$\Omega_{t_0}^{t}=\Omega_{t_1}^{t}C\quad (C\ \text{爲常數矩陣})。$$

現在取 $t=t_1$，我們得出 $C=\Omega_{t_0}^{t_1}$。

❶ 表爲這種級數的矩陣子表示法爲拉婀諾 [140] 所最先得出。

2° $\Omega_{t_0}^t(P+Q)=\Omega_{t_0}^t(P)\Omega_{t_0}^t(S)$，其中 $S=[\Omega_{t_0}^t(P)]^{-1}Q\Omega_{t_0}^t(P)$。

爲了推出這個公式，我們設

$$X=\Omega_{t_0}^t(P), \quad Y=\Omega_{t_0}^t(P+Q)$$

與

$$Y=XZ \tag{41}$$

逐項微分(41)，我們得出：

$$(P+Q)XZ=PXZ+X\frac{dZ}{dt}。$$

故有：
$$\frac{dZ}{dt}=X^{-1}QXZ。$$

因爲由(41)得出 $Z(t_0)=E$，所以有：

$$Z=\Omega_{t_0}^t(X^{-1}QX)。$$

在(41)中換 X, Y, Z 以其對應的矩陣子，我們得出公式 2°。

3° $$\ln|\Omega_{t_0}^t(P)|=\int_{t_0}^t \mathrm{Sp}\, P\, dt。$$

這個公式可以從耶可比恆等式(4)(本章，§ 1)來得出，如果在他裏面我們換 $X(t)$ 爲 $\Omega_{t_0}^t(P)$。

4° 如果 $A=\|a_{ik}\|_1^n$＝常數矩陣，那末

$$\Omega_{t_0}^t(A)=e^{A(t-t_0)}。$$

引進次之記法。如果 $P=\|p_{ik}\|_1^n$，那末以 mod P 來記矩陣

$$\mathrm{mod}\, P=\|\,|p_{ik}|\,\|_1^n。$$

此外，如果 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 與 $B=\|b_{ik}\|_1^n$ 爲兩個實矩陣且有

$$a_{ik}\leqslant b_{ik} \quad (i, k=1, 2, \cdots, n),$$

那末我們將寫爲：

$$A\leqslant B。$$

此時由表示式(40)得出：

5° 如果 mod $P(t)\leqslant Q(t)$，那末

$$\mathrm{mod}\, \Omega_{t_0}^t(P)\leqslant\Omega_{t_0}^t(Q) \quad (t>t_0)。$$

以後我們以 I 記所有元素都等於 1 的 n 級矩陣：

$$I=\|1\|。$$

討論上面所界說的函數 $g(t)$ [在(38)與(39)之間]。

此時
$$\bmod P(t)\leqslant g(t)I。$$

故由 5° 得：

$$\bmod \Omega_{t_0}^t(P)\leqslant \Omega_{t_0}^t(g(t)I)\quad (t>t_0)。\tag{42}$$

但 $\Omega_{t_0}^t(g(t)I)$ 是方程

$$\frac{dX}{dt}=g(t)IX$$

的標準化解。故由4° ❶

$$\Omega_{t_0}^t(g(t)I)=e^{h(t)I}=\left(1+h(t)+\frac{nh^2(t)}{2!}+\frac{n^2h^3(t)}{3!}+\cdots\right)I,$$

其中
$$h(t)=\int_{t_0}^t g(t)dt。$$

故由(42)得出：

6°　$$\bmod \Omega_{t_0}^t(P)\leqslant\left(\frac{1}{n}e^{nh(t)}+\frac{n-1}{n}\right)I\leqslant e^{nh(t)}I\,(t>t_0),$$

其中
$$h(t)=\int_{t_0}^t g(t)dt,\ g(t)=\max_{1\leqslant i,k\leqslant n}\{|p_{ik}(t)|\}。$$

現在我們來指出，如何利用矩陣來表出線性微分方程組

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{k=1}^n p_{ik}(t)x_k+f_i(t)\quad (i=1,2,\cdots,n)\tag{43}$$

的一般解；在這個方程的右節的 $p_{ik}(t)$ 與 $f_i(t)$ $(i,k=1,2,\cdots,n)$ 都是在變數 t 的隔間中連續的。

引進矩陣的列（"向量"）$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 與 $f=(f_1,f_2,\cdots,f_n)$ 以及矩陣 $P=\|p_{ik}\|_1^n$，可以寫方程組(43)爲：

$$\frac{dx}{dt}=P(t)x+f(t)。\tag{43'}$$

---

❶ 利用換獨立變數 t 爲變數 $h=\int_{t_0}^t g(t)dt$ 的代換。

所要找出的這個方程的解有形狀：

$$x=\Omega_{t_0}^t(P)z, \tag{44}$$

其中 z 爲與 t 有關的未知列。在(43′)中代 x 以這個表示式,我們得出：

$$P\Omega_{t_0}^t(P)z+\Omega_{t_0}^t(P)\frac{dz}{dt}=P\Omega_{t_0}^t(P)z+f(t),$$

故有

$$\frac{dz}{dt}=[\Omega_{t_0}^t(P)]^{-1}f(t)。$$

積分後我們得出：

$$z=\int_{t_0}^t[\Omega_{t_0}^\tau(P)]^{-1}f(\tau)d\tau+c,$$

其中 c 爲任何常數向量。把這個表示式代入(44)中,我們得出：

$$x=\Omega_{t_0}^t(P)\int_{t_0}^t[\Omega_{t_0}^\tau(P)]^{-1}f(\tau)d\tau+\Omega_{t_0}^t(P)c。 \tag{45}$$

給予 t 以値 t_0,我們求得：$x(t_0)=c$。故變公式(45)爲次之形狀：

$$x=\Omega_{t_0}^t(P)x(t_0)+\int_{t_0}^t K(t,\tau)f(\tau)d\tau, \tag{45′}$$

其中

$$K(t,\tau)=\Omega_{t_0}^t(P)[\Omega_{t_0}^\tau(P)]^{-1}$$

稱爲柯許矩陣。

§6. 乘積積分．伏爾泰勒的無窮小計算

討論矩陣子 $\Omega_{t_0}^t(P)$。分基本隔間 (t_0,t) 爲 n 部分,引進中間點 t_1, $t_2,\cdots,t_{n-1}$,且設 $\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$ $(k=1,2,\cdots;\ t_n=t)$。那末由矩陣子的基本性質 1°(參考上節),有：

$$\Omega_{t_0}^t=\Omega_{t_{n-1}}^t\cdots\Omega_{t_1}^{t_2}\Omega_{t_0}^{t_1}。 \tag{46}$$

在隔間 (t_{k-1},t_k) 中取中間點 τ_k $(k=1,2,\cdots,n)$。我們視 Δt_k 爲一級微値。如不計二級微値,則在計算 $\Omega_{t_{k-1}}^{t_k}$ 時可以取 $P(t)\approx$ 常數矩陣 $=P(\tau_k)$。此時

$$\Omega_{t_{k-1}}^{t_k}=e^{P(\tau_k)\Delta t_k}+(**)=E+P(\tau_k)\Delta t_k+(**); \tag{47}$$

此處,我們以(**)記從二級微値開始的諸項的和。

從(46)與(47)分別求得：

$$\Omega_{t_0}^{t}=e^{P(\tau_n)\Delta t_n}\cdots e^{P(\tau_2)\Delta t_2}e^{P(\tau_1)\Delta t_1}+(*) \tag{48}$$

與

$$\Omega_{t_0}^{t}=[E+P(\tau_n)\Delta t_n]\cdots[E+P(\tau_2)\Delta t_2][E+P(\tau_1)\Delta t_1]+(*)。 \tag{49}$$

當分割出來的積分個數無限增大而使這些積分限的長度都趨於零時，我們取極限(微值項(*)在取極限時都不會出現)❶，得出準確的極限公式

$$\Omega_{t_0}^{t}(P)=\lim_{\Delta t_k\to 0}[e^{P(\tau_n)\Delta t_n}\cdots e^{P(\tau_2)\Delta t_2}e^{P(\tau_1)\Delta t_1}] \tag{48'}$$

與

$$\Omega_{t_0}^{t}(P)=\lim_{\Delta t_k\to 0}[E+P(\tau_n)\Delta t_n]\cdots[E+P(\tau_2)\Delta t_2][E+P(\tau_1)\Delta t_1]。 \tag{49'}$$

在這一等式的右節位於極限號下面的表示式，是可積的乘積❷。他的極限稱爲乘積積分且記之以符號

$$\widehat{\int_{t_0}^{t}}[E+P(t)dt]=\lim_{\Delta t_k\to 0}[E+P(\tau_n)\Delta t_n]\cdots[E+P(\tau_1)\Delta t_1]。 \tag{50}$$

公式(49′)表矩陣子爲乘積積分的形狀

$$\Omega_{t_0}^{t}(P)=\widehat{\int_{t_0}^{t}}(E+P\,dt), \tag{51}$$

而等式(48)與(49)可以用來計算矩陣子的近似值。

乘積積分爲伏爾泰勒在 1887 所首先引入。伏爾泰勒根據這個概念構成了對於矩陣函數特殊的無窮小計算(參考[49])❸。

所有乘積積分的特性與積分號內矩陣函數 $P(t)$ 的各個不同值的彼此不可易性有密切關係。同時有很特殊的情形，當所有這些值都彼此可易時

❶ 這種討論使得記爲(*)的項的估計更爲準確。

❷ 類似於平常積分的積分和。

❸ 許來新格爾在研究解析係數線性微分方程組時曾用及乘積積分(德文爲“Produkt-Integral”)，[46 *a*, *b*]與[144]。

從(46′)與(51)可以看出,乘積積分化爲矩陣

$$e^{\int_{t_0}^{t} P(t)\,dt}。$$

現在引進乘積導式

$$D_t X = \frac{dX}{dt} X^{-1}。\tag{52}$$

運算 D_t 與 $\widehat{\int_{t_0}^{t}}$ 是互逆的:

如果 $$D_t X = P,$$

那末 $$X = \widehat{\int_{t_0}^{t}}(E + P\,dt)\cdot C \quad (C = X(t_0))\text{❶},$$

反之亦然。上式還可以寫爲❷

$$\widehat{\int_{t_0}^{t}}(E + P\,dt) = X(t)X(t_0)^{-1}。\tag{53}$$

讓讀者驗證次諸微分與積分公式的真確性❸

微分公式

I. $D_t(XY) = D_t(X) + XD_t(Y)X^{-1}$,

$D_t(XC) = D_t(X)$,

$D_t(CY) = CD_t(Y)C^{-1}$ (C 是一個常數矩陣)。

II. $D_t(X') = X'(D_t X)'X'^{-1}$❹。

III. $D_t(X^{-1}) = -X^{-1}D_t(X)X = -(D_t(X'))'$,

$D_t(X'^{-1}) = -(D_t(X))'$。

$$P(t')P(t'') = P(t'')P(t') \quad (t', t'' \in (t_0, t)),$$

---

❶ 此處,任意的常數矩陣 C 與平常不定積分中所加上的任意常數是相類似的。

❷ 類似於當 $\frac{dX}{dt} = P$ 時的公式 $\int_{t_0}^{t} P\,dt = X(t) - X(t_0)$。

❸ 這些公式可以從乘積導式與乘積積分的定義直接推出(參考[49])。但如視乘積積分爲矩陣子且應用上節所述矩陣子的性質,就可較快與較簡單的得出這些積分公式。

❹ 符號 ′ 表示變爲其轉置矩陣。

積分公式

IV. $\widehat{\int_{t_0}^{t}}(E+P\,dt)=\widehat{\int_{t_1}^{t}}(E+P\,dt)\widehat{\int_{t_0}^{t_1}}(E+P\,dt)$。

V. $\widehat{\int_{t_0}^{t}}(E+P\,dt)=\left[\widehat{\int_{t}^{t_0}}(E+P\,dt)\right]^{-1}$。

VI. $\widehat{\int_{t_0}^{t}}(E+CPC^{-1}dt)=C\widehat{\int_{t_0}^{t}}(D+P\,dt)C^{-1}$

(C 爲常數矩陣)。

VII. $\widehat{\int_{t_0}^{t}}[E+(Q+D_tX)dt]=X(t)\widehat{\int_{t_0}^{t}}(E+X^{-1}QXdt)X(t_0)^{-1}$❶。

還要引進一個重要的公式，對於兩個乘積積分的差給出其模的估計❷：

VIII. $\operatorname{mod}\left[\widehat{\int_{t_0}^{t}}(E+P\,dt)-\widehat{\int_{t_0}^{t}}(E+Q\,dt)\right]\leqslant$

$$\leqslant\frac{1}{n}e^{nq(t-t_0)}\left(e^{nd(t-t_0)}-1\right)I\quad(t>t_0),$$

如果　$\operatorname{mod}Q\leqslant qI,\quad \operatorname{mod}(P-Q)\leqslant d\cdot I,\quad I=\|1\|$

(q,d 爲非負數，n 爲矩陣 P 與 Q 的階)。

以 D 記差 $P-Q$。那末

$$P=Q+D,\quad \operatorname{mod}D\leqslant d\cdot I。$$

視乘積積分爲矩陣子且應用矩陣子的級數分解式(40)，我們得出：

$$\widehat{\int_{t_0}^{t}}[E+(Q+D)dt]-\widehat{\int_{t_0}^{t}}(E+Q\,dt)=$$

$$=\int_{t_0}^{t}D\,dt+\int_{t_0}^{t}D\,dt\int_{t_0}^{t}Q\,dt+\int_{t_0}^{t}Q\,dt\int_{t_0}^{t}D\,dt+\int_{t_0}^{t}D\,dt\int_{t_0}^{t}Ddt+\cdots$$

---

❶ 在某種意義下，可視公式 VII 爲與平常（非乘積的）積分的部分積分公式相類似。公式 VII 可以從 §5, 2° 的公式來得出。

❷ 關於矩陣的模與矩陣間的關係 ≤ 的定義，可參考本章，§5。

從這個分解式看到

$$\operatorname{mod}\left\{\widehat{\int_{t_0}^{t}}[E+(Q+D)dt]-\widehat{\int_{t_0}^{t}}(E+Q\,dt)\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\widehat{\int_{t_0}^{t}}[E+(\operatorname{mod}Q+\operatorname{mod}D)dt]-\widehat{\int_{t_0}^{t}}(E+\operatorname{mod}Q\,dt)\leqslant$$

$$\leqslant\widehat{\int_{t_0}^{t}}[E+(q+d)I\,dt]-\widehat{\int_{t_0}^{t}}[E+qI\,dt]=e^{(q+d)I(t-t_0)}-e^{qI(t-t_0)}=$$

$$=e^{qI(t-t_0)}(e^{d\cdot I(t-t_0)}-E)\leqslant\frac{1}{n}e^{nq(t-t_0)}(e^{nd(t-t_0)}-1)I\ 。$$

現在假設矩陣 P 與 Q 對某一參數 α 有關

$$P=P(t,\alpha),\quad Q=Q(t,\alpha)$$

且設

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}P(t,\alpha)=\lim_{\alpha\to\alpha_0}Q(t,\alpha)=P_0(t),$$

而且在所討論的隔間 (t_0,t) 中對 t 一致的趨於極限。此外，假設當 $\alpha\to\alpha_0$ 時，矩陣 $Q(t,\alpha)$ 對模囿於矩陣 qI，其中 q 是一個正的常數。那末，命

$$d(\alpha)=\max_{\substack{1\leqslant i,k\leqslant n\\ t_0\leqslant\tau\leqslant t}}|p_{ik}(\tau,\alpha)-q_{ik}(\tau,\alpha)|,$$

我們有：

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}d(\alpha)=0\ 。$$

故由公式 VIII 得出：

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\left[\widehat{\int_{t_0}^{t}}(E+P\,dt)-\widehat{\int_{t_0}^{t}}(E+Q\,dt)\right]=0\ 。$$

特別的，如果 Q 與 α 無關 $[Q(t,\alpha)=P_0(t)]$，我們得出：

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\widehat{\int_{t_0}^{t}}[E+P(t,\alpha)dt]=\widehat{\int_{t_0}^{t}}[E+P_0(t)dt],$$

其中

$$P_0(t)=\lim_{\alpha\to\alpha_0}P(t,\alpha)。$$

§7. 複區域上微分方程組．一般的性質

討論微分方程組

$$\frac{dx_i}{dz}=\sum_{k=1}^{n} p_{ik}(z)x_k 。\tag{54}$$

此處假設已知函數 $p_{ik}(z)$ 與未知函數 $x_i(z)$ $(i, k=1, 2, \cdots, n)$ 都是在複 z-平面上某一區域 G 中正則的，複變數 z 的單值解析函數。

引進方陣 $P(z)=\|p_{ik}(z)\|_1^n$ 與列矩陣 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，有如實變數的情形(§1)，我們可以寫組(54)為次之形狀

$$\frac{dx}{dz}=P(z)x 。\tag{54'}$$

以 X 記其積分矩陣，亦即為組(54)的 n 個線性無關解為列所構成的矩陣，我們可以寫(54')為：

$$\frac{dX}{dz}=P(z)X 。\tag{55}$$

耶可比公式對於複變數 z 能夠成立：

$$|X|=ce^{\int_{z_0}^{z}\mathrm{Sp}\,P\,dz} 。\tag{56}$$

此處假設 z_0 與沿 $\int_{z_0}^{z}$ 所取的線上諸點都是單值解析函數 $\mathrm{Sp}\,P(z)=$ $=p_{11}(z)+p_{22}(z)+\cdots+p_{nn}(z)$ 的正則點❶。

所討論的複變數情形包含這樣的特性，對於單值函數 $P(z)$ 其積分矩陣 $X(z)$ 可能是 z 的多值函數。

作為一個例子我們來討論柯許組

$$\frac{dX}{dz}=\frac{U}{z-a}X \quad (U \text{ 是一個常數矩陣})。\tag{57}$$

有如實數的情形(參考本章，§1)，這一組有一個解是積分矩陣

$$X=e^{U\ln(z-a)}=(z-a)^U 。\tag{58}$$

取點 $z=a$ 以外的所有 z-平面上的點作為區域 G。這個區域中所有的點都是係數矩陣

$$P(z)=\frac{U}{z-a}$$

❶ 此處及以後我們取片狀光滑曲線作為積分路線。

的正則點。如果 $U\neq 0$，那末點 $z=a$ 是係數矩陣 $P(z)=\frac{U}{z-a}$ 的異點（一級異點）。

積分矩陣(58)的元素在繞點 $z=a$ 從正方向轉一單週後就轉到新的值，他可以從舊的值在右邊乘上次之常數矩陣來得出

$$V=e^{2\pi iU}。$$

有如實變數的情形，對於一般的組(55)用同樣的推理，可以證明在區域 G 的某一部分上兩個單值解 X 與 $\tilde{X}$ 常有次之關係式

$$X=\tilde{X}C,$$

其中 C 是某一個常數矩陣。這個公式對於區域 G 中函數 $X(z)$ 與 $\tilde{X}(z)$ 的任何解析延拓仍然有效。

關於(在已予原始矩陣時)組(54)的解的存在性與唯一性可以與實變數情形類似的證明。

討論區域 G 中簡單連結的而且對於點 z_0 是星狀的部分區域 $G_1$❶，且設矩陣函數 $P(z)$ 在區域 G_1 中是正則的❷。建立級數

$$E+\int_{z_0}^{z}P\,dz+\int_{z_0}^{z}P\,dz\int_{z_0}^{z}P\,dz+\cdots \tag{59}$$

從區域 G_1 的簡單連結性，知道每一個在級數(59)中出現的積分都與積分路線無關且可表為區域 G_1 中的正則函數。因為區域 G_1 對於點 z_0 是星狀的，所以在計算這些積分的模時，我們可以視為所有的積分路線都是取的連結點 z_0 與 z 的直線線段。

在含有點 z_0 的區域 G_1 的任何閉部分區域中，級數(59)的絕對收斂性與一致收斂性，可以從關級數

$$1+lM+\frac{n}{2!}l^2M^2+\frac{n^2}{3!}l^3M^3+\cdots$$

的收斂性來得出。此處 M 是矩陣 $P(z)$ 的模的上界，而 l 是點 z 到點

❶ 稱這一個區域為對於點 z_0 是星狀的，如果連結點 z_0 與區域中任何一點 z 的線段都完全在所予區域裏面。

❷ 是即矩陣 $P(z)$ 的所有元素 $P_{ik}(z)$ $(i, k=1, 2, \cdots, n)$ 都是所予區域中正則函數。

z_0 的距離的上界，而且這兩個界限都是對於所討論的 G_1 的部分閉區域而言的。

用逐項微分的方法證明，級數(59)的和是方程(55)的解。這個解是標準化的，因爲他在 $z=z_0$ 時變爲么矩陣 E。有如實變數的情形，我們稱組(55)的單值標準化解爲矩陣子且記之以 $\Omega_{z_0}^{z}(P)$。這樣一來，我們得出了在區域 G_1 中矩陣子的級數表示[1]

$$\Omega_{z_0}^{z}(P)=E+\int_{z_0}^{z}P\,dz+\int_{z_0}^{z}P\,dz\int_{z_0}^{z}P\,dz+\cdots \tag{60}$$

在 §5 中建立的矩陣子的性質 1°—4° 都可以自動的轉移到複變數的情形中來。

方程(55)的，任何一個在區域 G 是正則的而且當 $z=z_0$ 時變爲矩陣 X_0 的解，都可以表爲形狀

$$X=\Omega_{z_0}^{z}(P)\cdot C\quad (C=X_0)。 \tag{61}$$

公式(61)包含了所有在點 z_0 的鄰近是正則的單值解 [z_0 是係數矩陣 $P(z)$ 的正則點]。這些解，能在區域 G 中解析延拓的，將給出方程(55)的全部解，亦即方程(55)不能有對於點 z_0 是一個異點的解。

對於在區域 G 中矩陣子的解析延拓較方便的是應用乘積積分。

§8. 複區域上乘積積分

在複平面中沿某一曲線的乘積積分可確定如次：

設給予某一路線 L 與在這一曲線 L 上連續的矩陣函數 $P(z)$。分路線 L 爲 n 部分 (z_0,z_1), (z_1,z_2), $\cdots$, (z_{n-1},z_n)；此處 z_0 是路線的始點，$z_n=z$ 是其終點，而 $z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}$ 都是割分中間點。在路線的線段 $z_{k-1}z_k$ 上取任一點 ζ_k 且引進記號 $\Delta z_k=z_k-z_{k-1}$; $k=1,2,\cdots,n$。那末有定義

[1] 所述的關於標準化解存在的證明與在區域 G_1 中表之爲級數(60)的證明仍然有效，如果代替區域的星狀性以次之更普通的條件：對於區域 G_1 的任何部分閉區域，都有這樣的正數 l 存在，使得這個部分閉區域中任何一點 z 與 z_0 的聯線的長都 $\leqslant l$。

$$\widehat{\int}_L [E+P(z)dz] = \lim_{\Delta z_k \to 0} [E+P(\zeta_n)\Delta z_n]\cdots[E+P(\zeta_1)\Delta z_1]。$$

比較這個定義與本章§6的定義，我們看到，在特殊情形，當路線 L 是實軸的一個線段時，新定義與從前的定義是一致的。但是在一般的情形，當路線 L 是複平面上任一曲線時，亦可利用積分變數的代換來化新定義爲舊定義。

如果 $$z=z(t)$$

是路線的參數方程，而且 $z(t)$ 是區間 (t_0, t) 中連續函數，且在這一區間中導式 $\frac{dz}{dt}$ 是片狀連續的，那末易知

$$\widehat{\int}_L [E+P(z)dz] = \widehat{\int}_{t_0}^{t} \left\{ E+P[z(t)]\frac{dz}{dt}\,dt \right\}。$$

這個公式證明了沿任何路線的乘積積分是存在的，如果被積矩陣 $P(z)$ 沿這一路線是連續的❶。

用從前的公式 $$D_z X = \frac{dX}{dz}X^{-1}$$

來界說乘積導式。此時假設 $X(z)$ 是一個解析函數。

所有上節的導式公式(I—III)都可以毫無改變的轉移到複變數的情形。至於積分公式(IV—VI)，那末在他們寫法的外表上有些改變：

IV′. $\widehat{\int}_{(L'+L'')}(E+P\,dz) = \widehat{\int}_{L''}(E+P\,dz)\widehat{\int}_{L'}(E+P\,dz)$。

V′. $\widehat{\int}_{-L}(E+P\,dz) = \left[\widehat{\int}_{L}(E+P\,dz)\right]^{-1}$。

VI′. $\widehat{\int}_L (E+CPC^{-1}dz) = C\widehat{\int}_L (E+P\,dz)C^{-1}$

(C 是一個常數矩陣)。

---

❶ 參考本章§6的第三個足註。卽使 $P(z)$ 是沿 L 的連續函數，函數 $P[z(t)]\frac{dz}{dt}$ 可能是片狀連續的。在這一情形，我們可以分區間 (t_0, t) 爲部分區間，使得在他們的每一個中導式 $\frac{dz}{dt}$ 都是連續的，且了解由 t_0 到 t 的積分爲沿這些部分區間的諸積分的和。

在公式 IV′ 中，我們以 $L'+L''$ 表示先經過路線 L' 而後繼以路線 L'' 所得出的複合路線。在公式 V′ 中，$-L$ 表示與路線 L 祇有方向不同的路線。

公式 VII 現在取次之形狀

$$\text{VII}'.\quad \widehat{\int_L}[E+(Q+D_zX)dz]=X(z)\widehat{\int_L}(E+X^{-1}QXdz)X(z_0)^{-1}。$$

此處在右節的 $X(z_0)$ 與 $X(z)$ 各記 $X(z)$ 在路線 L 的始點與終點的值。

公式 VIII 現在換爲公式

$$\text{VIII}'.\quad \text{mod}\left[\widehat{\int_L}(E+Pdz)-\widehat{\int_L}(E+Qdz)\right]\leqslant\frac{1}{n}e^{nql}(e^{nd\cdot l}-1)I,$$

其中 $\text{mod}\,Q\leqslant qI$, $\text{mod}\,(P-Q)\leqslant d\cdot I$, $I=\|1\|$，而 l 爲路線L的長度。

公式 VIII′ 可以立刻從公式 VIII 來得出，如果在後一積分中選取路線 L 的弧長 s 作爲新的積分變數來做變數的變換$\left(此處\left|\frac{dz}{ds}\right|=1\right)$。

有如實變數的情形，乘積積分與矩陣子之間有密切的關係存在。

設已知單值解析矩陣函數 $P(z)$ 在區域 G 中是正則的，且設 G_0 是含有點 z_0 的簡單連結的區域而且是區域 G 的一部分。那末矩陣子 $\Omega_{z_0}^z(P)$ 是區域 G_0 中 z 的正則函數。

以任何完全在 G_0 中的路線 L 來連結點 z_0 與 z，且在 L 上選取中間點 $z_1, z_2, \cdots, z_{n-1}$。那末應用等式

$$\Omega_{z_0}^z=\Omega_{z_{n-1}}^z\cdots\Omega_{z_1}^{z_2}\Omega_{z_0}^{z_1},$$

完全與 § 6 一樣，取極限後我們得出：

$$\Omega_{z_0}^z(P)=\widehat{\int_L}(E+Pdz)=\widehat{\int_{z_0}^z}(E+Pdz)。\tag{62}$$

從這個公式看出乘積積分祇與路線的始點與終點有關而與路線的形狀無關，如果全部積分路線都在簡單連結的區域 G_0 裏面，而且在 G_0 中被積函數 $P(z)$ 是正則的。特別的，對於在簡單連結的區域 G_0 中的

閉界線 L，我們有：

$$\oint (E+P\,dz)=E。\tag{63}$$

這個公式與已知的柯許定理很相像，根據柯許定理沿閉界線的平常的(非乘積的)積分等於零，如果這個界線位於簡單連結的區域裏面而在這個區域裏面被積函數是正則的。

表矩陣子爲乘積積分(62)的表示式可以做爲他在區域 G 中沿任何路線 L 的解析延拓之用。在這一情形，公式

$$X=\int_{z_0}^{z}(E+P\,dz)X\ 。\tag{64}$$

給出微分方程 $\frac{dX}{dz}=PX$ 的多值積分矩陣 X 的所有分支，在這些分支的某一個中當 $z=z_0$ 時 X 就變爲 X_0。從連結點 z_0 與 z 的不同路線可以得出所有的不同分支。

根據耶可比公式(56)，有

$$|X|=|X_0|e^{\int_{z_0}^{z}\mathrm{Sp}\,P\,dz},$$

特別的，當 $X_0=E$ 時，有

$$\left|\int_{z_0}^{z}(E+P\,dz)\right|=e^{\int_{z_0}^{z}\mathrm{Sp}\,P\,dz}\ 。\tag{65}$$

從這個公式，知道乘積積分常能表爲一個滿秩矩陣，祇要積分路線完全在這樣的一個區域裏面，在這一區域中函數 $P(z)$ 是正則的。

如果 L 是 G 中任何閉路線而 G 是一個非簡單連結的區域，那末等式(63)不可能成立。再者，在這一情形積分值

$$\oint (E+P\,dz)$$

不能僅爲已予被積函數與閉積分路線 L 所確定，且還與曲線 L 上所選取的積分始點 z_0 有關。事實上，在閉曲線 L 上選取兩點 z_0 與 z_1 且記從 z_0 到 z_1 與從 z_1 到 z_0 的路線(在有向積分中)以 L_1 與 L_2。那末根據

公式 IV′❶

$$\widehat{\oint_{z_2}}=\widehat{\int_{L_2}}\cdot\widehat{\int_{L_1}},\quad \widehat{\oint_{z_1}}=\widehat{\int_{L_1}}\cdot\widehat{\int_{L_2}}$$

因而，

$$\widehat{\oint_{z_1}}=\widehat{\int_{L_1}}\cdot\widehat{\oint_{z_0}}\cdot\widehat{\int_{L_1}}^{-1}。\tag{66}$$

公式(66)說明，如不計相似變換，那末符號 $\widehat{\oint}(E+P\,dz)$ 爲某一矩陣所確定，亦卽祇爲某一矩陣的初級因子所確定。

討論在點 z_0 鄰近的(64)形解 $X(z)$ 的元素。設 L 爲始點與終點都是點 z_0 的 G 中閉路線。沿 L 解析延拓後，$X(z)$ 的元素變爲 $\widetilde{X}(z)$ 的元素。此時 $\widetilde{X}(z)$ 的新元素將適合同一微分方程(55)，因爲 $P(z)$ 是 G 中單值函數。故有

$$\widetilde{X}=XV,$$

其中 V 爲某一滿秩常數矩陣。從公式(64)知有：

$$\widetilde{X}(z_0)=\widehat{\oint_{z_0}}(E+P\,dz)X_0。$$

比較這個等式與前面的等式，我們得出：

$$V=X_0^{-1}\widehat{\oint_{z_0}}(E+P\,dz)X_0。\tag{67}$$

特別的，對於矩陣 $X=\Omega_{z_0}^{z}$ 有 $X_0=E$，故有：

$$V=\widehat{\oint_{z_0}}(E+P\,dz)。\tag{68}$$

§9. 孤立異點

我們來研究，在孤立異點 a 鄰近，解(積分矩陣)的性狀。

設矩陣函數 $P(z)$ 對於適合不等式

$$0<|z-a|<R$$

的值 z 是正則的。

❶ 此處我們在所有的積分中都用一種不寫出被積表示式 $E+P\,dz$ 的縮寫。

這些值的全部構成一個雙重連結的區域 G。在區域 G 中矩陣函數 $P(z)$ 可展爲勞倫級數

$$P(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}P_n(z-a)^n。\tag{69}$$

積分矩陣 $X(z)$ 的元素沿路線 L 繞 a 點從正方向旋轉一週後，變爲矩陣

$$X^+(z)=X(z)V$$

的元素，其中 V 是某一個滿秩常數矩陣。

設 U 是一個常數矩陣，與矩陣 V 有次之等式關係

$$V=e^{2\pi iU}。\tag{70}$$

那末矩陣函數 $(z-a)^U$ 沿 L 轉一週後亦變爲 $(z-a)^UV$。故在區域 G 中解析矩陣函數

$$F(z)=X(z)(z-a)^{-U}\tag{71}$$

沿 L 解析延拓時變爲他自己（保持不變）❶。故矩陣函數 $F(z)$ 在 G 中是正則的且在 G 中可展爲勞倫級數

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F_n(z-a)^n。\tag{72}$$

由(71)得出：

$$X(z)=F(z)(z-a)^U。\tag{73}$$

這樣一來，每一個積分矩陣 $X(z)$ 都可以表爲(73)的形狀，其中單值函數 $F(z)$ 與常數矩陣 U 都與係數矩陣 $P(z)$ 有關。但是從級數(69)的係數 P_n 來定出矩陣 U 與級數(72)的係數 F_n 在一般的情形是很複雜的問題。

這個問題的特殊情形，當

$$P(z)=\sum_{n=-1}^{\infty}P_n(z-a)^n$$

時，將在 § 10 中予以全部解決。在這一情形，稱點 a 爲組(55)的正則

❶ 故知函數 $F(z)$ 在 G 中沿任何閉曲線旋轉一週後仍然回到原來的值。

異點。

如果分解式(69)有形狀

$$P(z)=\sum_{n=-q}^{\infty}P_n(z-a)^n \quad (q>1;\ P_{-q}\neq 0),$$

那末稱點 a 爲極形不規則異點　最後，如果在級數(69)中對於 $z-a$ 的負乘冪的矩陣係數 P_n 有無窮多個不等於零，那末稱點 a 爲所予微分方程組的主要異點。

從公式(73)知道(沿某一個閉曲線 L) 積分矩陣 $X(z)$ 從正方向繞任何一轉時等於右乘以同一矩陣

$$V=e^{2\pi i U}。$$

如果這一轉的始點(與終點)是點 z_0, 那末由(67)得出：

$$V=X(z_0)^{-1}\widehat{\oint_{z_0}}(E+P\,dz)X(z_0)。\tag{74}$$

如果代替積分矩陣 $X(z)$ 我們討論任何其他積分矩陣 $\hat{X}(z)=X(z)C$ (C 爲常數矩陣，$|C|\neq 0$)，那末，從(74)看到矩陣 V 須換爲其相似矩陣

$$\hat{V}=C^{-1}VC。$$

這樣一來，已知組的"積分代換" V 構成一個相似矩陣類。

從公式(74)知道積分

$$\widehat{\oint_{z_0}}(E+P\,dz)\tag{75}$$

爲旋轉的始點 z_0 所確定而與沿其旋轉的曲線的形狀無關❶。如果我們變動點 z_0，那末此時所得出的積分(75)的各個值都是彼此相似的❷。

積分(75)的這些性質是可以直接來證明的。事實上，設 L 與 L' 爲各從始點 z_0 與 z_0' 出發繞點 a 旋轉的兩個 G 中閉路線(參考圖 6)。

可以把 L 與 L' 間所包含的雙重連結的區域變爲簡單連結的，如果從 z_0 到 z_0' 引進一段截線。我們以

❶ 自然，假定積分路線是繞點 a 從正方向旋轉一週的。

❷ 這一點可以從公式(74)，亦可以從公式(66)來推出。

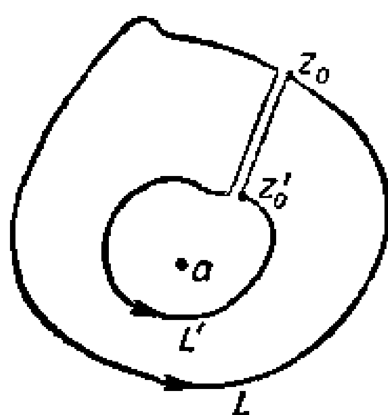


圖 6

$$T=\int_{z_0}^{z_0'}(E+P\,dz)$$

表示沿截線的積分。

因爲沿簡單連結的區域中閉界線的乘積積分等於 E，所以

$$\int_{L'} T\int_{L}^{-1} T^{-1}=E,$$

故有

$$\int_{L'}=T\int_{L} T^{-1}。$$

這樣一來，同 V 一樣，如不計相似關係，積分 $\oint(E+P\,dz)$ 是確定的，所以有時我們寫等式(74)爲：

$$V=\oint(E+P\,dz),$$

了解其意義爲位於等式左右兩節的矩陣有相同的初級因子。

作爲例子來討論有正則異點的方程組

$$\frac{dX}{dz}=P(z)X,$$

其中

$$P(z)=\frac{P_{-1}}{z-a}+\sum_{n=0}^{+\infty}P_n(z-a)^n$$

設

$$Q(z)=\frac{P_{-1}}{z-a}。$$

應用上節的公式 VIII′，我們給出次之差的模的估計

$$D=\oint(E+P\,dz)-\oint(E+Q\,dz), \tag{76}$$

此時取繞正方向的半經爲 r $(r<R)$ 的圓周作爲積分路線。那末當

$$\operatorname{mod} P_{-1}\leqslant p_{-1}I,\quad \operatorname*{mod}_{|z-a|=r}\sum_{n=0}^{\infty}P_n(z-a)^n\leqslant d(r)I,\quad I=\|1\|$$

時，我們可以在公式 VIII′ 中命：

$$q=\frac{p_{-1}}{r},\quad d=d(r),\quad l=2\pi r,$$

此後我們得出：

$$\operatorname{mod} D \leqslant \frac{1}{n} e^{2\pi\rho_{-1}}(e^{2\pi n r d(r)}-1)I\text{。}$$

故知❶

$$\lim_{r\to 0} D=0\text{。} \tag{77}$$

另一方面，組

$$\frac{dY}{dz}=QY$$

是一個柯許組，而在這一情形在界線上任意選取始點 z_0 與對於任何 $r<R$，都有

$$\widehat{\oint_{z_0}}(E+Q\,dz)=e^{2\pi i P_{-1}}\text{。}$$

故由(76)與(77)得出：

$$\lim_{r\to 0}\widehat{\oint_{z_0}}(E+P\,dz)=e^{2\pi i P_{-1}}\text{。} \tag{78}$$

此時積分 $\widehat{\oint_{z_0}}(E+P\,dz)$ 的初級因子與 z_0 及 r 無關，而與積分代換 V 的初級因子相同。

由此伏爾泰勒在其著名的論文(參考[149])與其書[49](117—120頁)中曾經推得，矩陣 V 與 $e^{2\pi i P_{-1}}$ 是相似的，因而如不計相似關係時，積分代換 V 為"剩餘"矩陣 P_{-1} 所確定。

伏爾泰勒的這個論斷是錯誤的。

從(74)與(78)祇能推得，積分代換 V 的特徵數與矩陣 $e^{\pi i P_{-1}}$ 的特徵數相同。但是這些矩陣的初級因子可能是不同的。例如，矩陣

$$\begin{Vmatrix}\alpha & r\\ 0 & \alpha\end{Vmatrix}$$

對於任何 $r\neq 0$ 都祇有一個初級因子 $(\lambda-\alpha)^2$，而當 $r\to 0$ 時這個矩陣

❶ 此處我們用及次之結果，在適當選取 $d(r)$ 時有

$$\lim_{r\to 0} d(r)=d_0,$$

其中 d_0 為矩陣 P_0 中元素的模的最大值。

的極限，亦即 $\left\|\begin{matrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{matrix}\right\|$，就有兩個初級因子 $\lambda-\alpha, \lambda-\alpha$。

這樣一來，伏爾泰勒的論斷不能從公式(74)與(78)來推出。有如次例之所示，在一般的情形他是不真確的。

設
$$P(z)=\left\|\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{matrix}\right\|\frac{1}{z}+\left\|\begin{matrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{matrix}\right\|。$$

對應的微分方程組有次之形狀：
$$\frac{dx_1}{dz}=x_2, \quad \frac{dx_2}{dz}=-\frac{x_2}{z}。$$

對於這一組取積分，我們得出：
$$x_1=c\ln z+d, \quad x_2=\frac{c}{z}。$$

積分矩陣
$$X(z)=\left\|\begin{matrix}\ln z & 1\\ z^{-1} & 0\end{matrix}\right\|$$

繞異點 $z=0$ 從正方向旋轉一週後等於右乘以矩陣
$$V=\left\|\begin{matrix}1 & 0\\ 2\pi i & 1\end{matrix}\right\|。$$

這個矩陣有一個初級因子 $(\lambda-1)^2$。但是矩陣
$$e^{2\pi iP_{-1}}=e^{2\pi i\left\|\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right\|}=\left\|\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right\|=E$$

有兩個初級因子 $\lambda-1, \lambda-1$。

現在來討論矩陣 $P(z)$ 祇有有限個 $z-a$ 的負乘冪的情形（a 是一個正則異點或是一個極形不規則異點）：
$$P(z)=\frac{P_{-q}}{(z-a)^q}+\cdots+\frac{P_{-1}}{z-a}+\sum_{n=0}^{\infty}P_n(z-a)^n \quad (q\geqslant 1;\ P_{-q}\neq 0)。$$

我們用變換
$$X=A(z)Y \tag{79}$$

來變換所予組

$$\frac{dX}{dz}=PX, \tag{80}$$

其中 $A(z)$ 是一個在點 $z=a$ 上正則的矩陣函數且在點 $z=a$ 的值為 E:

$$A(z)=E+A_1(z-a)+A_2(z-a)^2+\cdots;$$

在其右節的冪級數當 $|z-a|<r_1$ 時是收斂的。

著名的美國數學家其.別爾克霍夫在 1913 年刊布了一個定理(參考[119]),根據這個定理我們常可選取變換(79)使得經變換後的方程組

$$\frac{dY}{dz}=P^*(z)Y \tag{80'}$$

的係數矩陣祇含有 $z-a$ 的負乘冪:

$$P^*(z)=\frac{P^*_{-q}}{(z-a)^q}+\cdots+\frac{P^*_{-1}}{z-a}。$$

在安.爾.阿因斯的書"常微分方程"[1]中曾述及別爾克霍夫的定理及其全部證明。同時根據"標準"組(80')的討論得出在異點鄰近對於任意方程組諸解的性狀的研究。

在別爾克霍夫的證明中含有錯誤,而定理本身是不真確的。作為反證的例子,我們就取上述用來反證伏爾泰勒論斷的例子[2]。

在這個例子中 $q=1$, $a=0$ 而

$$P_{-1}=\begin{Vmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{Vmatrix},\ P_0=\begin{Vmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{Vmatrix},\ P_n=0\ (n=1,2,\cdots)。$$

應用別爾克霍夫定理在(80)中代 X 以乘積 AY,再換 $\frac{dY}{dz}$ 為 $\frac{P^*_{-1}}{z}Y$ 且約去 Y,我們得出:

$$A\frac{P^*_{-1}}{z}+\frac{dA}{dz}=PA。$$

---

[1] 參考[1],632—641 頁。別爾克霍夫與阿因斯述及關於異點 $z=\infty$ 的定理。這個並沒有加上某些條件,因為對於任何異點 $z=a$ 經變換 $z'=\frac{1}{z-a}$ 後都可以變為 $z'=\infty$。

[2] 當 $q=1$ 時別爾克霍夫論斷的主要錯誤與伏爾泰勒的錯誤是相同的。

使 $\frac{1}{z}$ 的係數相等，常數項的係數相等，我們得出：

$$P^*_{-1}=P_{-1}, \quad A_1P_{-1}-P_{-1}A_1+A_1=P_0。$$

命 $A_1=\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$，我們得出

$$\begin{Vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{Vmatrix}-\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ -c & -d \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}。$$

這是一個矛盾的等式。

在次節中我們要說明，對於正則異點的情形利用變換(79)可以把組(80)變為怎樣的標準形狀。

§10. 正則異點

研究在異點鄰近解的性狀，並不損及其普遍性我們在討論時可以取異點為點 $z=0$❶。

1. 設給予組

$$\frac{dX}{dz}=P(z)X, \tag{81}$$

其中

$$P(z)=\frac{P_{-1}}{z}+\sum_{m=0}^{\infty}P_mz^m, \tag{82}$$

而且級數 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}P_mz^m$ 在圓 $|z|<r$ 內是收斂的。

命

$$X=A(z)Y, \tag{83}$$

其中

$$A(z)=E+A_1z+A_2z^2+\cdots \tag{84}$$

暫時不管級數(84)的收斂問題，設法定出這個級數的係數矩陣 A_m 使得變換後的組

---

❶ 變換 $z'=z-a$ 或 $z'=\frac{1}{z}$ 可以對應的變任一有限點 $z=a$ 或 $z=\infty$ 為點 $z'=0$。

$$\frac{dY}{dz}=P^*(z)Y, \tag{85}$$

其中

$$P^*(z)=\frac{P^*_{-1}}{z}+\sum_{m=0}^{\infty}P^*_m z^m, \tag{86}$$

有可能的最簡單的("標準")形狀[1]。

在(81)中代 X 以乘積 AY 且應用(85),我們得出:

$$A(z)P^*(z)Y+\frac{dA}{dz}Y=P(z)A(z)Y\text{。}$$

右乘這個等式的兩節以 Y^{-1},我們求得:

$$P(z)A(z)-A(z)P^*(z)=\frac{dA}{dz}\text{。}$$

此處換 $P(z)$, $A(z)$, $P^*(z)$ 以其級數(82),(84),(86)且在等式的左右兩節中使 z 的相同次數項的係數相等,我們得出有無窮多個矩陣方程的未知係數 $A_1, A_2, \cdots$ 的方程組[2]:

$$\left.\begin{array}{ll}
(1) & P_{-1}=P^*_{-1},\\
(2) & P_{-1}A_1-A_1(P_{-1}+E)+P_0=P^*_0,\\
(3) & P_{-1}A_2-A_2(P_{-1}+2E)+P_0A_1-A_1P^*_0+P_1=P^*_1,\\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(m+2) & P_{-1}A_{m+1}-A_{m+1}[P_{-1}+(m+1)E]+\\
 & +P_0A_m-A_mP^*_0+P_1A_{m-1}-A_{m-1}P^*_1+\cdots+\\
 & +P_m=P^*_m\text{。}
\end{array}\right\} \tag{87}$$

2. 討論一些各別的情形:

1° 矩陣 P_{-1} 沒有彼此相差一個整數的不同的特徵數。

在這一情形對於任何 $k=1,2,3,\cdots$,矩陣 P_{-1} 與 $P_{-1}+kE$ 沒有公

---

[1] 我們的目的是想使得在級數(86)中祇有有限個(而且是個數儘可能小的)係數 P^*_m 不等於零。

[2] 在所有方程中,從第二個開始,我們可用第一個方程的關係把 P^*_{-1} 都換爲 P_{-1}。

共的特徵數，因而(參考第八章，§3)❶矩陣方程

$$P_{-1}U-U(P_{-1}+kE)=T$$

對於任何右節的 T 都有一個且祇有一個解。

我們以 $\Phi_k(P_{-1},T)$

來記這個解。故在方程(87)中可以設所有矩陣 $P_m^*(m=0,1,2,\cdots)$ 都等於零且利用等式

$$A_1=\Phi_1(P_{-1},-P_0),\ A_2=\Phi_2(P_{-1},-P_1-P_0A_1),\ \cdots$$

來順次定出 $A_1, A_2, \cdots$。

那末變換後的方程組是柯許組

$$\frac{dY}{dz}=\frac{P_{-1}}{z}Y,$$

因而原方程組(81)的解 X 有次之形狀❷

$$X=A(z)z^{P_{-1}}。\tag{88}$$

2° 在矩陣 P_{-1} 的特徵數中，有些數的差等於整數；而且矩陣 P_{-1} 是單構的。

以 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 記矩陣 P_{-1} 的特徵數，排列其次序使他們適合不等式

$$\operatorname{Re}\lambda_1\geqslant\operatorname{Re}\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\operatorname{Re}\lambda_n。\tag{89}$$

並不損失討論的一般性，我們可以換矩陣 P_{-1} 爲其任何相似矩陣。

---

❶ 而且可以不依靠第八章來證明。我們所關心的情形相當於次之論斷，就是矩陣方程

$$P_{-1}U=U(P_{-1}+kE)\tag{*}$$

祇有零解 $U=0$。因爲矩陣 P_{-1} 與 $P_{-1}+kE$ 沒有公共的特徵數，故有這樣的多項式 $f(\lambda)$ 存在，使得

$$f(P_{-1})=0,\quad f(P_{-1}+kE)=E。$$

但從(*)得出：

$$f(P_{-1})U=Uf(P_{-1}+kE)。$$

故知 $U=0$。

❷ 公式(88)定出組(81)的一個積分矩陣。任何積分矩陣都可以從(88)右乘以任意的滿秩常數矩陣 C 來得出。

這可以這樣來得出，左乘方程(84)的兩邊以 T 而右乘以 T^{-1}，我們實際上就換所有的 P_m 為 TP_mT^{-1} $(m=-1,0,1,2,\cdots)$（此時換 X 為 TXT^{-1}）。因此在所討論的情形我們可以視 P_{-1} 為一個對角形矩陣：

$$P_{-1}=\|\lambda_i\delta_{ik}\|_1^n。\tag{90}$$

引進矩陣 P_m, P_m^* 與 A_m 的元素的記法：

$$P_m=\|p_{ik}^{(m)}\|_1^n,\quad P_m^*=\|p_{ik}^{(m*)}\|_1^n,\quad A_m=\|x_{ik}^{(m)}\|_1^n。\tag{91}$$

為了定出 A_1，我們利用方程(87)的第二個方程。可以把這個矩陣方程換為純量方程

$$(\lambda_i-\lambda_k-1)x_{ik}^{(1)}+p_{ik}^{(0)}=p_{ik}^{(0*)}\quad(i,k=1,2,\cdots,n)。\tag{92}$$

如果在差 $\lambda_i-\lambda_k$ 中沒有一個能等於 1，那末我們可以設 $P_0^*=0$。此時從(87₂)❶，得出 $A_1=\Phi_1(P_{-1},-P_0)$。

在這一情形，矩陣 A_1 的元素為方程(92)所唯一確定：

$$x_{ik}^{(1)}=-\frac{p_{ik}^{(0)}\lambda_i}{\lambda_i-\lambda_k-1}\quad(i,k=1,2,\cdots,n)。\tag{93}$$

如果對於某些 i,k❷有

$$\lambda_i-\lambda_k=1,$$

那末從(92)定出對應的 $p_{ik}^{(0*)}$：

$$p_{ik}^{(0*)}=p_{ik}^{(0)},$$

而對應的 $x_{ik}^{(1)}$ 完全可以任意選取。

同時對於某些 i,k 在 $\lambda_i-\lambda_k\neq1$ 時，我們設：

$$p_{ik}^{(0*)}=0,$$

而其對應的 $x_{ik}^{(1)}$ 可從(93)式來求出。

定出 A_1 後，我們從(87)的第三個方程來定出 A_2。換這個矩陣方程為 n^2 個純量方程：

$$(\lambda_i-\lambda_k-2)x_{ik}^{(2)}=p_{ik}^{(1*)}-p_{ik}^{(1)}-(P_0A_1-A_1P_0^*)_{ik}\tag{94}$$

---

❶ 我們應用情形 1° 中所引進來的記法。

❷ 由於(89)，這祇在 $i<k$ 時才有可能。

$$(i,k=1,2,\cdots,n)。$$

此處我們與對於 A_1 的求出一樣的來處理。

如果 $\lambda_i-\lambda_k\neq 2$，那末我們設：

$$p_{ik}^{(1^*)}=0,$$

因而由(94)求得：

$$x_{ik}^{(2)}=-\frac{1}{\lambda_i-\lambda_k-2}[p_{ik}^{(1)}-(P_0A_1-A_1P_0^*)_{ik}]。$$

如果有 $\lambda_i-\lambda_k=2$，那末對於這些 i 與 k，由(94)得出：

$$p_{ik}^{(1^*)}=p_{ik}^{(1)}+(P_0A_1-A_1P_0^*)_{ik}。$$

在這一情形 $x_{ik}^{(2)}$ 可以任意選取。

繼續如此進行，我們順次定出所有的矩陣 $P_{-1}^*, P_0^*, P_1^*, \cdots$ 與 A_1, A_2, $\cdots$。

此時祗有有限個矩陣 P_m^* 不等於零，且不難看出，矩陣 $P^*(z)$ 有次之形狀[1]

$$P^*(z)=\left\|\begin{matrix}\frac{\lambda_1}{z} & a_{12}z^{\lambda_1-\lambda_2-1} & \cdots a_{1n}z^{\lambda_1-\lambda_n-1}\\ 0 & \frac{\lambda_2}{z} & \cdots a_{2n}z^{\lambda_2-\lambda_n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots\frac{\lambda_n}{z}\end{matrix}\right\|, \tag{95}$$

其中 $a_{ik}=0$，如果 $\lambda_i-\lambda_k$ 不是一個正整數，而 $a_{ik}=p_{ik}^{(\lambda_i-\lambda_k-1^*)}$，如果 $\lambda_i-\lambda_k$ 是一個正整數。

以 m_i 記數 $\operatorname{Re}\lambda_i$ 的最大整數部分[2]：

---

[1] $P_m^*\ (m\geq 0)$ 祗有在矩陣 P_{-1} 有特徵數 λ_i 與 λ_k 存在，使得 $\lambda_i-\lambda_k-1=m$ 時，才能不等於零（此處由於 (89) 有 $i<k$）。對於已知 m 每一個這樣的等式對應於矩陣 P_m^* 的一個元素 $p_{ik}^{(m^*)}=a_{ik}$；這個元素可能不等於零。矩陣 P_m^* 中其餘所有元素都等於零。

[2] 是即 m_i 是不超過 $\operatorname{Re}\lambda_i$ 的最大整數 $(i=1,2,\cdots,n)$。

$$m_i=[\operatorname{Re}\lambda_i]\quad(i=1,2,\cdots,n)。\tag{96}$$

那末由(89)有：

$$m_1\geqslant m_2\geqslant\cdots\geqslant m_n。$$

此處如果 $\lambda_i-\lambda_k$ 是一個整數，那末

$$\lambda_i-\lambda_k=m_i-m_k。$$

故在標準矩陣 $P^*(z)$ 中，我們可以把所有的差 $\lambda_i-\lambda_k$ 換爲 m_i-m_k。再者，我們設：

$$\tilde{\lambda}_i=\lambda_i-m_i\quad(i=1,2,\cdots,n),\tag{96'}$$

$$M=\|m_i\delta_{ik}\|_1^n,\ U=\begin{Vmatrix}\tilde{\lambda}_1 & a_{12}\cdots a_{1n}\\ 0 & \tilde{\lambda}_2\ \cdots a_{2n}\\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\\ 0 & 0\ \ \cdots\tilde{\lambda}_n\end{Vmatrix}。\tag{97}$$

那末從(95)得出(參考本章，§5 的公式 I)：

$$P^*(z)=z^M\frac{U}{z}z^{-M}+\frac{M}{z}=D_z(z^Mz^U)。$$

因此推知，$Y=z^Mz^U$ 是方程(85)的一個解，而

$$X=A(z)z^Mz^U\tag{98}$$

是方程(81)的解❶。

3° **轉移到一般的情形**。有如前面所已經說明的，並不損及其一般性，我們可以換任何矩陣爲其相似矩陣。我們取矩陣 P_{-1} 爲若唐法式❷

$$P_{-1}=\{\lambda_1E_1+H_1,\ \lambda_2E_2+H_2,\ \cdots,\ \lambda_uE_u+H_u\},\tag{99}$$

而且有

$$\operatorname{Re}\lambda_1\geqslant\operatorname{Re}\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\operatorname{Re}\lambda_u。\tag{100}$$

此處以 E 記么矩陣，而 H 是在第一"上對角線"中元素都等於 1 而其

❶ 矩陣的特殊形狀(97)對應於矩陣 P_{-1} 的標準形狀。如果矩陣 P_{-1} 不是一個標準形狀，那末(98)中的矩陣 M 與 U 是矩陣(97)的相似矩陣。

❷ 參考第六章，§6。

餘元素全等於零的矩陣。一般的說,在對角線上不同的子塊中矩陣 E_i, H_i 的級數是不相同的;這些階與矩陣 P_{-1} 中對應的初級因子的次數相同❶。

與矩陣 P_{-1} 的表示式(99)相對應的裂分諸矩陣 P_m, P_m^*, A_m 爲子塊:

$$P_m=(P_{ik}^{(m)})_1^u, \quad P_m^*=(P_{ik}^{(m*)})_1^u, \quad A_m=(X_{ik}^{(m)})_1^u\text{。}$$

那末(87)的第二個方程可以換爲方程組

$$(\lambda_i E_i+H_i)X_{ik}^{(1)}-X_{ik}^{(1)}[(\lambda_k+1)E_k+H_k]+P_{ik}^{(0)}=P_{ik}^{(0*)} \quad (101)$$
$$(i, k=1, 2, \cdots, u),$$

他們還可以寫爲:

$$(\lambda_i-\lambda_k-1)X_{ik}^{(1)}+H_iX_{ik}^{(1)}-X_{ik}^{(1)}H_k+P_{ik}^{(0)}=P_{ik}^{(0*)} \quad (102)$$
$$(i, k=1, 2, \cdots, u)\text{。}$$

設❷

$$X_{ik}^{(1)}=\left\|\begin{matrix} x_{11} & x_{12}\cdots \\ x_{21} & x_{22}\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{matrix}\right\|=\|x_{st}\|, \ P_{ik}^{(0)}=\|p_{st}^{(0)}\|, \ P_{ik}^{(0*)}=\|p_{st}^{(0*)}\|\text{。}$$

那末矩陣方程(102)(對於固定的 i 與 k)可以換爲次形純量方程組❸:

$$(\lambda_i-\lambda_k-1)x_{st}+x_{s+1,t}-x_{s,t-1}+p_{st}^{(0)}=p_{st}^{(0*)} \quad (103)$$
$$(s=1, 2, \cdots, v; t=1, 2, \cdots, w; x_{v+1,t}=x_{s,0}=0),$$

其中 v 與 w 爲(99)中矩陣 $\lambda_iE_i+H_i$ 與 $\lambda_kE_k+H_k$ 的階。

如果 $\lambda_i-\lambda_k\neq 1$, 那末在組(103)中可以設所有的 $p_{st}^{(0*)}=0$ 且從循環關係(103)唯一的定出所有的 x_{st}。這就是說,在矩陣方程(102)中我們命

❶ 爲了記法簡便起見,對於矩陣 E_i 與 H_i,我們沒有寫出指示這些矩陣的階的添數。

❷ 爲了記法的簡便起見,在記矩陣 X_{ik}, $P_{ik}^{(0)}$, $P_{ik}^{(0*)}$ 的元素時,我們刪去添數 i 與 k。

❸ 建議讀者重新溫習一下第一章, § 3, 1 中所討論的矩陣 H 的性質。

$$P^{(0*)}_{ik}=0$$

且唯一的定出 $X^{(1)}_{ik}$。

如果 $\lambda_i-\lambda_k=1$，那末關係(103)取次之形狀

$$x_{s+1,t}-x_{s,t-1}+p^{(0)}_{st}=p^{(0*)}_{st} \tag{104}$$

$$(s=1,2,\cdots,v;\ t=1,2,\cdots,w;\ x_{v+1,t}=x_{s,0}=0)。$$

不難證明，從方程(104)可以定出矩陣 $X^{(1)}_{ik}$ 的元素 x_{st}，使得矩陣 $P^{(0*)}_{ik}$ 對應於他的維數 $(v\times w)$ 有次諸形狀：

$$\left\|\begin{array}{ccccc} a_0 & 0 & \cdots & & 0\\ a_1 & a_0 & \cdots & & 0\\ \vdots & & \ddots & & \vdots\\ a_{v-1} & a_{v-2} & \cdots & a_1 & a_0 \end{array}\right\|,\qquad \left\|\begin{array}{cccccccc} a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots\\ a_{v-1} & \cdots & a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right\|,$$

$$(v=w)\qquad\qquad (v<w)$$

$$\left\|\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & \cdots & & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & & 0\\ a_0 & 0 & \cdots & & 0\\ a_1 & a_0 & \cdots & & 0\\ \vdots & & \ddots & & \vdots\\ a_{w-1} & \cdots & & a_1 & a_0 \end{array}\right\|。 \tag{105}$$

$$(v>w)$$

對於矩陣(105)我們說是正常低三角形形式❶。

❶ 類似的來界說正常高三角形矩陣。

從方程(104)不能唯一的確定矩陣 $X^{(1)}_{ik}$ 的所有的元素；在選取元素 x_{st} 時有一些任意性。這可以直接從方程(102)來看出：當 $\lambda_i-\lambda_k=1$ 時，對矩陣 $X^{(1)}_{ik}$ 可以加上一個與 H 可易的任意矩陣，亦即任意的正常高三角形矩陣。

從 (87) 的第三個方程我們來定出矩陣 A_2。可以換這個方程爲方程組

$$(\lambda_i-\lambda_k-2)X_{ik}^{(2)}+H_iX_{ik}^{(2)}-X_{ik}^{(2)}H_k+\{P_0A_1-A_1P_0\}_{ik}+P_{ik}^{(1)}=P_{ik}^{(*)}$$

$$(i,k=1,2,\cdots,u)。\tag{106}$$

類似於 A_1 的定出，如果 $\lambda_i-\lambda_k\neq 2$，那末從對應的方程(106)當 $P_{ik}^{(1*)}=0$ 時唯一的定出矩陣 $X_{ik}^{(2)}$。如果 $\lambda_i-\lambda_k=2$，那末可以這樣的定出矩陣 $X_{ik}^{(2)}$，使得矩陣 $P_{ik}^{(1*)}$ 爲一個正常低三角形矩陣。

繼續如此進行，我們可以順次定出所有的係數矩陣 $A_1, A_2, \cdots$ 與 $P_{-1}^*, P_0^*, P_1^*, \cdots$ 此處祇有有限個係數 P_m^* 不等於零，而且矩陣 $P^*(z)$ 有次之分塊形❶：

$$P^*(z)=\begin{pmatrix}\frac{\lambda_1E_1+H_1}{z} & B_{12}z^{\lambda_1-\lambda_2-1} & \cdots & B_{1u}z^{\lambda_1-\lambda_u-1}\\ 0 & \frac{\lambda_2E_2+H_2}{z} & \cdots & B_{2u}z^{\lambda_2-\lambda_u-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\lambda_uE_u+H_u}{z}\end{pmatrix},\tag{107}$$

其中

$$B_{ik}=\begin{cases}0, & \text{如果 } \lambda_i-\lambda_k \text{ 不是一個正整數；}\\ P_{ik}^{(\lambda_i-\lambda_k-1*)}, & \text{如果 } \lambda_i-\lambda_k=\text{一個正整數 } (i,k=1,2,\cdots,u)。\end{cases}$$

所有矩陣 B_{ik} $(i,k=1,2,\cdots,u;\ i<k)$ 都是正常低三角形矩陣。

有如上面的情形，以 m_i 記 $\mathrm{Re}\,\lambda_i$ 的整數部分

$$m_i=[\mathrm{Re}\,\lambda_i]\quad(i=1,2,\cdots,u)\tag{108}$$

且設

$$\lambda_i=m_i+\tilde{\lambda}_i\quad(i=1,2,\cdots,u)。\tag{108'}$$

那末在 $P^*(z)$ 的表示式(107)中我們可以換所有的差 $\lambda_i-\lambda_k$ 爲差 m_i-m_k。用次之等式引進有整數元素的對角形矩陣 M 與高三角形矩

❶ 方陣 E_i, H_i 與長方矩陣 B_{ik} 的維數爲若唐矩陣 P_{-1} 中對角線上諸子塊的維數所確定，亦卽爲矩陣 P_{-1} 的初級因子的次數所確定。

陣 U ❶

$$M=(m_iE_i\delta_{ik})_1^u,\ U=\begin{pmatrix}\tilde{\lambda}_1E_1+H_1 & B_{12} & \cdots & B_{1u}\\ 0 & \tilde{\lambda}_2E_2+H_2 & \cdots & B_{2u}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{\lambda}_uE_u+H_u\end{pmatrix}, \quad (109)$$

我們從(107)出發容易得出矩陣 $P^*(z)$ 的次之表示式：

$$P^*(z)=z^M\frac{U}{z}\cdot z^{-M}+\frac{M}{z}=D_z(z^Mz^U)。$$

故知可以給予方程(85)的解以次之形狀

$$Y=z^Mz^U,$$

而方程(81)的解可以表爲：

$$X=A(z)z^Mz^U。\quad (110)$$

此處 $A(z)$ 是矩陣級數(84)，M 是常數整數元素的對角形矩陣，U 是三角形常數矩陣。矩陣 M 與 U 爲等式(108)，(108′)與(109)所定出❷。

3. 現在回來證明次之級數的收斂性

$$A(z)=E+A_1z+A_2z^2+\cdots$$

我們要用及次之引，他本身亦有其獨立的趣味。

引．如果級數

$$x=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots \quad (111)$$

形式的適合方程組❸

$$\frac{dx}{dz}=P(z)x, \quad (112)$$

對於這個方程組 $z=0$ 是一個正則異點，那末級數(111)，在矩陣係數

❶ 此處矩陣的分塊與矩陣 P_{-1} 與 $P^*(z)$ 的分塊是相對應的。

❷ 參考本節公式(98)下面的足註。

❸ 此處 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是未知函數的列；$a_0,a_1,a_2,\cdots$ 是常數列；$P(z)$ 是係數方陣。

$P(z)$ 的級數分解式(82)的收斂區域內,在點 $z=0$ 的任何鄰近都是收斂的。

證明 設 $$P(z)=\frac{P_{-1}}{z}+\sum_{q=0}^{\infty}P_q z^q,$$

其中級數 $\sum_{m=0}^{\infty}P_m z^m$ 當 $|z|<r$ 時是收斂的。那末有這樣的正常數 p_{-1} 與 p 存在,使得❶

$$\operatorname{mod}P_{-1}\leqslant p_{-1}I,\ \operatorname{mod}P_m\leqslant\frac{p}{r^m}I,\ I=\|1\|\ (m=0,1,2,\cdots)。\tag{113}$$

在(112)中換 x 以級數(111)且使等式(112)的兩節中同次數乘冪的係數相等,我們得出無窮多個向量(列)等式

$$\left.\begin{aligned}&P_{-1}a_0=0,\\&(E-P_{-1})a_1=P_0a_0,\\&(2E-P_{-1})a_2=P_0a_1+P_1a_0,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&(mE-P_{-1})a_m=P_0a_{m-1}+P_1a_{m-2}+\cdots+P_{m-1}a_0,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\tag{114}$$

我們祇要證明,級數(111)的任何剩餘

$$x^{(k)}=a_kz^k+a_{k+1}z^{k+1}+\cdots\tag{115}$$

在點 $z=0$ 的鄰近是收斂的。使數 k 適合不等式

$$k>np_{-1}。$$

那末數 k 超過矩陣 P_{-1} 的所有特徵數的模❷,因而當 $m\geqslant k$ 時有

❶ 對於矩陣模的定義可參考本章,§5。

❷ 如果 λ_0 是矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 的特徵數,那末 $|\lambda_0|\leqslant n\cdot\max\limits_{1\leqslant i,k\leqslant n}|a_{ik}|$。事實上,設 $Ax=\lambda_0x$,其中 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq0$。那末

$$\lambda_0x_i=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k\quad(i=1,2,\cdots,n)。$$

設 $|x_j|=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_n|\}$。那末

$$|\lambda_0||x_j|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|a_{jk}||x_k|\leqslant|x_j|n\max_{1\leqslant i,k\leqslant n}|a_{ik}|。$$

從兩節約去 $|x_j|$,我們得出所需要的不等式。

$|mE-P_{-1}|\neq 0$，且有

$$(mE-P_{-1})^{-1}=\frac{1}{m}\left(E-\frac{P_{-1}}{m}\right)^{-1}=$$

$$=\frac{1}{m}E+\frac{1}{m^2}P_{-1}+\frac{1}{m^3}P_{-1}^2+\cdots \tag{116}$$

$$(m=k,\ k+1,\ \cdots)。$$

位於這個等式的後一部分是一個收斂矩陣級數。應用這個級數，我們從(114)藉助於循環關係

$$a_m=\left(\frac{1}{m}E+\frac{1}{m^2}P_{-1}+\frac{1}{m^3}P_{-1}^2+\cdots\right)(f_{m-1}+P_0a_{m-1}+\cdots+$$

$$+P_{m-k-1}a_k)$$

$$(m=k,\ k+1,\cdots), \tag{117}$$

可以用 $a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}$ 來唯一的表出級數(115)的所有係數，其中

$$f_{m-1}=P_{m-k}a_{k-1}+\cdots+P_{m-1}a_0 \quad (m=k,\ k+1,\ \cdots)。 \tag{118}$$

我們注意，級數(115)形式的適合微分方程

$$\frac{dx^{(k)}}{dz}=P(z)x^{(k)}+f(z), \tag{119}$$

其中

$$f(z)=\sum_{m=k-1}^{\infty}f_mz^m=P(z)(a_0+a_1z+\cdots+a_{k-1}z^{k-1})-$$

$$-a_1-2a_2z-\cdots-(k-1)a_{k-1}z^{k-2}。 \tag{120}$$

從(120)推知級數

$$\sum_{m=k-1}^{\infty}f_mz^m$$

當 $|z|<r$ 時是收斂的，因而有這樣的數 $N>0$ 存在，使得❶

$$\mathrm{mod}\, f_m\leq\left\|\frac{N}{r^m}\right\| \quad (m=k-1,\ k,\ \cdots)。 \tag{121}$$

從循環關係(117)推知，在他裏面換矩陣 P_{-1}，P_q、f_{m-1} 以其固定

❶ 此處$\left\|\frac{N}{r^m}\right\|$表示一個列，其中所有元素都等於同一數 $\frac{N}{r^m}$。

陣 $p_{-1}I$, $\frac{p}{r^q}I$, $\left\|\frac{N}{r^{m-1}}\right\|$, 而換列 a_m 爲列 $\|\alpha_m\|$ $(m=k, k+1, \cdots; q=0, 1, 2, \cdots)$ ❶, 我們得出確定 mod a_m 的上界 $\|\alpha_m\|$ 的關係:

$$\operatorname{mod} a_m \leqslant \|\alpha_m\|。\tag{122}$$

因此逐項乘級數

$$\xi^{(k)} = \alpha_k z^k + \alpha_{k+1} z^{k+1} + \cdots \tag{123}$$

以列 $\|1\|$ 後就可以爲級數(115)的圍級數。

在(119)中換級數

$$P(z) = \frac{P_{-1}}{z} + \sum_{q=0}^{\infty} P_q z^q, \quad f(z) = \sum_{m=k-1}^{\infty} f_m z^m$$

的矩陣係數 P_{-1}, P_q, f_m 以其圍矩陣 $p_{-1}I$, $\frac{p}{r^q}I$, $\left\|\frac{N}{r^m}\right\|$, 我們得出 $\xi^{(k)}$ 的微分方程:

$$\frac{d\xi^{(k)}}{dz} = n\left(\frac{p_{-1}}{z} + \frac{p}{1-\frac{z}{r}}\right)\xi^{(k)} + \frac{N\frac{z^{k-1}}{r^{k-1}}}{1-\frac{z}{r}}。\tag{124}$$

這種線性微分方程有特殊解

$$\xi^{(k)} = \frac{N}{r^{k-1}} \frac{z^{np_{-1}}}{\left(1-\frac{z}{r}\right)^{npr}} \int_0^z z^{k-np_{-1}-1}\left(1-\frac{z}{r}\right)^{npr-1} dz, \tag{125}$$

他在點 $z=0$ 是正則的，且在這個點的鄰近當 $|z|<r$ 時可以展爲收斂冪級數(123)。

從優級數(123)的收斂性得出當 $|z|<r$ 時級數(115)的收斂性。我們的引已經證明。

註 1. 上述證明容許定出微分方程組(112)在異點的所有正則解，如果有這樣的解存在的話。

對於(不恆等於零的)正則解的存在性，充分必要的，是剩餘矩陣 P_{-1} 有非負的整特徵數。如果 s 是這種整特徵數的最大數，那末從

❶ 此處 $\|\alpha_m\|$ 表示列 $(\alpha_m, \alpha_m, \cdots, \alpha_m)$ (α_m 爲一個數; $m=k, k+1, \cdots$)。

(114)的前 $s+1$ 個方程可以定出不同時爲零的列 $a_0, a_1, \cdots, a_s$，因爲對應的線性齊次方程組的行列式是等於零的：

$$\Delta = |P_{-1}||E-P_{-1}|\cdots|sE-P_{-1}|=0。$$

從(114)的其餘諸方程可以用 $a_0, a_1, \cdots, a_s$ 來唯一的表出諸列 $a_{s+1}, a_{s+2}, \cdots$。根據我們的引所得出的級數(111)是收斂的。這樣一來，方程(114)的前 $s+1$ 個方程的線性無關解定出了方程組(112)在異點 $z=0$ 正則的所有線性無關解。

如果 $z=0$ 是一個異點，那末對於(111)在這一點正則的解(如果有這種解存在的話)所予原始值 a_0 不能唯一的確定這個解。但在正則異點正則的解，是唯一確定的，如果已予 $a_0, a_1, \cdots, a_s$，亦即如果當 $z=0$ 時已予解的原始值與其前 s 個導數(s 是剩餘矩陣 P_{-1} 的最大非負整特徵數)。

註 2. 所證明的引對於 $P_{-1}=0$ 仍然有效。此時在引的證明中可以取任何正數作爲 p_{-1}。當 $P_{-1}=0$ 我們的引得出關於方程組在正則點鄰近有正則解存在的已知論斷。此時我們的解爲所予的 a_0 所唯一確定。

4. 設已予組

$$\frac{dX}{dz}=P(z)X, \tag{126}$$

其中
$$P(z)=\frac{P_{-1}}{z}+\sum_{m=0}^{\infty}P_m z^m,$$

而且位於右節的級數當 $|z|<r$ 時是收斂的。

再者，設取

$$X=A(z)Y \tag{127}$$

且代 $A(z)$ 以級數

$$A(z)=A_0+A_1z+A_2z^2+\cdots, \tag{128}$$

經形式的變換後，我們得出：

$$\frac{dY}{dz}=P^*(z)Y, \tag{129}$$

其中
$$P^*(z)=\frac{P^*_{-1}}{z}+\sum_{m=0}^{\infty}P^*_m z^m,$$
而且此處,有如對於 $P(z)$ 的表示式,在右節的級數當 $|z|<r$ 時是收斂的。

我們來證明級數(128)在點 $z=0$ 的隣近 $|z|<r$ 是收斂的。

事實上,從(126),(127)與(129),知道級數(128)形式的適合次之矩陣微分方程
$$\frac{dA}{dz}=P(z)A-AP^*(z)。\tag{130}$$

我們視 A 爲所有 n 級矩陣的空間中一個向量(列),亦即 n^2 維空間的向量。如果我們在這個空間中用等式
$$\hat{P}(z)[A]=P(z)A-AP^*(z)\tag{131}$$
來界說矩陣 A 上與參數 z 有關的線性運算子 $\hat{P}(z)$,那末微分方程(130)可以寫爲:
$$\frac{dA}{dz}=\hat{P}(z)[A]。\tag{132}$$

這個方程的右節可以視爲 n^2 級矩陣 $\hat{P}(z)$ 與有 n^2 個元素的列 A 的乘積。從公式(131)看出點 $z=0$ 是組(132)的正則異點。級數(128)形式的適合這個方程組。所以應用我們的引,知道級數(128)在點 $z=0$ 的隣近 $|z|<r$ 是收斂的。

特別的,在公式(110)中對於 $A(z)$ 的級數是收斂的。

這樣一來,我們證明了次之

定理 2. 每一個有正則異點 $z=0$
$$P(z)=\frac{P_{-1}}{z}+\sum_{m=0}^{\infty}P_m z^m$$
的方程組
$$\frac{dX}{dz}=P(z)X\tag{133}$$
有次之形狀的解

$$X=A(z)z^M z^U,\tag{134}$$

其中 $A(z)$ 是當 $z=0$ 是正則的矩陣函數且在這一點變為么矩陣 E，而 M 與 U 為常數矩陣，而且 M 是單構的，其特徵數都是整數，至於矩陣 U，其任何不同的兩個特徵數的差都不是整數。

如果利用滿秩矩陣 T^{-1} 化矩陣 P_{-1} 為若唐式

$$P_{-1}=T\{\lambda_1E_1+H_1,\ \lambda_2E_2+H_2,\ \cdots,\ \lambda_sE_s+H_s\}T^{-1}\tag{135}$$

$$(\mathrm{Re}\lambda_1\geqslant\mathrm{Re}\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\mathrm{Re}\lambda_s),$$

那末可以取 M 與 U 為次之形狀

$$M=T\{m_1E_1,\ m_2E_2,\ \cdots,\ m_sE_s\}T^{-1},\tag{136}$$

$$U=T\begin{pmatrix}\tilde{\lambda}_1E_1+H_1 & B_{12} & \cdots & B_{1s}\\ 0 & \tilde{\lambda}_2E_2+H_2 & \cdots & B_{2s}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{\lambda}_sE_s+H_s\end{pmatrix}T^{-1},\tag{137}$$

其中

$$m_i=[\lambda_i],\quad \tilde{\lambda}_i=\lambda_i-m_i\quad(i=1,2,\cdots,s),\tag{138}$$

B_{ik} 是正常低三角形矩陣 $(i,k=1,2,\cdots,s)$，而且 $B_{ik}=0$，如果 $\lambda_i-\lambda_k$ 不是一個正整數 $(i,k=1,2,\cdots,s)$。

在特別的情形，在差 $\lambda_i-\lambda_k$ $(i,k=1,2,\cdots,s)$ 中沒有一個等於正整數時，在(134)中可以取 $M=0$，$U=P_{-1}$，亦即在這一情形可以表解為次之形狀

$$X=A(z)z^{P_{-1}}。\tag{139}$$

註 1. 注意在本節中已經建立了經 $P(z)$ 的級數的係數 P_m 來定出級數 $A(z)=\sum_{m=0}^{\infty}A_mz^m$ $(A_0=E)$ 諸係數的計算法。此外，所證明的定理定出積分代換 V，在繞異點 $z=0$ 從正方向轉一個單迴時等於對解(134)乘上 V：

$$V=e^{2\pi iU}。$$

註 2. 從定理的說法，知在 $\tilde{\lambda}_i\neq\tilde{\lambda}_k$ 時有

$$B_{ik}=0 \quad (i, k=1, 2, \cdots, s)。$$

故矩陣

$$\widetilde{\Lambda}=T\{\widetilde{\lambda}_1 E_1, \widetilde{\lambda}_2 E_2, \cdots, \widetilde{\lambda}_s E_s\} T^{-1} \text{ 與 } \widetilde{U}=T\begin{pmatrix} 0 & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ 0 & 0 & \cdots & B_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} T^{-1} \tag{140}$$

彼此可易:

$$\widetilde{\Lambda}\widetilde{U}=\widetilde{U}\widetilde{\Lambda}。$$

因此

$$z^M z^U = z^M z^{\widetilde{\Lambda}+\widetilde{U}} = z^M z^{\widetilde{\Lambda}} z^{\widetilde{U}} = z^{\Lambda} z^{\widetilde{U}}, \tag{141}$$

其中

$$\Lambda = M+\widetilde{\Lambda} = T\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\} T^{-1}。 \tag{142}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 爲矩陣 P_{-1} 的全部特徵數，而且排列成適合關係式 $\operatorname{Re}\lambda_1 \geqslant \operatorname{Re}\lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \operatorname{Re}\lambda_n$ 的次序。

另一方面，

$$z^{\widetilde{U}} = h(\widetilde{U}),$$

其中 $h(\lambda)$ 是函數 $f(\lambda)=z^{\lambda}$ 的拉格蘭日-薛爾凡斯透內插多項式。

因爲矩陣 $\widetilde{U}$ 的所有特徵數都等於零，所以 $h(\lambda)$ 與 $f(0), f'(0), \cdots, f^{(g-1)}(0)$ 線性相關，亦即與 $1, \ln z, \cdots, (\ln z)^{g-1}$ 有關（g 爲使 $\widetilde{U}^g=0$ 的最小冪次）。故

$$h(\lambda)=\sum_{j=0}^{g-1} h_j(\lambda)(\ln z)^j,$$

因而

$$z^{\widetilde{U}} = h(\widetilde{U}) = \sum_{j=0}^{g-1} h_j(\widetilde{U})(\ln z)^j = T\begin{pmatrix} 1 & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} T^{-1}, \tag{143}$$

其中 q_{ij} $(i, j=1, 2, \cdots, n; i<j)$ 是次數低於 g 的 $\ln z$ 的多項式。

根據(134)，(141)，(142)與(143)可以取組(126)的特殊解爲:

$$X=A(z)\left\|\begin{matrix} z^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & z^{\lambda_n}\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix} 1 & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{matrix}\right\|。\tag{144}$$

此處 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是矩陣 P_{-1} 的特徵數，其排列次序適合不等式 $\mathrm{Re}\lambda_1\geqslant\mathrm{Re}\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\mathrm{Re}\lambda_n$，而 $q_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots,n;\ i<j)$ 爲 $\ln z$ 的次數不大於 $g-1$ 的多項式，其中 g 爲彼此相差爲一個整數的特徵數 λ_i 中最大數；$A(z)$ 爲在點 $z=0$ 正則的矩陣函數，而且 $A(0)=T\ (|T|\neq 0)$。如果矩陣 P_{-1} 是若唐式，那末 $T=E$。

§ 11. 可化解析組

作爲上節定理的應用，我們來闡明在什麼情形之下，組

$$\frac{dX}{dt}=Q(t)X,\tag{145}$$

其中

$$Q(t)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{Q_m}{t^m}\tag{146}$$

當 $t>t_0$ 時爲一收斂級數者，是(關於略普諾夫)可化的，亦即在什麼情形之下，方程組有形狀

$$X=L(t)e^{Bt}\tag{147}$$

的解存在，其中 $L(t)$ 是一個略普諾夫矩陣(亦卽 $L(t)$ 適合本章，§2 的條件 1°—3°)，而 B 是一個常數矩陣[1]。此處 X，Q 都是複元素矩陣，而 t 是一個實變數。

應用變換

$$z=\frac{1}{t}.$$

那末組(145)可以寫爲次之形狀

[1] 如果等式(147)成立，那末略普諾夫變換 $X=L(t)Y$ 變組(145)爲組 $\frac{dY}{dt}=BY$。

$$\frac{dX}{dz}=P(z)X, \tag{148}$$

其中

$$P(z)=-z^{-2}Q\left(\frac{1}{z}\right)=-\frac{Q_1}{z}-\sum_{m=0}^{\infty}Q_{m+2}z^m。 \tag{149}$$

位於 $P(z)$ 的表示式右節的級數在 $|z|<\frac{1}{t_0}$ 時是收斂的。分為兩種情形來討論:

(1) $Q_1=0$。此時點 $z=0$ 不是組(148)的異點。這個組有在點 $z=0$ 正則的與標準化的解。這個解的形狀為次之收斂冪級數

$$X(z)=E+X_1z+X_2z^2+\cdots\quad\left(|z|<\frac{1}{t_0}\right)。$$

命

$$L(t)=X\left(\frac{1}{t}\right),\quad B=0,$$

我們得出所求的表示式(147)。我們的組是可化的。

(2) $Q_1\neq 0$。此時組(148)在點 $z=0$ 有正則異點。

能不損及討論的普遍性,可以視剩餘矩陣 $P_{-1}=-Q_1$ 已經化為若唐式,在其對角線上諸元素 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的排列次序適合 $\operatorname{Re}\lambda_1\geqslant\geqslant\operatorname{Re}\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\operatorname{Re}\lambda_n$。

那末在公式(144)中,$T=E$,因而組(148)有解:

$$X=A(z)\begin{Vmatrix}z^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & z^{\lambda_2} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & z^{\lambda_n}\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}1 & q_{12} & \cdots & q_{1n}\\ 0 & 1 & \cdots & q_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{Vmatrix},$$

其中函數 $A(z)$ 在 $z=0$ 時是正則的且在這一點取有值 E,而 q_{ik} (i, $k=1,2,\cdots,n$; $i<k$) 為 $\ln z$ 的多項式。此時換 z 為 $\frac{1}{t}$,將有:

$$X=A\left(\frac{1}{t}\right)\left\|\begin{matrix}\left(\frac{1}{t}\right)^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \left(\frac{1}{t}\right)^{\lambda_2} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \left(\frac{1}{t}\right)^{\lambda_n}\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}1 & q_{12}\left(\ln\frac{1}{t}\right) & \cdots & q_{1n}\left(\ln\frac{1}{t}\right)\\ 0 & 1 & \cdots & q_{2n}\left(\ln\frac{1}{t}\right)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{matrix}\right\|。\tag{150}$$

因爲變換 $X=A\left(\frac{1}{t}\right)Y$ 是一個略普諾夫變換，所以組(145)可以化爲某一個有常係數的組的充分必要條件，是乘積

$$L_1(t)=\left\|\begin{matrix}t^{-\lambda_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & t^{-\lambda_2} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & t^{-\lambda_n}\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}1 & q_{12}\left(\ln\frac{1}{t}\right) & \cdots & q_{1n}\left(\ln\frac{1}{t}\right)\\ 0 & 1 & \cdots & q_{2n}\left(\ln\frac{1}{t}\right)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{matrix}\right\|e^{-Bt},\tag{151}$$

其中 B 爲某一常數矩陣者，是一個略普諾夫矩陣，亦即矩陣 $L_1(t)$，$\frac{dL_1}{dt}$ 與 $L_1^{-1}(t)$ 都是有界的。此處，從也羅苹定理(§4)推得，矩陣 B 可以作爲特徵數爲實數的矩陣。

從矩陣 $L_1(t)$ 與 $L_1^{-1}(t)$ 的有界性，當 $t>t_0$ 時，推得矩陣 B 的特徵數應全等於零。這可以從(151)中得出的 e^{Bt} 與 e^{-Bt} 的表示式來推得。此外，數 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 應當全爲純虛數，因爲根據(151)從 $L_1(t)$ 中最後一列與 $L_1^{-1}(t)$ 中最先一列的元素的有界性推知 $\operatorname{Re}\lambda_n\geqslant 0$ 與 $\operatorname{Re}\lambda_1<0$。

但是如果矩陣 P_{-1} 的特徵數全是純虛數，那末矩陣 P_{-1} 的任何兩個不同特徵數的差都不等於整數。故有公式(139)

$$X=A(z)z^{P_{-1}}=A\left(\frac{1}{t}\right)t^{Q_1},$$

且對於組的可化性，充分必要的，是矩陣

$$L_2(t)=t^{Q_1}e^{-Bt} \tag{152}$$

與其逆矩陣在 $t>t_0$ 時都是有界的。

因爲矩陣 B 的特徵數都應當等於零，所以矩陣 B 的最小多項式有 λ^d 的形狀。記矩陣 Q_1 的最小多項式爲

$$\psi(\lambda)=(\lambda-\mu_1)^{c_1}(\lambda-\mu_2)^{c_2}\cdots(\lambda-\mu_u)^{c_u} \quad (當 i\neq k 時 \mu_i\neq\mu_k)。$$

因爲 $Q_1=-P_{-1}$，所以數 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_u$ 與對應數 λ_i 反號，因而他們都是純虛數。此時[參考本章，§1 的公式(12)與(13)]

$$t^{Q_1}=\sum_{k=1}^{u}[U_{k0}+U_{k1}\ln t+\cdots+U_{k,c_k-1}(\ln t)^{c_k-1}]t^{\mu_k}, \tag{153}$$

$$e^{Bt}=V_0+V_1t+\cdots+V_{d-1}t^{d-1}。 \tag{154}$$

代這些表示式在等式

$$L_2(t)e^{Bt}=t^{Q_1}$$

中，我們得出：

$$[L_2(t)V_{d-1}+(*)]t^{d-1}=Z_0(t)(\ln t)^{c-1}, \tag{155}$$

其中 c 是數 $c_1,c_2,\cdots,c_u$ 中的最大數，$(*)$記當 $t\to\infty$ 時趨於零的矩陣，而 $Z_0(t)$ 爲當 $t>t_0$ 時有界的矩陣。

因爲位於等式(155)左右兩節的矩陣在 $t\to\infty$ 時應當有同級的增大，故

$$d=c=1,$$

亦卽

$$B=0,$$

而矩陣 Q_1 祇有單重的初級因子。

反之，如果矩陣 Q_1 祇有單重初級因子與純虛數特徵數 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$，那末

$$X=A(z)z^{-Q_1}=A(z)\|z^{-\mu_i}\delta_{ik}\|_1^n$$

是組(148)的解。此時命 $z=\frac{1}{t}$，我們求得：

$$X=A\left(\frac{1}{t}\right)\|t^{\mu_i}\delta_{ik}\|_1^n。$$

函數 $X(t)$ 與 $\frac{dX(t)}{dt}$ 以及矩陣 $X^{-1}(t)$ 在 $t>t_0$ 時都是有界的。所以我們的組是可化的 $(B=0)$。我們證明了❶

定理 3. 組
$$\frac{dX}{dt}=Q(t)X,$$
其中矩陣 $Q(t)$ 當 $t>t_0$ 時可表爲收斂級數
$$Q(t)=\frac{Q_1}{t}+\frac{Q_2}{t^2}+\cdots$$
時，是可化的充分必要條件，爲剩餘矩陣 Q_1 的初級因子都是單重的而且其特徵數都是純虛數。

§12. 多個矩陣的解析函數及其在微分方程組的研究中的應用

伊.阿.拉撲-達尼連扶斯基的工作

m 個 n 級矩陣 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 的解析函數可以應用級數
$$F(X_1, X_2, \cdots, X_m)=\alpha_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1, j_2, \cdots, j_\nu}^{(1\cdots m)}\alpha_{j_1 j_2\cdots j_\nu}X_{j_1}X_{j_2}\cdots X_{j_\nu} \tag{156}$$
來給出，這個級數對於所有適合不等式
$$\bmod X_j<R_j \quad (j=1, 2, \cdots, m) \tag{157}$$
的 n 階矩陣 X_j 都是收斂的。此處係數
$$\alpha_0, \alpha_{j_1 j_2\cdots j_\nu} \quad (j_1, j_2, \cdots, j_\nu=1, 2, \cdots, m;\ \nu=1, 2, 3, \cdots)$$
都是複數，$R_j(j=1, 2, \cdots, m)$ 是正元素的 n 級常數矩陣而 $X_j(j=1, 2, \cdots, m)$ 是同級的矩陣，但是他的元素是複變數。

多個矩陣的解析函數的理論是爲伊.阿.拉撲-達尼連扶斯基所展開的。根據這個理論，伊.阿.拉撲-達尼連扶斯基建立了有理係數線性微分方程組的基本研究。

有理係數線性微分方程組經過獨立變數的適當的變換常可化爲次之形狀

---

❶ 參考也羅琴的工作 [11]，21—23 頁。在那裏這個定理是在這樣的情形下來證明的，是即矩陣 Q_1 沒有不同的特徵數其彼此之差能等於整數。

$$\frac{dX}{dz}=\sum_{j=1}^{m}\left\{\frac{U_{j0}}{(z-a_j)^{s_j}}+\frac{U_{j1}}{(z-a_j)^{s_j-1}}+\cdots+\frac{U_{j,s_j-1}}{z-a_j}\right\}X, \tag{158}$$

其中 U_{jk} 是 n 級常數矩陣，a_j 是複數，s_j 是正整數 $(k=0,1,\cdots,s_j-1;$ $j=1,2,\cdots,m)$ ❶。

我們用特殊情形，所謂正則組，來說明拉撲-達尼連扶斯基的一些性質。這種組爲條件 $s_1=s_2=\cdots=s_m=1$ 所決定故可寫爲次之形狀

$$\frac{dX}{dz}=\sum_{j=1}^{m}\frac{U_j}{z-a_j}X。 \tag{159}$$

按照拉撲-達尼連扶斯基，在討論中我們引進特殊的解析函數——超越對數——他們是爲次諸循環關係所定出的：

$$l_b(z;a_{j_1})=\int_b^z\frac{dz}{z-a_j},$$

$$l_b(z;a_{j_1},a_{j_2},\cdots,a_{j_\nu})=\int_b^z\frac{l_b(z;a_{j_2},a_{j_3},\cdots,a_{j_\nu})}{z-a_{j_1}}dz。$$

視點 $a_1,a_2,\cdots,a_m,\infty$ 爲對數類型的分支點，我們構成對應的黎曼曲面 $S(a_1,a_2,\cdots,a_m;\infty)$. 在這個曲面上，每一個超越對數都是單值函數。另一方面，組(159)的矩陣子 Ω_b^z(亦卽在點 $z=b$ 的標準化解)，經解析延拓，亦可視爲 $S(a_1,a_2,\cdots,a_m;\infty)$ 上單值函數；此處可以在 S 上選取任何與 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 不同的有限點作爲 b。

對於標準化解 Ω_b^z，拉撲-達尼連扶斯基經由組(159)所定出的矩陣 $U_1,U_2,\cdots,U_m$，給予明顯的級數表示式

$$\Omega_b^z=E+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{j_1,\cdots,j_\nu}^{(1-m)}l_b(z;a_{j_1},a_{j_2},\cdots,a_{j_\nu})U_{j_1}U_{j_2}\cdots U_{j_\nu}。 \tag{160}$$

這個展開式對於任何 $U_1,U_2,\cdots,U_m$，關於 z 都是一致收斂的，且在曲面 $S(a_1,a_2,\cdots,a_m,\infty)$ 上任何有限區域中表出 Ω_b^z，祇要這個區域不含點 $a_1,\cdots,a_m$ 在他的裏面或在他的界線上。

如果級數(156)對於任何矩陣 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 是收斂的，那末稱

❶ 在組(158)中所有的係數都是關於 z 的眞有理分數。任何有理係數都可以化爲這種形狀，如果應用變數 z 的分數-線性變換(對於所有的係數)正則有限點 $z=c$ 爲 $z=\infty$。

對應的函數 $F(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 爲整函數。Ω_b^z 是矩陣 $U_1, U_2, \cdots, U_m$ 的整函數。

在公式(160)中使變數 z 繞點 a_j 從正方向轉動一次，使得轉動路線不經過另一點 $a_i (i \neq j)$，我們得出對應於點 $z = a_j$ 的積分代換 V_j 的表示式：

$$V_j = E + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, \cdots, j_\nu}^{(1 \cdots m)} p_j(b; a_{j_1}, a_{j_2}, \cdots, a_{j_\nu}) U_{j_1} U_{j_2} \cdots U_{j_\nu} \tag{161}$$

$$(j = 1, 2, \cdots, m),$$

其中所用記號的詳細寫法爲：

$$p_j(b;\, a_{j_1}) = \int_{(a_j)} \frac{dz}{z - a_{j_1}}$$

$$p_j(b;\, a_{j_1}, a_{j_2}, \cdots, a_{j_\nu}) = \int_{(a_j)} \frac{l_b(z;\, a_{j_2}, a_{j_3}, \cdots, a_{j_\nu})}{z - a_{j_1}}\, dz$$

$$\begin{pmatrix} j_1, j_2, \cdots, j_\nu, j = 1, 2, \cdots, m; \\ \nu = 1, 2, 3, \cdots \end{pmatrix}。$$

有如級數(160)，級數(161)是 $U_1, U_2, \cdots, U_m$ 的整函數。

推廣到無窮多個但是可數的矩陣變數 $X_1, X_2, X_3, \cdots$ 的解析函數理論後[1]，拉撲-達尼連扶斯基曾經應用這個理論來研究方程組的解在不規則異點鄰近的性狀[2]。我們引進主要的結果。

方程組
$$\frac{dX}{dz} = \sum_{j=-q}^{\infty} P_j z^j X$$

的標準化解 Ω_b^z，其中右節的冪級數在 $|z| < r\ (r > 1)$ 時[3]是收斂的，可以表爲級數

$$\Omega_b^z = E + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j_1, j_2, \cdots, j_\nu = -q}^{\infty} P_{j_1} \cdots$$

$$\cdots P_{j_\nu} \sum_{\mu=0}^{\nu} b^{j_{\mu+1} + \cdots + j_\nu + \nu - \mu} z^{j_1 + \cdots + j_\mu + \mu} \sum_{\lambda=0}^{\nu-\mu} \alpha^{*(\lambda)}_{j_{\mu+1} \cdots j_\nu} \ln^\lambda b \sum_{\varkappa=0}^{\mu} \alpha^{(\varkappa)}_{j_1 \cdots j_\mu} \ln^\varkappa z。 \tag{162}$$

---

[1] 參考[186]，卷 I，篇 1。

[2] 參考[186]，卷 I，篇 3，還可參考[82]，[70a，6]。

[3] $r > 1$ 的限制不是主要的，因爲這個條件常可以從換 z 爲 αz 來得出，其中 α 是一個適當選取的正數。

此處 $\alpha^{*(\lambda)}_{j_{\mu+1},\cdots,j_\lambda}$ 與 $\alpha^{(\nu)}_{j_1,\cdots,j_\mu}$ 是用特殊公式所決定的純量係數。級數(162)對於任何矩陣 $P_1, P_2, \cdots$ 在環

$$\rho<|z|<r$$

中是收斂的(ρ 是任何小於 r 的正數)。這個環應當含有點 $b(\rho<|b|<r)$。

在本書中不可能詳細敘述拉撲-達尼連扶斯基的工作內容，我們祇能引進上述的一些主要結果而向讀者推薦其有關的文獻。

拉撲-達尼連扶斯基所有關於微分方程的工作曾經蘇聯科學院在1934--1936年先後出版了三册。此外著者的主要結果曾在論文[82]與不很厚的書[18a]中述及。某些結果的簡略敘述可以在扶.伊.斯米爾諾夫的書"高等數學教程"第三卷中找到。

第十五章　路斯-霍維茨問題及其相鄰近的問題

§1. 緒言

在第十四章，§3 中我們曾述及，根據略普諾夫定理，微分方程組

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k+(**) \tag{1}$$

$[a_{ik}(i, k=1, 2, \cdots, n)$ 是常係數$]$的零解對於 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的任何二次或高次的項$(**)$是穩定的，如果矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 的全部特徵數，亦即長期方程 $\Delta(\lambda)\equiv|\lambda E-A|=0$ 的全部根都有負實數部分。

所以穩定性的充分必要條件，要已知代數方程的根全部位於左邊半個平面裏面，在一系列的應用領域中對於力學與電學系統穩定性的研究，有其基本的重要性。

這個代數問題的重要性，已經為機器調節理論的創始人，英國物理學家堤.凱.馬克思威爾與俄國學者伊.阿.維希年格拉達斯基工程師所說明，他們在其從事於調整器的研究工作中❶，對於次數不大於 3 的方程的上述代數條件建立了廣泛的應用。

在 1868 年馬克思威爾把這個數學問題推進到求出任意次代數方程的對應條件。在那裏，對於這個問題，主要的是 1856 年法國數學家安密達的工作[128]中的解答。這篇論文中，在複多項式 $f(z)$ 的分佈於某一半平面中(或某一矩形中)諸根的個數與某種二次型的符號差之間，建立了密切關係。但是安密達的結果沒有達到這樣的情況，使得他們可以為應用領域中的工作者與專家所利用。所以安密達的這一工作

---

❶ 堤.凱.馬克思威爾，關於調整器(1868)；伊.阿.維希年格拉達斯基，關於直接作用的調整器(1876)。這些論文都刊載於文集"自動調節理論"(1949)(俄文)中。亦可參考阿.阿.恩達洛諾夫與伊.恩.伏思年新斯基的論文，關於堤.凱.馬克思威爾，伊.阿.維希年格拉達斯基與阿.斯托獨爾在機器調節理論領域中的研究工作。

沒有得到相應的傳佈。

在 1875 年英國力學家路斯 [45]，應用施斗姆定理與柯許指標理論，建立了對於定出實多項式有 k 個根位於右邊半個平面($\operatorname{Re} z>0$)的計算法。在特殊情形 $k=0$ 時這個計算法給出了穩定性判定。

在十九世紀末，著名的斯洛代克工程研究者，蒸汽的與氣體的透平機理論的發明家，阿.斯托獨爾，不知道路斯的工作，重新建立了找出條件使得代數方程的根有負實數部分的工作，而且在 1895 年阿.霍維茨[129]，根據安密達的工作，給出了同一問題的（與路斯無關的）第二個解答。霍維茨所得出的行列式不等式就是現在所熟知的所謂路斯-霍維茨條件。

但是在霍維茨的工作在世界上出現時，近代穩定性理論的創立者，阿.蒙.略普諾夫在其論文（“關於運動穩定性的一般問題”，赫力可夫，1892）中已經建立了❶，從之可以推出，使實矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 的特徵方程諸根有負實數部分的充分必要條件的定理。這些條件曾用於一系列的關於調節理論的工作❷。

在 1914 年法國數學家連那爾與希派爾[135]曾經建立了穩定性的新的判定。

應用特殊的二次型，這些著者得出了穩定性判定，比路斯-霍維茨判定較為方便（在連那爾-希派爾判定中行列式不等式的個數大約比路斯-霍維茨判定中的個數要少一半）。

著名的俄國數學家潑.爾.切比雪夫與阿.阿.馬爾可夫建立了與分解為特殊類型連分數的分解式有關係的兩個定理。有如 § 16 中所證明，這些定理直接與路斯-霍維茨問題有關。

在問題範圍的概略敘述中，讀者可以看到，二次型理論（第十章），特別是甘凱連夫型的理論（第十章，§ 10）得到了他們主要的用途。

---

❶ 參考[19]，§ 20。

❷ 參考，例如，[55]。

§2. 柯許指標

從討論所謂柯許指標開始[1]。

定義1. 在 a 到 b 的界限中，實有理函數 $R(x)$ 的柯許指標(記為 $I_a^b R(x)$；a, b 為實數，或者為 $\pm\infty$)是指，當變數從 a 變到 b 時，$R(x)$ 從 $-\infty$ 跳到 $+\infty$ 的斷點數與其從 $+\infty$ 跳到 $-\infty$ 的斷點數的差數[2]。

根據這個定義，如果

$$R(x)=\sum_{i=1}^{p}\frac{A_i}{x-\alpha_i}+R_1(x),$$

其中 A_i, α_i $(i=1, 2, \cdots, p)$ 都是實數，而 $R_1(x)$ 是沒有實數極點[3]的有理函數，那末

$$I_{-\infty}^{+\infty} R(x)=\sum_{i=1}^{p}\operatorname{sign} A_i \text{[4]} \tag{2}$$

而且一般的有

$$I_a^b R(x)=\sum_{a<\alpha_i<b}\operatorname{sign} A_i (a<b)。 \tag{2'}$$

特別的，如果 $f(x)=a_0(x-\alpha_1)^{n_1}\cdots(x-\alpha_m)^{n_m}$ 是一個實多項式(在 $i\neq k$ 時 $\alpha_i\neq\alpha_k$；$i, k=1, 2, \cdots, m$)且在這個多項式的根 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 中衹有前 p 個是實數，那末

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{j=1}^{m}\frac{n_j}{x-\alpha_j}=\sum_{i=1}^{p}\frac{n_i}{x-\alpha_i}+R_1(x),$$

其中 $R_1(x)$ 是沒有實極點的實有理函數。

故由(2′)知道指標

$$I_a^b\frac{f'(x)}{f(x)}\ (a<b)$$

等於多項式 $f(x)$ 在隔間 (a, b) 中的不同的實根個數。

---

[1] 參考[10]，419—425頁。

[2] 在計算斷點時，x 的端點值——界限 a 與 b——不包含在內。

[3] 有理函數的極點，是變數的這種值，可以使得這個函數變為無窮大者。

[4] $\operatorname{sign} a$ (a 為實數)視 $a>0$, $a<0$ 或 $a=0$ 而取值 $+1$, -1 或 0。

任何實有理函數 $R(x)$ 常可表爲次之形狀

$$R(x)=\sum_{i=1}^{p}\left\{\frac{A_1^{(i)}}{x-\alpha_i}+\cdots+\frac{A_{n_i}^{(i)}}{(x-\alpha_i)^{n_i}}\right\}+R_1(x),$$

其中所有的 α 與 A 都是實數($A_{n_i}^{(i)}\neq 0$; $i=1, 2, \cdots, p$),而 $R_1(x)$ 沒有實極點。

那末

$$I_{-\infty}^{+\infty}R(x)=\sum_{(n_i\text{奇數})}\operatorname{sign}A_{n_i}^{(i)} \tag{3}$$

而一般的有

$$I_a^b R(x)=\sum_{\left(\substack{a<\alpha_i<b\\ n_i\text{奇數}}\right)}A_{n_i}^{(i)}\ (a<b)\text{❶}。 \tag{3'}$$

有指標 $I_a^b R(x)$ 的一個計算法其所根據的是古典的施斗姆定理。

討論在隔間 (a, b)❷ 中含有下面兩個性質的實多項式序列

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_m(x): \tag{4}$$

1° 對於任何使得任一函數 $f_k(x)$ 變爲零的值 $x\ (a<x<b)$,兩個相鄰的函數 $f_{k-1}(x)$ 與 $f_{k+1}(x)$ 的值都不等於零而且是反號的,亦即在 $a<x<b$ 時由 $f_k(x)=0$ 得出: $f_{k-1}(x)f_{k+1}(x)<0$。

2° 序列(4)中最後的函數 $f_m(x)$ 在 (a, b) 中不能變爲零,亦即在 $a<x<b$ 時有 $f_m(x)\neq 0$。

這樣的多項式序列(4)稱爲隔間 (a, b) 中施斗姆列。

以 $V(x)$ 記序列(4)對於定值 x 的變號數❸。那末當 x 從 a 變到 b 時,$V(x)$ 的值祇在經過序列(4)中某些函數的零點時才有變動的可能。但是由 1° 當其經過函數 $f_k(x)$ $(k=2, \cdots, m-1)$ 的零點時, $V(x)$ 的

❶ 在(3)式右節的和歷經 n_i 爲奇數的所有對應的值 i。在 (3′) 式右節的和歷經 n_i 爲奇數而且 $a<\alpha_i<b$ 的所有對應的值 i。

❷ 此處, a 可能等於 $-\infty$,而 b 可能等於 $+\infty$。

❸ 如果 $a<x<b$ 而且 $f_1(x)\neq 0$,那末對於 $V(x)$ 的定義由 1° 可以在序列(4)中删去等於零的諸值或者給這些值以任何符號。如果 a 是有限的,那末我們了解 $V(a)$ 爲 $V(a+\varepsilon)$,其中 ε 爲適當小的正數,使得函數 $f_i(x)\ (i=1, 2, \cdots, n)$ 在半閉隔間 $(a, a+\varepsilon]$ 中都不等於零。同樣的,如果 b 是有限的,那末我們了解 $V(b)$ 爲 $V(b-\varepsilon)$,其中數 ε 的定出亦是相類似的。

值沒有改變。當 x 經過函數 $f(x)$ 的零點時，序列 (4) 損失或增加一個變號數要視分式 $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$ 是從 $-\infty$ 跳到 $+\infty$ 或是從 $+\infty$ 到 $-\infty$ 而定。故有

定理 1.（施斗姆） 如果 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)$ 是 (a, b) 中施斗姆列，而 $V(x)$ 為這個序列的變號數，那末

$$I_a^b \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = V(a) - V(b)。\tag{5}$$

註 我們乘施斗姆列的全部項以任何同一的多項式 $d(x)$。這樣得出的多項式序列稱為廣義的施斗姆列。因為乘序列（4）中所有的項以同一多項式時，等式（5）的左右兩節都沒有改變，所以施斗姆定理對於廣義施斗姆列仍然有效。

我們注意，如果給予了兩個任意的多項式 $f(x)$ 與 $g(x)$ [$f(x)$ 的次數 $\geqslant g(x)$ 的次數]，那末常可利用歐幾里得演段來構成廣義施斗姆列，在他裏面開始的兩個函數是 $f_1(x) \equiv f(x)$，$f_2(x) \equiv g(x)$。

事實上，以 $-f_3(x)$ 記 $f_2(x)$ 除 $f_1(x)$ 所得出的餘式，以 $-f_4(x)$ 記 $f_3(x)$ 除 $f_2(x)$ 所得出的餘式，諸如此類，我們得到一系列的恆等式

$$f_1(x) = q_1(x) f_2(x) - f_3(x), \cdots, f_{k-1}(x) = \\ = q_{k-1}(x) f_k(x) - f_{k+1}(x), \cdots, f_{m-1}(x) = q_{m-1}(x) f_m(x), \tag{6}$$

其中最後一個不恆等於零的餘式 $f_m(x)$ 是 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的最大公因式，亦是構成這種序列（4）的所有函數的最大公因式。如果 $f_m(x) \neq 0$ $(a<x<b)$，那末由（6）得出的序列（4）適合條件 1° 與 2°，故為一個施斗姆列。如果多項式 $f_m(x)$ 在隔間 (a, b) 中有根，那末序列（4）是一個廣義施斗姆列，因為在全部項中約去因子 $f_m(x)$ 後就得出一個施斗姆列。

從所證明的結果，知道任何有理函數 $R(x)$ 的指標都可以利用施斗姆定理來得出。對此祇要表 $R(x)$ 為 $Q(x) + \frac{g(x)}{f(x)}$ 的形狀，其中 $Q(x)$,

$f(x)$，$g(x)$ 都是多項式而 $g(x)$ 的次數 $<f(x)$ 的次數。那末，如果構成 $f(x)$，$g(x)$ 的廣義施斗姆列，我們就得出

$$I_a^b R(x) = I_a^b \frac{g(x)}{f(x)} = V(a) - V(b)。$$

應用施斗姆定理可以定出多項式 $f(x)$ 在隔間 (a, b) 中不同實根的個數，因爲我們已經知道這個數目等於 $I_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}$。

§3. 路斯演段

1. 路斯的問題是要定出實多項式 $f(z)$ 的位於右半平面中 $(\mathrm{Re}\, z>0)$ 的實根個數 k。

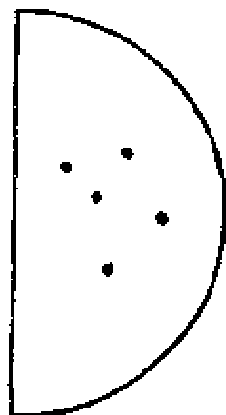


圖 7

首先討論 $f(z)$ 在虛軸上沒有零點的情形。在右半平面中，以原點爲圓心 R 爲半徑作半圓周來討論爲這個半圓周與虛軸上線段所圍成的區域(圖 7)。對於足夠大的 R 可以使得多項式 $f(z)$ 的所有有正實數部分的 k 個根都能在這個區域裏面找到。所以 $\arg f(z)$ 在從正方向繞過界一轉後要增加 $2k\pi$❶。另一方面，當 $R\to\infty$ 時，$\arg f(z)$ 沿半徑爲 R 的半圓周上轉動後的增量爲首項 a_0z^n 的幅角增量所定出，因而等於 $n\pi$。故對於 $\arg f(z)$ 沿虛軸 $(R\to\infty)$ 的增量我們得出表示式：

$$\Delta_{-\infty}^{+\infty} \arg f(i\omega) = (n-2k)\pi。 \tag{7}$$

引進不常用的多項式 $f(z)$ 的係數記法，是即設：

$$f(z) = a_0z^n + b_0z^{n-1} + a_1z^{n-2} + b_1z^{n-3} + \cdots \quad (a_0 \neq 0)。$$

那末

$$f(i\omega) = U(\omega) + iV(\omega), \tag{8}$$

❶ 事實上，如果 $f(z)=a_0\prod_{i=1}^{n}(z-z_i)$，那末 $\Delta \arg f(z)=\sum_{i=1}^{n}\Delta \arg(z-z_i)$。如果點 z_i 在所討論的區域中出現，那末 $\Delta \arg(z-z_i)=2\pi$；如果 z_i 在這個區域的外面，那末 $\Delta \arg(z-z_i)=0$。

其中對於偶數 n 有：

$$\left.\begin{aligned} U(\omega) &= (-1)^{\frac{n}{2}}(a_0\omega^n - a_1\omega^{n-2} + a_2\omega^{n-4} - \cdots), \\ V(\omega) &= (-1)^{\frac{n}{2}-1}(b_0\omega^{n-1} - b_1\omega^{n-3} + b_2\omega^{n-5} - \cdots), \end{aligned}\right\} \tag{8'}$$

而對於奇數 n 有：

$$\left.\begin{aligned} U(\omega) &= (-1)^{\frac{n-1}{2}}(b_0\omega^{n-1} - b_1\omega^{n-3} + b_2\omega^{n-5} - \cdots), \\ V(\omega) &= (-1)^{\frac{n-1}{2}}(a_0\omega^n - a_1\omega^{n-2} + a_2\omega^{n-4} - \cdots)。 \end{aligned}\right\} \tag{8''}$$

根據路斯方法應用柯許指標，就有❶：

$$\frac{1}{\pi}\Delta_{-\infty}^{+\infty}\arg f(i\omega) = \begin{cases} I_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{U(\omega)}{V(\omega)}, & \text{如果} \lim\limits_{\omega\to\infty}\dfrac{U(\omega)}{V(\omega)} = 0, \\ I_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{V(\omega)}{U(\omega)}, & \text{如果} \lim\limits_{\omega\to\infty}\dfrac{V(\omega)}{U(\omega)} = 0。 \end{cases} \tag{9}$$

等式(8′)與(8″)說明，當 n 爲偶數時在(9)中用下面的公式，而當 n 爲奇數時要用上面的等式。此後，由(7)，(8′)，(8″)與(9)我們容易得出，對於任何 n（偶數或奇數）❷都有

$$I_{-\infty}^{+\infty}\frac{b_0\omega^{n-1} - b_1\omega^{n-3} + \cdots}{a_0\omega^n - a_1\omega^{n-2} + \cdots} = n - 2k。 \tag{10}$$

2. 我們應用施斗姆定理（參考上節）來定出位於等式(10)的左節的指標。命

$$f_1(\omega) = a_0\omega^n - a_1\omega^{n-2} + \cdots, \quad f_2(\omega) = b_0\omega^{n-1} - b_1\omega^{n-3} + \cdots, \tag{11}$$

根據路斯，我們利用歐幾里得演段來構成廣義施斗姆列（參考上節）

$$f_1(\omega), f_2(\omega), f_3(\omega), \cdots, f_m(\omega)。 \tag{12}$$

首先討論正則情形：$m = n+1$。在這一情形，序列(12)中每一個函數的次數比其前一函數（假使有的話）的次數少1，而其最後一個函數 $f_m(x)$ 的次數爲零❸。

---

❶ 因爲 $\arg f(i\omega) = \arg \operatorname{ctg}\dfrac{U(\omega)}{V(\omega)} = \arg \operatorname{tg}\dfrac{V(\omega)}{U(\omega)}$。

❷ 記住，我們在多項式 $f(z)$ 沒有根落於虛軸上的假設下來推出公式(10)的。

❸ 在正則的情形，序列(12)是平常的（非廣義的）施斗姆列。

從歐幾里得演段[參考(6)]知：

$$f_3(\omega)=\frac{a_0}{b_0}f_2(\omega)-f_1(\omega)=c_0\omega^{n-2}-c_1\omega^{n-4}+c_2\omega^{n-6}-\cdots,$$

其中

$$c_0=a_1-\frac{a_0}{b_0}b_1=\frac{b_0a_1-a_0b_1}{b_0},\quad c_1=a_2-\frac{a_0}{b_0}b_2=$$

$$=\frac{b_0a_2-a_0b_2}{b_0},\quad\cdots \tag{13}$$

同樣的有

$$f_4(\omega)=\frac{b_0}{c_0}f_3(\omega)-f_2(\omega)=d_0\omega^{n-3}-d_1\omega^{n-5}+\cdots,$$

其中

$$d_0=b_1-\frac{b_0}{c_0}c_1=\frac{c_0b_1-b_0c_1}{c_0},\quad d_1=b_2-\frac{b_0}{c_0}c_2=$$

$$=\frac{c_0b_2-b_0c_2}{c_0},\quad\cdots \tag{13'}$$

類似的可以定出其餘多項式 $f_5(\omega),\cdots,f_{n+1}(\omega)$ 的係數。

此處每一個多項式

$$f_1(\omega),\ f_2(\omega),\ \cdots,\ f_{n+1}(\omega) \tag{14}$$

都是偶函數或奇函數，而且相隣的多項式永遠有相反的奇偶性。

建立**路斯表式**

$$\left.\begin{matrix} a_0, & a_1, & a_2, & \cdots,\\ b_0, & b_1, & b_2, & \cdots,\\ c_0, & c_1, & c_2, & \cdots,\\ d_0, & d_1, & d_2, & \cdots,\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}\right\} \tag{15}$$

在這個表式中，由於公式(13)，(13′)，知道每一行都可由其前兩行用次之規則來定出：

從上面一行的數，減去下面一行的對應數與這樣的數的乘積，使得所得出的第一個差數等於零。删去這個等於零的差數，我們得出了所

求的行。

正則情形顯然爲次之性質所確定，就是順次應用這個規則所得出的序列

$$b_0,\ c_0,\ d_0,\ \cdots$$

中沒有遇到一個等於零的數。

在圖 8 與 9 中我們指出當 n 爲偶數($n=6$)與 n 爲奇數($n=7$)時路斯表式的骨架。此處以點標出表式中的元素。

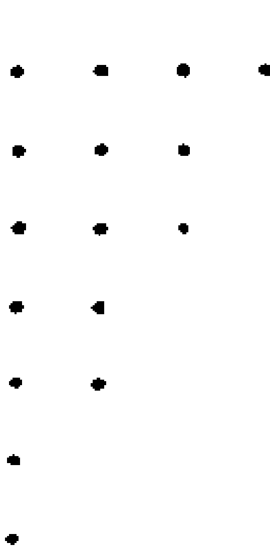


圖 8

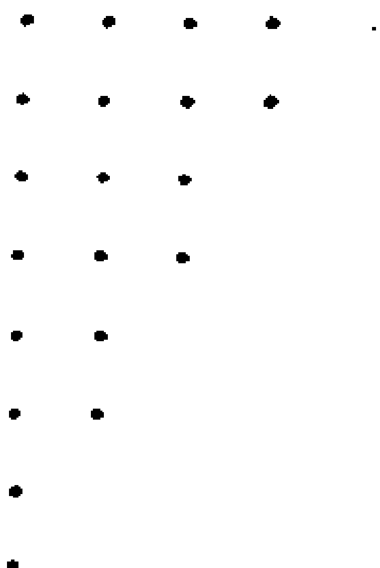


圖 9

在正則情形，多項式 $f_1(\omega)$ 與 $f_2(\omega)$ 的最大公因式 $f_{n+1}(\omega)=$ 常數 $\neq 0$。所以這些多項式說明，$U(\omega)$ 與 $V(\omega)$ [參考(8′)，(8″)與(11)]不能同時變爲零，亦即當 ω 爲一實數時，$f(i\omega)=U(\omega)+iV(\omega)\neq 0$。故在正則情形，我們有公式(10)。

對這個公式的左節在隔間$(-\infty,\ +\infty)$中應用施斗姆定理且在此時所用的序列爲(14)，我們根據(10)得出：

$$V(-\infty)-V(+\infty)=n-2k。\qquad(16)$$

在所予的情形❶

---

❶ 當 $\omega=+\infty$ 時，$f_k(\omega)$的符號與其首項係數相同，而當 $\omega=-\infty$ 時，與首項係數的符號相差一個因子$(-1)^{n-k+1}(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n+1)$。

$$V(+\infty)=V(a_0, b_0, c_0, d_0, \cdots),$$

而

$$V(-\infty)=n-V(+\infty)。 \tag{17}$$

從等式(16)與(17)我們得出：

$$k=V(a_0, b_0, c_0, d_0, \cdots)。 \tag{18}$$

我們證明了

定理 2(路斯). 實多項式 $f(z)$ 的位於右半平面($\mathrm{Re}\, z>0$)的根的個數等於路斯表式第一列的變號數。

3. 討論重要的特殊情形，就是 $f(z)$ 的全部根都有負實數部分("穩定性情形")。如果我們在此時對於多項式(11)構成廣義施斗姆列(4)，那末，因爲 $k=0$，公式(16)可以寫爲：

$$V(-\infty)-V(+\infty)=n。 \tag{19}$$

但是 $0\leqslant V(-\infty)\leqslant m-1\leqslant n$ 與 $0\leqslant V(+\infty)\leqslant m-1\leqslant n$。所以等式(19)衹有在 $m=n+1$ (正則情形!)時才有可能，此時 $V(+\infty)=0$，$V(-\infty)=m-1=n$。那末由公式(18)得出：

路斯判定 爲了使得實多項式 $f(z)$ 的全部根都有負實數部分，充分必要的，是在施行路斯演段時，所得出的路斯表式中第一列的全部元素都不等於零而且是同號的。

4. 在建立路斯定理時所根據的是公式(10)。以後我們需要推廣這個公式。公式(10)是在多項式 $f(z)$ 沒有根在虛軸上這個假設來得出的。我們來證明，在一般的情形，多項式 $f(z)=a_0z^n+b_0z^{n-1}+a_1z^{n-2}+ +\cdots (a_0\neq 0)$ 有 k 個根在右半平面中，s 個根在虛軸上時，公式(10)要換爲公式

$$I_{-\infty}^{+\infty}\frac{b_0\omega^{n-1}-b_1\omega^{n-3}+b_2\omega^{n-5}-\cdots}{a_0\omega^n-a_1\omega^{n-2}+a_2\omega^{n-4}-\cdots}=n-2k-s。 \tag{20}$$

事實上，

$$f(z)=d(z)f^*(z),$$

其中實多項式 $d(z)=z^s+\cdots$ 有 s 個根在虛軸上，而多項式 $f^*(z)$ 沒有這種樣子的根且其次數等於 $n^*=n-s$。

為了具體起見討論 s 為偶數的情形（s 為奇數的情形可以全相類似的來討論）。

設

$$f(i\omega)=U(\omega)+iV(\omega)=d(i\omega)[U^*(\omega)+iV^*(\omega)]。$$

因為在所討論的情形，$d(i\omega)$ 是 ω 的實多項式，所以

$$\frac{U(\omega)}{V(\omega)}=\frac{U^*(\omega)}{V^*(\omega)}。$$

因為在這一情形，n 與 n^* 有相同的奇偶性，所以，應用等式(8′)與(8″)及記法(11)，我們得出：

$$\frac{f_2(\omega)}{f_1(\omega)}=\frac{f_2^*(\omega)}{f_1^*(\omega)}。$$

應用公式(10)於多項式 $f^*(z)$，得出

$$I_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_2(\omega)}{f_1(\omega)}=I_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_2^*(\omega)}{f_1^*(\omega)}=n^*-2k=n-2k-s,$$

這就是所要證明的結果。

§4. 特殊情形．例子

1．在上節中我們所討論的是正則情形，在填出路斯表式時沒有一個數 $b_0,\ c_0,\ d_0,\cdots$ 能等於零。

現在轉移到特殊情形的討論，此時在數列 $b_0,\ c_0,\cdots$ 中我們遇到一個數 $h_0=0$。路斯演段到出現 h_0 的這一行後就要停止，因為要得出他下面的一行必須用 h_0 來做除數。

特殊情形有兩種可能的類型：

（1）在出現 h_0 的這一行中有不等於零的數。這說明在序列(12)的某一個地方，方次的降低要比 1 多。

（2）含有 h_0 的這個行中的數全部等於零。那末這一行是第 $m+1$ 行，其中 m 是廣義施斗姆列(4)的項數。在這一情形，序列(12)中函數的次數逐一降低一次，但是最後的函數 $f_m(\omega)$ 的次數卻大於零。在兩種情形中序列(12)的函數個數都是 $m<n+1$。

因為在兩種情形，平常的路斯演段都不能進行，路斯給予特殊的規則在情形（1），（2）中來繼續得出他的表式。

2. 在情形(1)根據路斯的方法換 $h_0=0$ 以"微小的"值 ε，他有確定的(但是任意的)符號，而後繼續完成其表式。此處，表式第一列中以後的元素都是 ε 的有理函數。由於 ε 的符號及其"微小性"可以確定這些元素的符號。如果在這些元素中有某一元素變成了對 ε 恆等於零，那末我們換這個元素為另外一個微小值 η 再來繼續進行我們的演段。

例

$$f(z)=z^4+z^3+2z^2+2z+1。$$

路斯表式(有微小參數 ε)

$$\begin{array}{lll} 1, & 2, & 1 \\ 1, & 2 & \\ \varepsilon, & 1 & \qquad k=V\left(1,1,\varepsilon,2-\dfrac{1}{\varepsilon},1\right)=2。 \\ 2-\dfrac{1}{\varepsilon} & & \\ 1 & & \end{array}$$

根據這個表式中元素經過修改的特殊方法得出次諸性質：

因為我們假設沒有第二種類型的特殊性，所以函數 $f_1(\omega)$ 與 $f_2(\omega)$ 是互質的。故知多項式 $f(z)$ 在虛軸上沒有根。

在路斯表式中所有元素都可經前兩行中元素有理表出，亦可經所予多項式的係數有理表出。但不難看出，從公式(13)，(13′)與以後諸行的類似公式，知道已予路斯表式中任何相隣兩個元素的值與其以前諸行的第一個元素值後，我們可以把位於前面兩行的數，亦即原始多項式的係數，經由這些所予值的有理整式全部表出。例如，所有 a, b 可以經

$$a_0,\ b_0,\ c_0,\ \cdots,\ h_0,\ h_1,\ h_2,\ \cdots,\ g_0,\ g_1,\ g_2,\ \cdots$$

的有理整函數來表出。

故換 $h_0=0$ 為 ε 後，我們實際上變動了原來的多項式。我們已經換 $f(z)$ 的表式為多項式 $F(z,\varepsilon)$ 的路斯表式，其中 $F(z,\varepsilon)$ 是 z 與 ε 的有理整函數且當 $\varepsilon=0$ 時變為 $f(z)$。因為多項式 $F(z,\varepsilon)$ 的根是參數 ε 的連續函數且當 $\varepsilon=0$ 時沒有根在虛軸上，所以對於模很小的 ε 值，在右半平面中根的個數 k 對於多項式 $F(z,\varepsilon)$ 與 $F(z,0)=f(z)$ 是相同的。

3. 轉移到第二種類型的特殊性的討論。設在路斯表式中

$$a_0\neq0,\ b_0\neq0,\ \cdots,\ e_0\neq0,\ h_0=0,\ h_1=0,\ h_2=0,\ \cdots$$

在這一情形，廣義施斗姆列(12)中最後一個多項式有次之形狀：

$$f_m(\omega)=e_0\omega^{n-m+1}-e_1\omega^{n-m-1}+\cdots$$

路斯建議換零式 $f_{m+1}(\omega)$ 為 $f'_m(\omega)$，亦即換寫零值 h_0, h_1, $\cdots$ 為對應係數

$$(n-m+1)e_0,\ (n-m-1)e_1,\ \cdots$$

而後繼續我們的演段。

根據這個規則得出次諸性質：

按照公式(20)

$$I_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_2(\omega)}{f_1(\omega)}=n-2k-s$$

「$f(z)$ 在虛軸上的 s 個根與多項式 $f_m(\omega)$ 的實根相同」。因此如果這些實根都是單重根，那末（參考本節，§ 2）

$$I_{-\infty}^{+\infty}\frac{f'_m(\omega)}{f_m(\omega)}=s,$$

故有

$$I_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_2(\omega)}{f_1(\omega)}+I_{-\infty}^{+\infty}\frac{f'_m(\omega)}{f_m(\omega)}=n-2k。$$

這個公式說明，對於路斯表式的不足部分可以用多項式 $f_m(\omega)$ 與 $f'_m(\omega)$ 的路斯表式來加以補足。用多項式 $f'_m(\omega)$ 的係數來代替路斯表式中零行的元素。

如果 $f_m(\omega)$ 的根不是全為單重的，那末以 $d(\omega)$ 記 $f_m(\omega)$ 與 $f'_m(\omega)$ 的最大公因式，以 $e(\omega)$ 記 $d(\omega)$ 與 $d'(\omega)$ 的最大公因式，諸如此類，我們將有：

$$I_{-\infty}^{+\infty}\frac{f'_m(\omega)}{f_m(\omega)}+I_{-\infty}^{+\infty}\frac{d'(\omega)}{d(\omega)}+I_{-\infty}^{+\infty}\frac{e'(\omega)}{e(\omega)}+\cdots=s。$$

這樣一來，所求的數 k 就能得出，如果補足路斯表式的欠缺部分以 $f_m(\omega)$ 與 $f'_m(\omega)$，$d(\omega)$ 與 $d'(\omega)$，$e(\omega)$ 與 $e'(\omega)$ 諸如此類的諸路斯表式，亦即用路斯規則來消去第二種類型的特殊性。

例

$$f(z)=z^{10}+z^9-z^8-2z^7+z^6+3z^5+z^4-2z^3-z^2+z+1。$$

表式

ω^{10}	1	−1	1	1	−1	1
ω^9	1	−2	3	−2	1	
ω^8	1	−2	3	−2	1	
ω^7 {	8	−12	12	−4		
	2	−3	3	−1		
ω^6	−1	3	−3	2		
ω^5 {	3	−3	3			
	1	−1	1			
ω^4 {	2	−2	2			
	1	−1	1			
ω^3 {	4	−2				
	2	−1				
ω^2	−1	2				
ω	1					
ω^0 {	2					
	1					

$$k=V(1,1,1,2,-1,1,1,2,-1,1,1)=4。$$

註　對於任一行可以乘所有的元素以同一的因子，祇要不變第一列中元素的符號。這一註釋在構造路斯表式時是很有用的。

4. 但是兩種路斯規則的應用不能對於所有的情形都給予定出數 k 的可能性。第一種規則（引進微小參數 $\varepsilon, \eta, \cdots$）祇有在多項式 $f(z)$ 沒有根在虛軸上才能應用。

如果多項式 $f(z)$ 有根在虛軸上，那末變動參數 ε 時，這些根的某幾個可能轉到右半平面上因而改變了數 k。

例

$$f(z)=z^6+z^5+3z^4+3z^3+3z^2+2z+1.$$

表式

ω^6	$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$	
ω^5	$1 \quad 3 \quad 2$	
ω^4	$\varepsilon \quad 1 \quad 1$	
ω^3	$3-\frac{1}{\varepsilon} \quad 2-\frac{1}{\varepsilon}$	$\left(u=2-\frac{1}{\varepsilon}-\frac{3-\frac{1}{\varepsilon}}{1-\frac{2\varepsilon-1}{3-\frac{1}{\varepsilon}}}=-\varepsilon+\cdots\right)$
ω^2	$1-\frac{2\varepsilon-1}{3-\frac{1}{\varepsilon}} \quad 1$	
ω	u	
ω^0	1	

$$V\left(1, 1, \varepsilon, 3-\frac{1}{\varepsilon}, 1, -\varepsilon, 1\right)=\begin{cases} 4 & \text{如其 } \varepsilon>0, \\ 2 & \text{如其 } \varepsilon<0. \end{cases}$$

何者等於數 k，仍然是一個問題。

在一般的情形，當 $f(z)$ 有根在虛軸上時，可以用次之方法來處理：

設 $f(z)=F_1(z)+F_2(z)$，其中

$$F_1(z)=a_0z^n+a_1z^{n-2}+\cdots,\quad F_2(z)=b_0z^{n-1}+b_1z^{n-3}+\cdots,$$

再行求出多項式 $F_1(z)$ 與 $F_2(z)$ 的最大公因式 $d(z)$。那末 $f(z)=d(z)f^*(z)$。

如果 $f(z)$ 有這樣的根 z，使得 $-z$ 仍為 $f(z)$ 的根時（所有虛軸上的根都有這種性質），那末由 $f(z)=0$ 與 $f(-z)=0$ 得出：$F_1(z)=0$ 與 $F_2(z)=0$，亦即 z 是 $d(z)$ 的根。所以多項式 $f^*(z)$ 沒有這樣的根 z 使得 $-z$ 亦是 $f^*(z)$ 的根。

此時

$$k=k_1+k_2,$$

其中 k_1 與 k_2 是多項式 $f^*(z)$ 與 $d(z)$ 的位於右半平面的根的個數；k_1 可以用路斯演算來定出，而 $k_2=\frac{q-s}{2}$，其中 q 為 $d(z)$ 的次數，s 為多項式 $d(i\omega)$ ❶ 的實根個數。

在後一例子中

$$d(z)=z^2+1,\quad f^*(z)=z^4+z^3+2z^2+2z+1.$$

---

❶ $d(i\omega)$ 是一個實多項式或在約去 i 後是一個實多項式。他的實根數可以用施斗姆定理來定出。

所以(參考本節的第一個例子)此處有 $k_2=0$, $k_1=2$,因而

$$k=2。$$

§5. 略普諾夫定理

從阿.蒙.略普諾夫的研究工作,在 1892 年刊出的,他的專門論文"關於運動穩定性的一般問題"中,推出這樣的定理❶,給出充分必要的條件,使得實矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 的特徵方程 $|\lambda E-A|=0$ 的全部根有負實數部分。因爲任何多項式 $f(\lambda)=a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n\ (a_0\neq 0)$ 都可以表爲特徵行列式 $|\lambda E-A|$ ❷的形狀,所以略普諾夫定理有其一般性,卽對於任何代數方程 $f(\lambda)=0$ 都能成立。

設已予實矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 與關於變數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 m 維齊次多項式

$$V(\underbrace{x, x, \cdots, x}_{m}) \quad [x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)]。$$

假設 x 是微分方程

$$\frac{dx}{dt}=Ax$$

的解,我們來求出函數 $V(x, x, \cdots, x)$ 對 t 的導式。此時

$$\frac{d}{dt}V(x, x, \cdots, x)=V(Ax, x, \cdots, x)+V(x, Ax, \cdots, x)+$$
$$+\cdots+V(x, x, \cdots, Ax)=W(x, x, \cdots, x), \qquad (21)$$

其中 $W(x, x, \cdots, x)$ 仍然是關於 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 m 維齊次多項式。

❶ 參考[19], §20。

❷ 對此祗要,例如,設

$$A=\left\|\begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{a_n}{a_0} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{a_{n-1}}{a_0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\frac{a_1}{a_0} \end{matrix}\right\|。$$

等式(21)定出一個線性運算子 $\widehat{A}$，化每一個 m 維齊次多項式 $V(x, x, \cdots, x)$ 爲同一維數 m 的某一齊次多項式 $W(x, x, \cdots, x)$：

$$W=\widehat{A}(V)。$$

我們祇討論 $m=2$ 的情形❶。在這一情形，$V(x, x)$ 與 $W(x,x)$ 是變數 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次型，他們中間有等式關係

$$\frac{d}{dt} V(x, x)=V(Ax, x)+V(x, Ax)=W(x, x), \tag{22}$$

所以❷

$$W=\widehat{A}(V)=A'V+VA。 \tag{23}$$

此處 $V=\|v_{ik}\|_1^n$, $W=\|w_{ik}\|_1^n$ 是由二次型 $V(x, x)$ 與 $W(x, x)$ 的係數所構成的對稱矩陣。在 n 級矩陣空間中，線性運算子 $\widehat{A}$ 爲已知矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 所完全確定。

如果 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是矩陣 A 的特徵數，那末運算子 $\widehat{A}$ 的每一個特徵數都可表爲 $\lambda_i+\lambda_k$ 的形狀 $(1\leqslant i, k\leqslant n)$❸。

因此，如果矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 沒有零特徵數與兩個相互反號的特徵數，那末運算子 $\widehat{A}$ 是滿秩的。在這一情形，矩陣 W 在(23)中爲矩陣 V 所唯一確定。

如果 V 是一個對稱矩陣，那末等式(23)所定出的矩陣 W 亦是對稱的。如果 $\widehat{A}(V)$ 是一個滿秩運算子，那末逆命題亦能成立：任何對稱矩陣 W 由於(23)對應於一個對稱矩陣 V。事實上，在這一情形，對(23)的兩節取轉置矩陣，我們得出，有如矩陣 V，矩陣 V' 亦適合等式(23)。由於解的唯一性，得出 $V=V'$。

這樣一來，如果矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 沒有零特徵數與兩個互相反號的特徵數，那末每一個二次型 $W(x, x)$ 對應於一個且祇對應於一個二次型 $V(x, x)$，他與 $V(x, x)$ 之間有等式(22)的關係。

---

❶ 阿.蒙.略普諾夫建立了他的關於任何正整數 m 的定理(參考下面的定理 3)。

❷ 因爲 $V(x, y)=x'Vy$。

❸ 參考第十四章，§ 4 的第四個足註。

現在我們來敍述略普諾夫定理。

定理 3（略普諾夫）．如果實矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 的全部特徵數都有負實數部分，那末任何恆負二次型 $W(x, x)$ 都對應於恆正二次型 $V(x, x)$，且由於方程

$$\frac{dx}{dt}=Ax \tag{24}$$

以等式

$$\frac{d}{dt}V(x, x)=W(x, x) \tag{25}$$

與 $V(x, x)$ 相結合。反之，如果對於某一恆負型 $W(x, x)$ 都有一個恆正型 $V(x, x)$ 存在，由於方程(24)以等式(25)與 $W(x, x)$ 相結合，那末矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 的所有特徵數都有負實數部分。

證明 1．設矩陣 A 的全部特徵數都有負實數部分。那末對於方程組 (24) 的任一解 $x=e^{At}x_0$ 都有：$\lim\limits_{t\to+\infty} x=0$ ❶。設二次型 $V(x, x)$ 與 $W(x, x)$ 間有公式(24)相結合而且 $W(x, x)<0 \ (x\neq 0)$ ❷。

我們假設，對於某一個 $x_0\neq 0$ 有

$$V_0=V(x_0, x_0)\leqslant 0 \text{。}$$

但是 $\frac{d}{dt}V(x, x)=W(x, x)<0 (x=e^{At}x_0)$。所以當 $t>0$ 時，值 $V(x, x)$ 是負的而且在 $t\to+\infty$ 時下降，這就與等式 $\lim\limits_{t\to+\infty}V(x, x)=\lim\limits_{x\to 0}V(x,x)=0$ 相矛盾。因此，在 $x\neq 0$ 時有 $V(x, x)>0$，亦即 $V(x, x)$ 是一個恆正二次型。

2．相反的，設在等式(25)中

$$W(x, x)<0, \ V(x, x)>0 \ (x\neq 0)\text{。}$$

由(25)得出：

---

❶ 參考第五章，§ 6。

❷ 型 $W(x, x)$ 是任意給的，型 $V(x, x)$ 爲條件(25)所唯一確定，因爲在所予的情形，矩陣 A 沒有零特徵數與兩個互相反號的特徵數。

$$V(x, x)=V(x_0, x_0)+\int_0^t W(x, x)dt \quad (x=e^{At}x_0)。 \tag{25'}$$

我們來證明，對於任意 $x_0\neq 0$，列 $x=e^{At}x_0$ 對於某些足夠大的值 $t>0$ 將任意接近於零。假使情形是相反的。那末有這樣的數 $\nu>0$ 存在，使得

$$W(x, x)<-\nu<0 \quad (x=e^{At}x_0, x_0\neq 0, t>0)。$$

但是(25′)有

$$V(x, x)<V(x_0, x_0)-\nu t$$

因而對於某一足夠大的值 t 有 $V(x, x)<0$，這同我們的條件發生矛盾。

從所證明的結果知道對於某些足夠大的值 t，值 $V(x,x)$ $(x=e^{At}x_0, x_0\neq 0)$ 將任意接近於零。但 $V(x, x)$ 當 $t>0$ 時是單調下降的，因為 $\frac{d}{dt}V(x, x)=W(x, x)<0$。所以有：$\lim\limits_{t\to+\infty} V(x, x)=0$。

因此推知對於任何 $x_0\neq 0$ 都有 $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{At}x_0=0$，亦卽 $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{At}=0$。這祇有當矩陣 A 的全部特徵數有負實數部分時才能成立（參考第五章，§ 6)。

定理已經完全證明。

在略普諾夫定理中可以取任何恆負型作為型 $W(x, x)$，特別的可以取型 $-\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$。在這一情形我們的定理容許次之矩陣說法：

定理 3′. 為了使得實矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 的全部特徵數都有負實數部分，充分必要的，是矩陣方程

$$A'V+VA=-E \tag{26}$$

有一個解 V，他是某一個恆正二次型 $V(x, x)>0$ 的係數矩陣。

從所證明的定理，推得對於用其線性近似式來定出非線性組的穩定性的略普諾夫著名判定[1]。

假設要證明非線性微分方程組（1)（本章，§ 1)的零解的漸近穩定

[1] 參考[19]，§ 26; [33]，113 頁及其以後; [20]，66 頁及其以後。

性，如果方程右節線性項的係數 $a_{ik}(i, k=1, 2, \cdots, n)$ 所構成的矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 祇有有負實數部分的特徵數。那末用矩陣方程 (26) 定出恆正型 $V(x,x)$ 而假定暫時當作完全任意的，其中 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是所予方程組(1)的解，我們就有：

$$\frac{d}{dt}V(x, x)=-\sum_{i=1}^{n}x_i^2+R(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

其中 $R(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是含有 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的三次與更高次項的級數。故在點(0, 0, …, 0)的某一足夠小的隣近，對於任何 $x\neq0$，同時有：

$$V(x, x)>0,\ \frac{d}{dt}V(x, x)<0。$$

根據略普諾夫廣義穩定性判定❶，這就說明微分方程組的零解的漸近穩定性。

如果從矩陣方程 (26) 把矩陣 V 的元素經矩陣 A 的元素來表出且將得出的表示式代入不等式

$$v_{11}>0,\ \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{vmatrix}>0,\ \cdots,\ \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{vmatrix}>0$$

中，那末我們得出了，使矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 的特徵數都有負實數部分時，矩陣 A 的元素所應當適合的不等式。但是這些不等式的非常簡單的形狀可以從路斯-霍維茨判定來得出，這將在次節中述及。

註　略普諾夫定理 3 或 3′ 可以直接推廣到任意複矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 的情形。在此時要換二次型 $V(x, x)$ 與 $W(x, x)$ 為安密達型

$$V(x, x)=\sum_{i,k=1}^{n}v_{ik}\bar{x}_i x_k,\quad W(x, x)=\sum_{i,k=1}^{n}w_{ik}\bar{x}_i x_k。$$

對應的矩陣方程(26)要換為方程

$$A^*V+VA=-E\quad (A^*=\bar{A}')。$$

§6. 路斯-霍維茨定理

❶ 參考[19]，§16；[33]，19—21 頁與 31—33 頁；[20]，32—34 頁。

在上節中已經敍述了路斯的非常簡單的方法，來定出實多項式在右半平面中根的個數 k，此時多項式的係數是已知的具體的數。如果多項式的係數與參數有關且要定出對於參數的什麼值可以使得數 k 有這個值或那個值，特別是有值 0（穩定性範圍！）❶，那末需要經由已予多項式的係數所表出的值 $c_0, d_0, \cdots$ 的具體表示式。解決這個問題後，我們就得到定出數 k 的方法，特別是，為霍維茨 [129] 所建立的這種穩定性判定。

仍舊討論多項式

$$f(z)=a_0z^n+b_0z^{n-1}+a_1z^{n-2}+b_1z^{n-3}+\cdots \quad (a_0\neq 0)。$$

稱次之 n 級方陣為霍維茨矩陣

$$H=\begin{Vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-2} \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ 0 & 0 & b_0 & \cdots & b_{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{Vmatrix} \quad \begin{pmatrix} \text{當 } k>\left[\frac{n}{2}\right] \text{ 時 } a_k=0, \\ \text{當 } k>\left[\frac{n-1}{2}\right] \text{ 時 } b_k=0 \end{pmatrix}。 \tag{27}$$

變換這個矩陣，從第二，第四，⋯ 行對應的減去第一，第三，⋯ 行與 $\frac{a_0}{b_0}$ 的乘積❷。我們得出矩陣

$$\begin{Vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} \\ 0 & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-2} \\ 0 & 0 & c_0 & \cdots & c_{n-3} \\ 0 & 0 & b_0 & \cdots & b_{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{Vmatrix}。$$

❶ 就是對於新的機械的或電力的調整系統的設計所需要的。

❷ 首先討論正則情形，此時 $b_0\neq 0$，$c_0\neq 0$，$d_0\neq 0$，⋯

此處 c_0, c_1, … 就是路斯表式的第三行再補上一些零$\left(c_k=0\right.$ 如其 $\left.k>\left[\frac{n}{2}\right]-1\right)$。

再行變換所得出的矩陣,從第三,第五,… 行對應的減去第二,第四,… 行與 $\frac{b_0}{c_0}$ 的乘積,得出:

$$\left\|\begin{matrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\ 0 & c_0 & c_1 & c_2 & \cdots \\ 0 & 0 & d_0 & d_1 & \cdots \\ 0 & 0 & c_0 & c_1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & d_0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & c_0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}\right\|。$$

繼續如此進行,我們最後化爲一個 n 級三角形矩陣

$$R=\left\|\begin{matrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots \\ 0 & c_0 & c_1 & \cdots \\ 0 & 0 & d_0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}\right\|, \tag{28}$$

稱爲路斯矩陣。他可以從路斯表式這樣的來得出[參考(15)]:(1)删去第一行,(2)把諸行向右移動使得他們的第一個元素都在主對角線上,(3)補上零元素使其成爲一個 n 級方陣。

定義 2. 兩個矩陣 $A=\|a_{ik}\|_1^n$ 與 $B=\|b_{ik}\|_1^n$ 稱爲等價的,充分必要的,是對於任何 $p\leqslant n$,在這些矩陣的前 p 個列中,相對應的 p 級子式彼此相等:

$$A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & p \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_p\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & p \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_p\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}i_1,i_2,\cdots,i_p=1,2,\cdots,n, \\ p=1,2,\cdots,n\end{pmatrix}。$$

因爲從矩陣的任何一行減去其前面任何一行與任何数的乘積,在前 p 個行中的 p 級子式 ($p=1, 2, \cdots, n$) 的值並無改變,故由定義 2,

霍維茨矩陣與路斯矩陣，H 與 R，是等價的：

$$H\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & p\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_p\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & p\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i_1, i_2, \cdots, i_p=1, 2, \cdots, n,\\ p=1, 2, \cdots, n\end{pmatrix}。\tag{29}$$

矩陣 H 與 R 的等價性容許把矩陣 R 的全部元素，亦即路斯表式的元素，經霍維茨矩陣的子式來表出，因而可以經所予多項式的係數來表出。事實上，在(29)中順次給予 p 以值 1,2,3,…，我們得出：

$$\left.\begin{aligned}&H\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=b_0, \quad H\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=b_1, \quad H\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=b_2, \cdots,\\ &H\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}=b_0c_0, \quad H\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 3\end{pmatrix}=b_0c_1, \quad H\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 4\end{pmatrix}=b_0c_2, \cdots,\\ &H\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}=b_0c_0d_0, \quad H\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 4\end{pmatrix}=b_0c_0d_1, \quad H\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 5\end{pmatrix}=b_0c_0d_2, \cdots,\end{aligned}\right\}\tag{30}$$

諸如此類。

故可求得對於路斯表式中諸元素的次諸表示式：

$$\left.\begin{aligned}&b_0=H\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad b_1=H\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \quad b_2=H\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \cdots,\\ &c_0=\frac{H\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}}{H\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}, \quad c_1=\frac{H\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 3\end{pmatrix}}{H\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}, \quad c_2=\frac{H\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 4\end{pmatrix}}{H\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}, \cdots,\\ &d_0=\frac{H\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}}{H\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}}, d_1=\frac{H\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 4\end{pmatrix}}{H\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}}, d_2=\frac{H\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 5\end{pmatrix}}{H\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}}, \cdots,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\tag{31}$$

矩陣 H 中順序的主子式常稱爲霍維茨行列式。我們記之爲：

$$\Delta_1=H\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=b_0, \quad \Delta_2=H\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}b_0 & b_1\\a_0 & a_1\end{vmatrix}, \quad \cdots$$

$$\cdots, \quad \Delta_n=H\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1}\\a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1}\\0 & b_0 & \cdots & b_{n-2}\\0 & a_0 & \cdots & a_{n-2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{vmatrix}。\tag{32}$$

註 1. 根據公式(30)，

$$\Delta_1=b_0,\quad \Delta_2=b_0c_0,\quad \Delta_3=b_0c_0d_0,\quad \cdots \text{❶} \tag{33}$$

從 $\Delta_1\neq 0, \cdots, \Delta_p\neq 0$ 知道數 $b_0, c_0, \cdots$ 中前 p 個數不爲零，反之亦然；在這一情形定出了路斯表式中從第三行開始的相隣的 p 個行，而且對於他們有公式(31)。

註 2. 正則情形（所有 $b_0, c_0, \cdots$ 都有意義且不等於零）爲次諸不等式所確定

$$\Delta_1\neq 0,\quad \Delta_2\neq 0,\quad \cdots,\quad \Delta_n\neq 0。$$

註 3. 用公式(31)做路斯表式中元素的定義比用路斯演段來得出的定義更加普遍。例如，如果 $b_0=H\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=0$，那末路斯演段，除開由所予多項式的係數所構成的前兩行外，不能給予任何東西。但是，如果 $\Delta_1=0$ 而其餘的行列式 $\Delta_2, \Delta_3, \cdots$ 不等於零，我們利用公式(31)，跳過 c 的這一行，可以定出路斯表式中以後所有的行。

根據公式(33)，

$$b_0=\Delta_1,\quad c_0=\frac{\Delta_2}{\Delta_1},\quad d_0=\frac{\Delta_3}{\Delta_2},\quad \cdots,$$

故有

$$V(a_0, b_0, c_0, \cdots)=V\left(a_0, \Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \cdots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right)=$$
$$=V(a_0, \Delta_1, \Delta_3, \cdots)+V(1, \Delta_2, \Delta_4, \cdots)。$$

因此，路斯定理可以述爲：

定理 4（路斯-霍維茨）. 實多項式 $f(z)=a_0z^n+\cdots$ 的位於右半平面的根的個數 k 爲公式

$$k=V\left(a_0, \Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \cdots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right) \tag{34}$$

或（爲同樣的公式）

---

❶ 如果多項式 $f(z)$ 的係數都是已知數值，那末公式(33)給出霍維茨行列式的最簡單的計算方法，就是化爲構成路斯表式的計算。

$$k=V(a_0,\ \Delta_1,\ \Delta_3,\ \cdots)+V(1,\ \Delta_2,\ \Delta_4,\ \cdots) \tag{34'}$$

所決定。

註　所述的路斯–霍維茨定理是假定所討論的爲正則情形

$$\Delta_1\neq 0,\ \ \Delta_2\neq 0,\ \ \cdots,\ \ \Delta_n\neq 0。$$

在次節中我們來指出如何應用這個定理於有某些霍維茨行列式 Δ_i 等於零的特殊情形。

現在我們來討論這樣的情形，多項式 $f(z)$ 的全部根都在左半平面中 $(\mathrm{Re}\,z<0)$。在這一情形，根據路斯判定，所有的 $a_0,\ b_0,\ c_0,\ d_0,\ \cdots$ 應當都不等於零而且是同號的。因爲這是一種正則情形，所以當 $k=0$ 時可從(34)得出。

路斯–霍維茨判定　爲了使得實多項式 $f(z)=a_0z^n+\cdots(a_0\neq 0)$ 的根都有負實數部分，充分必要的，是次諸不等式都能成立

$$a_0\Delta_1>0,\ \Delta_2>0,\ a_0\Delta_3>0,\ \Delta_4>0,\ \cdots,\ \left.\begin{array}{l}a_0\Delta_n>0(n\text{ 爲奇數}),\\ \Delta_n>0(n\text{ 爲偶數})。\end{array}\right\} \tag{35}$$

註　如果 $a_0>0$，那末這些條件可以寫爲：

$$\Delta_1>0,\ \ \Delta_2>0,\ \ \cdots,\ \ \Delta_n>0。 \tag{36}$$

如果取平常對於多項式的係數記法，$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$，那末當 $a_0>0$ 時路斯–霍維茨條件可以寫爲次之行列式不等式：

$$a_1>0,\ \begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ a_0 & a_2\end{vmatrix}>0,\ \begin{vmatrix}a_1 & a_3 & a_5\\ a_0 & a_2 & a_4\\ 0 & a_1 & a_3\end{vmatrix}>0,\ \cdots,\ \begin{vmatrix}a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0\\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0\\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0\\ 0 & a_0 & a_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_n\end{vmatrix}>0。 \tag{36'}$$

係數適合條件(35)的實多項式 $f(z)=a_0z^n+\cdots$，亦即全部根都有負實數部分的實多項式，平常稱爲霍維茨多項式。

最後我們注意路斯表式的一個顯著的性質。

設 $f_0, f_1, \cdots$ 與 $g_0, g_1, \cdots$ 為表式中第 $m+1$ 與第 $m+2$ 行$\left(f_0=\frac{\Delta_m}{\Delta_{m-1}},\ g_0=\frac{\Delta_{m+1}}{\Delta_m}\right)$。因為這兩行與其以後諸行獨立的構成一個路斯表式，所以(在原先的表式中)第 $m+p+1$ 行的元素，可以經第 $m+1$ 行與第 $m+2$ 行的元素 $f_0, f_1, \cdots$ 與 $g_0, g_1, \cdots$ 來表出——所用的公式與用前兩行的元素 $a_0, a_1, \cdots$ 與 $b_0, b_1, \cdots$ 來表出第 $p+1$ 行的元素的公式相同，亦即，設

$$\widetilde{H}=\begin{Vmatrix} g_0 & g_1 & g_2 & \cdots \\ f_0 & f_1 & f_2 & \cdots \\ 0 & g_0 & g_1 & \cdots \\ 0 & f_0 & f_1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{Vmatrix},$$

我們就有

$$\frac{H\begin{pmatrix}1\cdots m+p-1 & m+p \\ 1\cdots m+p-1 & m+p+k-1\end{pmatrix}}{H\begin{pmatrix}1\cdots m+p-1 \\ 1\cdots m+p-1\end{pmatrix}}=\frac{\widetilde{H}\begin{pmatrix}1\cdots p-1 & p \\ 1\cdots p-1 & p+k-1\end{pmatrix}}{\widetilde{H}\begin{pmatrix}1\cdots p-1 \\ 1\cdots p-1\end{pmatrix}}。\tag{37}$$

霍維茨行列式 Δ_{m+p} 等於序列 $b_0, c_0, \cdots$ 中前 $m+p$ 個數的乘積：

$$\Delta_{m+p}=b_0c_0\cdots f_0g_0\cdots l_0。$$

但是

$$\Delta_m=b_0c_0\cdots f_0,\quad \widetilde{\Delta}_p=g_0\cdots l_0。$$

所以得出次之重要關係

$$\Delta_{m+p}=\Delta_m\widetilde{\Delta}_p❶。\tag{38}$$

公式 (38) 常能成立，祗要定出數 $f_0, f_1, \cdots$ 與 $g_0, g_1, \cdots$，亦即適合條件 $\Delta_{m-1}\neq 0$，$\Delta_m\neq 0$。

公式(37)是有意義的，如果在條件 $\Delta_{m-1}\neq 0$，$\Delta_m\neq 0$ 之外再補充一個條件 $\Delta_{m+p-1}\neq 0$。從這個條件可以得出，位於等式(37)右consider的分數的分母不等於零：$\widetilde{\Delta}_{p-1}\neq 0$。

§7. 奧朗陀公式

在討論霍維茨行列式中有些為零的情形時，我們需要次之奧朗陀公式[137]，經多項式 $f(z)$ 的首項係數 a_0 與根 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 來表出行列式 Δ_{n-1}❷：

---

❶ 此處 $\widetilde{\Delta}_p$ 是位於矩陣 $\widetilde{H}$ 左上角的 p 級子式。

❷ 此處多項式 $f(z)$ 的係數可能是任意的複數。

$$\Delta_{n-1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0^{n-1}\prod_{i<k}^{1\ \ n}(z_i+z_k)。\tag{39}$$

當 $n=2$ 時這個公式化為二次方程 $a_0z^2+b_0z+a_1=0$ 中對於係數 b_0 的已知公式：

$$\Delta_1=b_0=-a_0(z_1+z_2)。$$

現在假設對於 n 次多項式 $f(z)=a_0z^n+b_0z^{n-1}+\cdots$ 公式(39)是眞確的，我們來證明他對於次之 $n+1$ 次多項式亦能成立：

$$F(z)=(z+h)f(z)=a_0z^{n+1}+(b_0+ha_0)z^n+$$
$$+(a_1+hb_0)z^{n-1}+\cdots\quad(h=-z_{n+1})。$$

為了這一目的我們建立 $n+1$ 級輔助行列式

$$D=\begin{vmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & h^n \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & -h^{n-1} \\ 0 & b_0 & \cdots & b_{n-2} & h^{n-2} \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{n-2} & -h^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & (-1)^n \end{vmatrix}\quad\left(\begin{array}{l}\text{當 } k>\left[\frac{n}{2}\right] \text{ 時 } a_k=0,\\ \\ \text{當 } k>\left[\frac{n-1}{2}\right] \text{ 時 } b_k=0\end{array}\right)。$$

乘 D 的第一行以 a_0 而後對他加上第二行與 $-b_0$ 的乘積，第三行與 a_1 的乘積，第四行與 $-b_1$ 的乘積，諸如此類。那末第一行的元素，除最後一個外，都變為零，而最後的元素等於 $f(h)$。故易得出：

$$D=(-1)^n\Delta_{n-1}f(h)。$$

另一方面，（除最後一行外）加到行列式 D 的每一行以其下面的一行與 h 的乘積，我們得出多項式 $F(z)$ 的 n 級霍維茨行列式 Δ_n^* 與 $(-1)^n$ 的乘積：

$$D=(-1)^n\begin{vmatrix} b_0+ha_0 & b_1+ha_1 & \cdots \\ a_0 & a_1+hb_0 & \cdots \\ 0 & b_0+ha_0 & \cdots \\ 0 & a_0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}=(-1)^n\Delta_n^*。$$

這樣一來，

$$\Delta_n^* = \Delta_{n-1} f(h) = a_0 \Delta_{n-1} \prod_{i=1}^{n} (h - z_i)。$$

換 Δ_{n-1} 以其表示式(39)且取 $h = -z_{n+1}$，我們得出：

$$\Delta_n^* = (-1)^{\frac{(n-1)n}{2}} a_0^n \prod_{i<k}^{1\cdots n} (z_i + z_k)。$$

這樣一來，我們用數學歸納法建立了奥朗陀公式對於任意次多項式的正確性。

從奥朗陀公式知道 $\Delta_{n-1}=0$ 的充分必要條件是多項式 $f(z)$ 有兩個根其和爲零❶。

因爲 $\Delta_n = c\Delta_{n-1}$，其中 c 爲多項式 $f(z)$ 的常數項 ($c=(-1)^n a_0 z_1 z_2 \cdots z_n$)，所以從(39)得出：

$$\Delta_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} a_0^n z_1 z_2 \cdots z_n \prod_{i<k}^{1\cdots n} (z_i + z_k)。\tag{40}$$

這個公式證明了，Δ_n 變爲零的充分必要條件是，$f(z)$ 有這樣的根 z 存在，使得 $-z$ 亦爲他的一個根。

§8. 路斯-霍維茨定理中特殊情形

在討論霍維茨行列式中有些爲零的特殊情形時，我們可以假設 $\Delta_n \neq 0$ (因而 $\Delta_{n-1} \neq 0$)。

事實上，如果 $\Delta_n = 0$，那末在上節末尾已經說明，實多項式 $f(z)$ 有這樣的根 z' 存在使得 $-z'$ 亦爲 $f(z)$ 的一個根。如果設 $f(z) = F_1(z) + F_2(z)$，其中

$$F_1(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-2} + \cdots,\quad F_2(z) = b_0 z^{n-1} + b_1 z^{n-3} + \cdots,$$

那末由等式 $f(z') = f(-z') = 0$ 可以推得，$F_1(z') = F_2(z') = 0$。故 z' 爲多項式 $F_1(z)$ 與 $F_2(z)$ 的最大公因式 $d(z)$ 的根。命 $f(z) = d(z) f^*(z)$，我們把 $f(z)$ 的路斯-霍維茨問題化爲多項式 $f^*(z)$ 的路斯-霍維茨問題，此時最後一個霍維茨行列式不等於零。

1. 首先討論這樣的情形：

$$\Delta_1 = \cdots = \Delta_p = 0,\ \Delta_{p+1} \neq 0,\ \cdots,\ \Delta_n \neq 0。\tag{41}$$

從 $\Delta_1 = 0$ 得出：$b_0 = 0$；從 $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & b_1 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = -a_0 b_1 = 0$ 推知：$b_1 = 0$。此時自動的有

---

❶ 特别的，當 $f(z)$ 至少有一對共軛純虛根或有多重零根時，$\Delta_{n-1} = 0$。

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & b_1 \end{vmatrix}=-a_0b_1^2=0\text{。}$$

從

$$\Delta_4=\begin{vmatrix} 0 & 0 & b_2 & b_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \end{vmatrix}=-a_0^2b_2^2=0$$

得出：$b_2=0$，而此時 $\Delta_5=-a_0^3b_2^2=0$，依此類推。

上面的討論證明了，在（41）中 p 常為一個奇數：$p=2h-1$。此時 $b_0=b_1=b_2=\cdots=b_{h-1}=0$，$b_h\neq0$ 而且❶

$$\Delta_{p+1}=\Delta_{2h}=(-1)^{\frac{h(h+1)}{2}}a_0^hb_h^h,\quad \Delta_{p+2}=\Delta_{2h+1}=(-1)^{\frac{h(h+1)}{2}}a_0^hb_h^{h+1}=\Delta_{p+1}b_h\text{。}\tag{42}$$

我們把係數 $b_0, b_1, \cdots, b_{h-1}$ 稍加變動，使得對於變動後的新值 $b_0^*, b_1^*, \cdots, b_{h-1}^*$，所有霍維茨行列式 $\Delta_1^*, \Delta_2^*, \cdots, \Delta_n^*$ 都不等於零而且使得此時行列式 $\Delta_{p+1}^*, \cdots, \Delta_n^*$ 保持他們先前的符號。我們可以取 $b_0^*, b_1^*, \cdots, b_{h-1}^*$ 為有不同"微小"等級的"微小"值，就是我們假設，每一個 b_{j-1}^* 的絕對值"顯著的"小於 b_j^*（$j=1, 2, \cdots, h$；$b_h^*=b_h$）。這就說明在計算關於 b_i^* 的代數整式的符號時，與那些祗含足數 $\geqslant j$ 的諸 b_i^* 的項相比較，我們可以略去有足數 $<j$ 的 b_i^* 出現的諸項。此後我們容易求出 $\Delta_1^*, \Delta_2^*, \cdots, \Delta_p^*(p=2h-1)$ 的"定號"項❷：

$$\Delta_1^*=b_0^*,\ \Delta_2^*=-a_0b_1^*+\cdots,\ \Delta_3^*=-a_0b_1^{*2}+\cdots,\ \Delta_4^*=-a_0^2b_2^{*2}+\cdots,$$
$$\Delta_5^*=-a_0^2b_2^{*3}+\cdots,\ \Delta_6^*=a_0^3b_3^{*3}+\cdots$$

諸如此類；一般的有

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_{2j}^*=(-1)^{\frac{j(j+1)}{2}}a_0^jb_j^{*j}+\cdots && (j=1, 2, \cdots, h-1), \\ &\Delta_{2j+1}^*=(-1)^{\frac{j(j+1)}{2}}a_0^jb_j^{*j+1}+\cdots && (j=0, 1, \cdots, h-1)\text{。}\end{aligned}\right\}\tag{43}$$

我們選取 $b_0^*, b_1^*, \cdots, b_{2h-1}^*$ 為正數；那末 Δ_i^* 的符號為次式所確定：

$$\operatorname{sign}\Delta_i^*=(-1)^{\frac{j(j+1)}{2}}\operatorname{sign}a_0^j\quad \left(j=\left[\frac{i}{2}\right],\ i=1, 2, \cdots, p\right)\text{。}\tag{44}$$

對於多項式係數的微小變動，數 k 並無改變，因為多項式 $f(z)$ 沒有根在虛軸上。故從（44）出發，我們由公式

$$k=V\left(a_0, \Delta_1^*, \frac{\Delta_2^*}{\Delta_1^*}, \cdots, \frac{\Delta_{p+1}}{\Delta_p^*}, \frac{\Delta_{p+2}}{\Delta_{p+1}}\right)+V\left(\frac{\Delta_{p+2}}{\Delta_{p+1}}, \cdots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right)\tag{45}$$

---

❶ 從（42）知道，當 h 為奇數時，$\operatorname{sign}\Delta_{p+2}=(-1)^{\frac{h+1}{2}}\operatorname{sign}a_0$，而當 h 為偶數時，$\operatorname{sign}\Delta_{p+1}=(-1)^{\frac{h}{2}}$。

❷ 主要的是類似於前面對於 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_p$ 的項的計算。

定出位於右半平面的根的個數。根據公式(42)與(44)，用初等計算可以證明，

$$V\left(a_0,\ \Delta_1^*,\ \frac{\Delta_2^*}{\Delta_1^*},\ \cdots,\ \frac{\Delta_{p+1}}{\Delta_p^*},\ \frac{\Delta_{p+2}}{\Delta_{p+1}}\right)=h+\frac{1-(-1)^h\varepsilon}{2}\left(\begin{array}{c}p=2h-1,\\ \varepsilon=\operatorname{sign}\left(a_0,\ \dfrac{\Delta_{p+2}}{\Delta_{p+1}}\right)\end{array}\right)。\tag{46}$$

我們注意，位於等式(46)左節的值與變動係數的方法無關且對任意微小的變動保持相同的值。這可從公式(45)得出，因爲對於係數的微小變動，k 的值並無改變。

2．現在設當 $s>0$ 時

$$\Delta_{s+1}=\cdots=\Delta_{s+p}=0,\tag{47}$$

而其餘霍維茨行列式都不等於零。

以 $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \cdots$ 與 $\tilde{b}_0, \tilde{b}_1, \cdots$ 記路斯表式中第 $s+1$ 行與第 $s+2$ 行的元素 $\left(\tilde{a}_0=\dfrac{\Delta_s}{\Delta_{s-1}},\right.$ $\left.\tilde{b}_0=\dfrac{\Delta_{s+1}}{\Delta_s}\right)$。以 $\tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2, \cdots, \tilde{\Delta}_{n-s}$ 記其對應的霍維茨行列式。由公式(38)(本章§6)

$$\Delta_{s+1}=\Delta_s\tilde{\Delta}_1,\ \cdots,\ \Delta_{s+p}=\Delta_s\tilde{\Delta}_p,\ \Delta_{s+p+1}=\Delta_s\tilde{\Delta}_{p+1},\ \Delta_{s+p+2}=\Delta_s\tilde{\Delta}_{p+2}。\tag{48}$$

故由第一段知：p 爲奇數，亦卽 $p=2h-1$ ❶。

變動 $f(z)$ 的係數，使得所有的霍維茨行列式都不等於零，而且使得那些在變動前不爲零的行列式經變動後保持其符號不變。那末從(48)出發，對行列式 $\tilde{\Delta}$ 應用公式(46)，我們得出：

$$V\left(\frac{\Delta_s}{\Delta_{s-1}},\ \frac{\Delta_{s+1}^*}{\Delta_s},\ \cdots,\ \frac{\Delta_{s+p+1}}{\Delta_{s+p}^*},\ \frac{\Delta_{s+p+2}}{\Delta_{s+p+1}}\right)=$$

$$=h+\frac{1-(-1)^h\varepsilon}{2}\left(\begin{array}{c}p=2h-1,\\ \varepsilon=\operatorname{sign}\left(\dfrac{\Delta_s}{\Delta_{s-1}}\ \dfrac{\Delta_{s+p+2}}{\Delta_{s+p+1}}\right)\end{array}\right),\tag{49}$$

$$k=V\left(a_0,\ \Delta_1,\ \cdots,\ \frac{\Delta_s}{\Delta_{s-1}}\right)+V\left(\frac{\Delta_s}{\Delta_{s-1}},\ \frac{\Delta_{s+1}^*}{\Delta_s},\ \cdots,\ \frac{\Delta_{s+p+2}}{\Delta_{s+p+1}}\right)+V\left(\frac{\Delta_{s+p+2}}{\Delta_{s+p+1}},\ \cdots,\ \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right)。$$

位於(49)左節的值仍然與變動方法無關。

3．現在假設，在霍維茨行列式中有 ν 個零行列式羣。我們來證明，對於每一個這樣的羣(47)，位於公式(49)左節的值與變動方法無關而且是爲這一個公式所確定的❷。當 $\nu=1$ 時，我們已經證明了這個論斷。我們假設對於 $\nu-1$ 個羣我們的論斷是眞確的，而來證明他對於 ν 個羣亦是眞確的。設(47)是 ν 個羣中的第二個；有如第二段中所做過的一樣定出行列式 $\tilde{\Delta}_1, \tilde{\Delta}_2, \cdots$；那末在變動後有：

$$V\left(\frac{\Delta_s^*}{\Delta_{s-1}^*},\ \cdots,\ \frac{\Delta_n^*}{\Delta_{n-1}^*}\right)=V\left(\tilde{a}_0^*,\ \tilde{\Delta}_1^*,\ \cdots,\ \frac{\tilde{\Delta}_{n-s}^*}{\tilde{\Delta}_{n-s-1}^*}\right)。$$

---

❶ 對應於本節的第一個足註，當 $p=2h-1$ 而 h 爲奇數時，$\operatorname{sign}\Delta_{s+p+2}=(-1)^{\frac{h+1}{2}}\operatorname{sign}\Delta_{s-1}$，而當 h 爲偶數時，$\operatorname{sign}\Delta_{s+p+1}=(-1)^{\frac{h}{2}}\operatorname{sign}\Delta_s$。

❷ 從(47)與不等式 $\Delta_s\neq0$，$\Delta_{s+p+1}\neq0$，由於(48)與(42)推得：$\Delta_{s-1}\neq0$，$\Delta_{s+p+2}\neq0$。

因爲在這個等式的右節祇有 $\nu-1$ 個零行列式羣,所以我們的論斷對於等式的右節是成立的,因而對於等式的左節亦是眞確的。換句話說,公式(49)對於第二個,…,第 ν 個霍維茨零行列式羣是眞確的。但此時由公式

$$k=V\left(a_0^*,\ \Delta_1^*,\ \frac{\Delta_2^*}{\Delta_1^*},\ \cdots,\ \frac{\Delta_n^*}{\Delta_{n-1}^*}\right),$$

知道值 $V\left(\frac{\Delta_s}{\Delta_{s-1}},\ \frac{\Delta_{s+1}^*}{\Delta_s},\ \frac{\Delta_{s+2}^*}{\Delta_{s+1}^*},\ \cdots,\ \frac{\Delta_{s+p+2}}{\Delta_{s+p+1}}\right)$ 與變動方法無關,且對第一個零行列式羣亦是如此,所以對於這一個羣公式(49)亦能成立。

這樣一來,我們證明了次之定理:

定理 5. 如果某些霍維茨行列式等於零,但 $\Delta_n\neq0$,那末實多項式 $f(z)$ 在右半平面中根的個數爲次式所定出

$$k=V\left(a_0,\ \Delta_1,\ \frac{\Delta_2}{\Delta_1},\ \cdots,\ \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}\right),$$

在計算 V 的值時,對於每一個含 p 個相繼等於零的行列式(p 常爲奇數!)

$$(\Delta_s\neq0)\ \Delta_{s+1}=\cdots=\Delta_{s+p}=0\quad(\Delta_{s+p+1}\neq0)$$

我們取:

$$V\left(\frac{\Delta_s}{\Delta_{s-1}},\ \frac{\Delta_{s+1}}{\Delta_s},\ \cdots,\ \frac{\Delta_{s+p+2}}{\Delta_{s+p+1}}\right)=h+\frac{1-(-1)^h\varepsilon}{2},\tag{50}$$

其中

$$p=2h-1,\quad \varepsilon=\operatorname{sign}\left(\frac{\Delta_s}{\Delta_{s-1}}\ \frac{\Delta_{s+p+2}}{\Delta_{s+p+1}}\right)\text{[1]}。$$

§9. 二次型法.多項式的不同實根個數的定出

路斯應用施斗姆定理來計算特殊類型的眞有理分式的柯許指標,得出了他的演段[參考本章,§3的公式(10)]。至於這個分式的分子與分母是這樣的多項式,一個祇含有變數 z 的偶數次冪而另一個祇含有 z 的奇數次冪。

在本節及以後諸節中,我們述及用於路斯-霍維茨問題上的較深入與較清晰的安密達的二次型法。藉助於這一方法,對於任何有理分式的指標,我們得出了經其分子與分母的係數所表出的表示式。二次型法容許應用勿勞別涅斯關於甘凱連夫理論(第十章,§10)的較細緻的

[1] 當 $s=1$ 時要換分數 $\frac{\Delta_s}{\Delta_{s-1}}$ 爲 Δ_1,而當 $s=0$ 時換爲 a_0。

結果於路斯-霍維茨問題，且在潑.爾.切比雪夫與阿.阿.馬爾可夫關於穩定性問題的一些卓越的定理之間建立了密切的關係。

我們首先在定出多項式不同實根數的較簡單的問題上給讀者引進二次型法。

在解決這個問題時我們可以祇限於討論 $f(z)$ 是實多項式的情形。事實上，設予複多項式 $f(z)=u(z)+iv(z)$ [$u(z)$ 與 $v(z)$ 是實多項式]。多項式 $f(z)$ 的每一個實根同時使 $u(z)$ 與 $v(z)$ 變爲零。所以複多項式 $f(z)$ 與多項式 $u(z)$，$v(z)$ 的最大公因式（實多項式）$d(z)$ 有相同的實根。

因此，設 $f(z)$ 爲一個實多項式，他有不同的實根 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_q$ 其重數各爲 $n_1, n_2, \cdots, n_q$：

$$f(z)=a_0(z-\alpha_1)^{n_1}(z-\alpha_2)^{n_2}\cdots$$
$$\cdots(z-\alpha_q)^{n_q}[a_0\neq 0;\ \text{在 } i\neq k \text{ 時 } \alpha_i\neq\alpha_k\ (i, k=1, 2, \cdots, q)].$$

在討論中引進牛頓和

$$s_p=\sum_{j=1}^{q} n_j\alpha_j^p \quad (p=0, 1, 2, \cdots)。$$

用這些和來建立甘凱連夫型

$$S_n(x, x)=\sum_{i, k=0}^{n-1} s_{i+k}x_i x_k,$$

其中 n 爲任何 $\geqslant q$ 的整數。

那末就有次之

定理 6. 多項式 $f(z)$ 所有不同的根的個數等於型 $S_n(x, x)$ 的秩，而其所有不同實根的個數等於這個型的符號差。

證明 從型 $S_n(x, x)$ 的定義直接推得他的次之表示式：

$$S_n(x, x)=\sum_{j=1}^{q} n_j(x_0+\alpha_j x_1+\alpha_j^2 x_2+\cdots+\alpha_j^{n-1}x_{n-1})^2。\tag{51}$$

此處多項式 $f(z)$ 的每一個根 α_j 對應於一個線性型 $Z_j=x_0+\alpha_j x_1+$ $+\cdots+\alpha_j^{n-1}x_{n-1}$ 的平方 $(j=1, 2, \cdots, q)$。型 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_q$ 線性無

關,因爲這些線性型的係數構成一個范達蒙矩陣$\|\alpha_j^k\|$,其秩等於不同α_j的個數,亦即q。因此(參考第十章,§2)型$S_n(x,x)$的秩等於q。

在表示式(51)中每一個實根α_j對應於一個正平方。每一對共軛複根α_j, $\bar{\alpha}_j$對應於兩個複共軛型:

$$Z_j=P_j+iQ_j,\quad \bar{Z}_j=P_j-iQ_j;$$

在(51)中對應項的和給出一個正的與一個負的平方:

$$n_jZ_j^2+n_j\bar{Z}_j^2=2n_jP_j^2-2n_jQ_j^2。$$

因此容易看出❶,型$S_n(x,x)$的符號差,亦即正平方數與負平方數的差,等於不同實根α_j的個數。

定理已經證明。

應用第十章中(§3)所建立的確定二次型符號差的規則,我們從所證明的定理得出

推論 實多項式$f(z)$的不同實根的個數等於數列

$$1,\ s_0,\ \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix},\ \cdots,\ \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix}, \tag{52}$$

的同號數超過變號數的個數,其中$s_p\,(p=0,1,2,\cdots)$爲多項式$f(z)$的牛頓和,而n爲任何$\geqslant$多項式$f(z)$不同的根的個數q [特別的,可以取多項式$f(z)$的次數作爲n]。

所說的對於定出不同實根個數的規則祇能直接應用於這樣的情形,即在數列(52)中所有的數都不等於零。但是,此處所討論的是甘凱連夫二次型的符號的計算,所以根據第十章,§10的結果,這個規則經適當的更精確的規定後可以應用於一般的情形(更詳細的可參考本章的§11)。

---

❶ 表二次型$S_n(x,x)$爲q個實線性型Z_j(對於實數λ_j),P_j與Q_j(對於複數λ_j)的平方的(代數)和。這些型是線性無關的,因爲q是$S_n(x,x)$的秩。

由所證明的定理推知，所有型

$$S_n(x, x) \quad (n=q, q+1, \cdots)$$

都有相同的秩與相同的符號差。

應用定理 6（或其推論）來定出不同實根的個數時取多項式 $f(z)$ 的次數作為 n。

實多項式 $f(z)$ 的不同的實根的個數等於指標 $I_{-\infty}^{+\infty}\frac{f'(z)}{f(z)}$（參考本章，§ 2）。故從定理 6 的推論給出公式

$$I_{-\infty}^{+\infty}\frac{f'(z)}{f(z)}=n-2V\left(1,\ s_0,\ \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix},\ \cdots,\ \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix}\right),$$

其中 $s_p=\sum_{j=1}^{q} n_j \alpha_j^p$ $(p=0, 1, \cdots)$ 為對於多項式 $f(z)$ 的牛頓和，而 n 為 $f(z)$ 的次數。

在 § 11 中我們對於任意有理分式建立類似的公式。對此必須引進的關於無限甘凱連夫矩陣的知識將在次節中述及。

§ 10. 有限秩的無限甘凱連夫矩陣

1. 設給予複數無限序列

$$s_0,\ s_1,\ s_2,\ \cdots$$

這個數列定出一個無限對稱矩陣

$$S=\begin{Vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{Vmatrix},$$

平常稱為甘凱連夫矩陣。與無限甘凱連夫矩陣相伴的我們討論❶有限甘凱連夫矩陣 $S_n=\|s_{i+k}\|_0^{n-1}$ 以及與之相結合的甘凱連夫型

❶ 參考第十章，§ 10。

$$S_n(x, x)=\sum_{i,k=0}^{n-1} s_{i+k}x_i x_k。$$

以 $D_1, D_2, D_3, \cdots$ 記矩陣 S 的順序主子式

$$D_p=|s_{i+k}|_0^{p-1} \quad (p=1, 2, \cdots)。$$

無限矩陣可能有有限秩亦可能有無限秩。在後一情形在這些矩陣中有任意大級不等於零的子式存在。 次之定理給予數列 $s_0, s_1, s_2, \cdots$ 應當適合的充分必要條件,使得他們所產生的無限汗凱連夫矩陣 $S=\|s_{i+k}\|_0^\infty$ 有有限秩。

定理 7. 無限矩陣 $S=\|s_{i+k}\|_0^\infty$ 有有限秩 r 的充分必要條件是:(1)有 r 個數 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 存在,使得

$$s_q=\sum_{g=1}^{r}\alpha_g s_{q-g} \quad (q=r, r+1, \cdots), \tag{53}$$

(2) r 是有這一性質的最大數。

證明 如果矩陣 $S=\|s_{i+k}\|_0^\infty$ 有有限秩 r,那末這個矩陣的前 $r+1$ 行 $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_{r+1}$ 是線性相關的。所以有數 $h\leqslant r$ 存在使得行 $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_h$ 線性無關,而行 Γ_{h+1} 是這些行的線性組合:

$$\Gamma_{h+1}=\sum_{g=1}^{h}\alpha_g\Gamma_{h-g+1}。$$

討論行 $\Gamma_{q+1}, \Gamma_{q+2}, \cdots, \Gamma_{q+h+1}$, 其中 q 為任何非負整數。從矩陣 S 的構造直接看出,行 $\Gamma_{q+1}, \Gamma_{q+2}, \cdots, \Gamma_{q+h+1}$ 可以從行 $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_{h+1}$ 删去其位於前 q 個列的元素再向左移動 q 個位置來得出。故有

$$\Gamma_{q+h+1}=\sum_{g=1}^{h}\alpha_g\Gamma_{q+h-g+1} \quad (q=0, 1, 2, \cdots)。$$

這樣一來,在矩陣 S 中,從第 $h+1$ 行開始,任一行都可以經其前面的 h 行線性表出,因而,可以經前 h 個線性無關行線性表出。故知,對於矩陣 S 有秩 $r=h$[1]。在線性關係 $\Gamma_{q+h+1}=\sum_{g=1}^{h}\alpha_g\Gamma_{q+h-g+1}$ 中換 h 為 r 後

[1] "在長方矩陣中線性無關行的行數等於這個矩陣的秩"這一情況不僅對於有限的,卽對無限個行亦是成立的。

用更詳細的寫法就給出了(53)。

反之，如果條件(53)是適合的，那末在矩陣 S 中任一行(列)都是前 r 行(列)的線性組合。故矩陣 S 中所有階 $<r$ 的子式都等於零，因而矩陣 S 有有限秩 $\leqslant r$。但是這個秩不能 $<r$，因爲如其 $<r$，那末從已經證明的結果知道對於小於 r 的值(53)形關係式亦能成立，這就與條件(2)矛盾。這樣一來，定理已經完全證明。

推論　如果無限甘凱連夫矩陣 $S=\|s_{i+k}\|_0^\infty$ 有有限秩 r，那末

$$D_r=|s_{i+k}|_0^{r-1}\neq 0。$$

事實上，從關係式(53)知道矩陣 S 的任何行(列)都是前 r 行(列)的線性組合。所以矩陣 S 的任何 r 級子式都可以表爲 αD_r 的形狀，其中 α 爲某一個數。故得不等式 $D_r\neq 0$。

註　對於秩爲 r 的有限甘凱連夫矩陣，不等式 $D_r\neq 0$ 可能不成立。例如矩陣 $S_2=\begin{Vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{Vmatrix}$ 當 $s_0=s_1=0$，$s_2\neq 0$ 時有秩 1，但是 $D_1=s_0=0$。

2. 我們來闡明無限甘凱連夫矩陣與有理函數間特出的相互關係。設予真有理分式函數

$$R(z)=\frac{g(z)}{h(z)},$$

其中

$$h(z)=a_0z^m+\cdots+a_m(a_0\neq 0),\quad g(z)=b_1z^{m-1}+b_2z^{m-2}+\cdots+b_m。$$

寫 $R(z)$ 爲 z 的負冪次的冪級數：

$$R(z)=\frac{g(z)}{h(z)}=\frac{s_0}{z}+\frac{s_1}{z^2}+\frac{s_2}{z^3}+\cdots$$

如果函數 $R(z)$ 的所有極點，亦即使 $R(z)$ 變爲無窮大的所有值 z，都在圓 $|z|\leqslant a$ 中，那末位於展開式右節的級數當 $|z|>a$ 時是收斂的。乘這個等式的兩節以其分母 $h(z)$：

$$(a_0z^m+a_1z^{m-1}+\cdots+a_m)\left(\frac{s_0}{z}+\frac{s_1}{z^2}+\frac{s_2}{z^3}+\cdots\right)=$$
$$=b_1z^{m-1}+b_2z^{m-2}+\cdots+b_m。$$

在這一恆等式的左右兩節中使 z 的相同冪次的係數相等，我們得出次之等式組：

$$\left.\begin{array}{l} a_0s_0=b_1, \\ a_0s_1+a_1s_0=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0s_{m-1}+a_1s_{m-2}+\cdots+a_{m-1}s_0=b_m, \end{array}\right\} \tag{54}$$

$$a_0s_q+a_1s_{q-1}+\cdots+a_ms_{q-m}=0 \quad (q=m,\ m+1,\ \cdots)。 \tag{54'}$$

命

$$\alpha_g=-\frac{a_g}{a_0} \quad (g=1,\ 2,\ \cdots,\ m),$$

我們可以寫關係式(54′)爲(53)的形狀（取 $r=m$）。故由定理7，知由係數 s_0，s_1，s_2，… 所構成的無限甘凱連夫矩陣

$$S=\|s_{i+k}\|_0^\infty$$

有有限秩($\leqslant m$)。

反之，如果矩陣 $S=\|s_{i+k}\|_0^\infty$ 有有限秩 r，那末關係式(53)成立，他可以寫爲(54′)的形狀(取 $m=r$)。此時等式(54)定出數 $b_1, b_2, \cdots, b_m$，我們就有展開式

$$\frac{b_1z^{m-1}+\cdots+b_m}{a_0z^m+a_1z^{m-1}+\cdots+a_m}=\frac{s_0}{z}+\frac{s_1}{z^2}+\frac{s_2}{z^3}+\cdots$$

使這個展開式能夠成立的分母中最低次數 m 與使得關係式(53)能夠成立的最小的數 m 是相同的。由定理7知道這個最小的值 m 等於矩陣 $S=\|s_{i+k}\|_0^\infty$ 的秩。

這樣一來，我們證明了次之定理：

定理 8. 矩陣 $S=\|s_{i+k}\|_0^\infty$ 有有限秩的充分必要條件是，級數

$$R(z)=\frac{s_0}{z}+\frac{s_1}{z^2}+\frac{s_2}{z^3}+\cdots$$

的和是變數 z 的有理函數。在這一情形，矩陣 S 的秩與函數 $R(z)$ 的極點的個數相同，此時每一個極點要同其重數一樣多的重復計算其個數。

§11. 經其分子與分母的係數來定出任一有理分式的指標

1. 設予任一有理函數。寫其展開式爲 z 的降冪級數❶：

$$R(z)=s_{-\mu-1}z^{\mu}+\cdots+s_{-2}z+s_{-1}+\frac{s_0}{z}+\frac{s_1}{z^2}+\cdots \tag{55}$$

z 的負乘冪的係數序列

$$s_0,\ s_1,\ s_2,\ \cdots$$

定出一個無限甘凱連夫矩陣 $S=\|s_{i+k}\|_0^\infty$。

這樣一來，建立了一個對應關係

$$R(z)\sim S。$$

顯然，兩個相差一個整函數的有理函數對應於同一矩陣 S。但並不是每一個矩陣 $S=\|s_{i+k}\|_0^\infty$ 都對應於一個有理函數。在上節中已經得出，矩陣 S 對應於一個有理函數的充分必要條件是這個無限矩陣有有限秩。這個秩等於函數 $R(z)$ 的極點的個數（按照其重數來重復計算的），亦即等於既約分式 $\frac{g(z)}{f(z)}=R(z)$ 的分母 $f(z)$ 的次數。藉助於展開式 (55)，在其有理函數 $R(z)$ 與有限秩甘凱連夫矩陣 $S=\|s_{i+k}\|_0^\infty$ 之間建立了一個一一對應。

注意一些對應的性質：

1° 如果 $R_1(z)\sim S_1$，$R_2(z)\sim S_2$，那末對於任何數 c_1，與 c_2，都有：

$$c_1R_1(z)+c_2R_2(z)\sim c_1S_1+c_2S_2。$$

以後我們要遇到這樣的情形，$R(z)$ 的分子與分母的係數是參數 α 的整有理函數；此時 R 是 z 與 α 的有理函數。從等式(54)知道在這一情形，數 $s_0, s_1, s_2, \cdots$，亦即矩陣 S 的元素，都是 α 的有理函數。在展開式(55)中對 α 逐項微分，我們得出：

---

❶ 級數(55)在任何（以點 $z=0$ 爲圓心的）含有函數 $R(z)$ 全部極點的圓的外面是收斂的。

2° 如果 $R(z,\alpha)\sim S(\alpha)$，那末 $\frac{\partial R}{\partial\alpha}\sim\frac{\partial S}{\partial\alpha}$。[1]

2. 寫 $R(z)$ 的展開式爲部分分式：

$$R(z)=Q(z)+\sum_{j=1}^{q}\left\{\frac{A_1^{(j)}}{z-\alpha_j}+\frac{A_2^{(j)}}{(z-\alpha_j)^2}+\cdots+\frac{A_{\nu_j}^{(j)}}{(z-\alpha_j)^{\nu_j}}\right\},\qquad(56)$$

其中 $Q(z)$ 爲一個多項式，我們來證明，諸數 α 與 A 構成對應於有理函數 $R(z)$ 的矩陣 S。

爲此首先討論最簡單的有理分式

$$\frac{1}{z-\alpha}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\alpha^p}{z^{p+1}}。$$

他對應於矩陣

$$S_\alpha=\|\alpha^{i+k}\|_0^\infty。$$

對應於這個矩陣的二次型 $S_{\alpha n}(x,x)$ 有次之形狀：

$$S_{\alpha n}(x,x)=\sum_{i,k=0}^{n-1}\alpha^{i+k}x_ix_k=(x_0+\alpha x_1+\cdots+\alpha^{n-1}x_{n-1})^2。$$

如果

$$R(z)=Q(z)+\sum_{j=1}^{q}\frac{A^{(j)}}{z-\alpha_j},$$

那末由於 1° 其對應矩陣 S 爲公式

$$S=\sum_{j=1}^{q}A^{(j)}S_{\alpha_j}=\left\|\sum_{j=1}^{q}A^{(j)}\alpha_j^{i+k}\right\|_0^\infty$$

所定出，而其對應的二次型有次之形狀

$$S_n(x,x)=\sum_{j=1}^{q}A^{(j)}(x_0+\alpha_jx_1+\cdots+\alpha_j^{n-1}x_{n-1})^2。$$

爲了轉移到一般的情形(56)，我們逐項微分關係式

$$\frac{1}{z-\alpha}\sim S_\alpha=\|\alpha^{i+k}\|_0^\infty$$

$h-1$ 次。由 1° 與 2° 我們得出[2]：

---

[1] 如果 $S=\|s_{i+k}\|_0^\infty$，那末 $\frac{\partial S}{\partial\alpha}=\left\|\frac{\partial s_{i+k}}{\partial\alpha}\right\|_0^\infty$。

[2] 此處符號 C_d^h 表示從 d 個東西中每次取 h 個的組合的個數。

$$\frac{1}{(z-\alpha)^h} \sim \frac{1}{(h-1)!}\,\frac{\partial^{h-1}S_\alpha}{\partial\alpha^{h-1}} = \|C_{i+k}^{h-1}\alpha^{i+k-h+1}\|_0^\infty$$

$$(C_{i+k}^{h-1}=0,\ \text{如果}\ i+k<h-1)。$$

故在一般的情形，當 $R(z)$ 有展開式(56)時，再行應用性質1°，我們得出：

$$R(z)\sim S=\sum_{j=1}^{q}\Big(A_1^{(j)}+A_2^{(j)}\frac{\partial}{\partial\alpha_j}+\cdots+$$

$$+\frac{1}{(\nu_j-1)!}A_{\nu_j}^{(j)}\frac{\partial^{\nu_j-1}}{\partial\alpha_j^{\nu_j-1}}\Big)S_{\alpha_j}。\tag{57}$$

施行微分後，我們得出：

$$S=\Big\|\sum_{j=1}^{q}\big(A_1^{(j)}\alpha_j^{i+k}+A_2^{(j)}C_{i+k}^{1}\alpha_j^{i+k-1}+\cdots+$$

$$+A_{\nu_j}^{(j)}C_{i+k}^{\nu_j-1}\alpha_j^{i+k-\nu_j+1}\big)\Big\|_0^\infty。\tag{57'}$$

對應的甘凱連夫型 $S_n(x,x)=\sum_{i,k=0}^{n-1}s_{i+k}x_ix_k$ 將等於

$$S_n(x,x)=\sum_{j=1}^{q}\Big(A_1^{(j)}+A_2^{(j)}\frac{\partial}{\partial\alpha_j}+\cdots+\frac{1}{(\nu_j-1)!}A_{\nu_j}^{(j)}\frac{\partial^{\nu_j-1}}{\partial\alpha_j^{\nu_j-1}}\Big)\times$$

$$\times(x_0+\alpha_jx_1+\cdots+\alpha_j^{n-1}x_{n-1})^2。\tag{57''}$$

3. 現在我們有可能來敍述並且證明次之基本定理❶：

定理 9. 如果

$$R(z)\sim S$$

而且 m 是矩陣 S 的秩❷，那末對於任何 $n\geqslant m$，柯許指標 $I_{-\infty}^{+\infty}R(z)$ 等於型 $S_n(x,x)$ 的符號差❸：

$$I_{-\infty}^{+\infty}R(z)=\sigma[S_n(x,x)]。$$

證明 設有展開式(56)。那末根據(57)，有

$$S=\sum_{j=1}^{q}T_{\alpha_j},$$

---

❶ 對於最簡單的情形，$R(z)$ 沒有多重極點時，這個定理已經在1856年爲安密達所證明[128]。在一般的情形，這個定理曾爲霍維茨所證明[129]（參考[14]，17—19頁）。在本書中所述的證明與霍維茨的證明不相同。

❷ 有如我們已經注意到的，m 等於有理分式 $R(z)$ 在既約表示式中分母的次數。

❸ 以 $\sigma[S_n(x,x)]$ 記型 $S_n(x,x)$ 的符號差。

其中每一項有形狀

$$T_\alpha=\left(A_1+A_2\frac{\partial}{\partial\alpha}+\cdots+\frac{1}{(\nu-1)!}A_\nu\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial\alpha^{\nu-1}}\right)S_\alpha,$$

$$S_\alpha=\|\alpha^{i+k}\|_0^\infty, \tag{58}$$

而

$$S_n(x,x)=\sum_{j=1}^{q}T_{\alpha_j}(x,x)=\sum_{\alpha_j\text{實數}}T_{\alpha_j}(x,x)+$$
$$+\sum_{\alpha_j\text{複數}}[T_{\alpha_j}(x,x)+T_{\bar{\alpha}_j}(x,x)]。$$

根據定理 8，矩陣 T_{α_j} 的秩等於 ν_j，因而型 $T_{\alpha_j}(x,x)$ 亦等於 $\nu_j(j=1,2,\cdots,q)$，而 $S_n(x,x)$ 的秩等於 $m=\sum_{j=1}^{q}\nu_j$。但是如果某些實二次型的和的秩等於這些型的秩的和，那末對於符號差亦有同樣的關係：

$$\sigma[S_n(x,x)]=\sum_{\alpha_j\text{實數}}\sigma[T_{\alpha_j}(x,x)]+\sum_{\alpha_j\text{複數}}\sigma[T_{\alpha_j}(x,x)+$$
$$+T_{\bar{\alpha}_j}(x,x)]。 \tag{59}$$

我們分別來討論兩種情形：

（1）α 是一個實數。在

$$\frac{A_1}{z-\alpha}+\frac{A_2}{(z-\alpha)^2}+\cdots+\frac{A_\nu}{(z-\alpha)^\nu} \tag{60}$$

中，對於參數 $A_1, A_2, \cdots, A_{\nu-1}$ 與 α 的任何變動，對應矩陣 T_α 的秩都保持不變（$=\nu$）；因而型 $T_\alpha(x,x)$ 的符號差亦保持不變（參考第十章，§5）。所以 $\sigma[T_\alpha(x,x)]$ 是沒有改變的，如果我們在(59) 與 (60)中取：$A_1=\cdots=A_{\nu-1}=0$ 與 $\alpha=0$，亦即代替 T_α 我們取矩陣

$$\frac{1}{(\nu-1)!}\frac{\partial^{\nu-1}S_\alpha}{\partial\alpha^{\nu-1}}=\left\|\begin{matrix}\overbrace{0 & 0 & \cdots & 0}^{\nu-1} & A_\nu & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \vdots & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & & & & \\ A_\nu & \cdot & \cdot & & & & & \\ 0 & \cdot & & & & & & \\ 0 & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & \end{matrix}\right\|。$$

對應的二次型等於

$$\left.\begin{array}{l}2A_\nu(x_0x_{\nu-1}+x_1x_{\nu-2}+\cdots+x_{s-1}x_s)\text{如其 }\nu=2s,\\ A_\nu[2(x_0x_{\nu-1}+\cdots+x_{s-2}x_s)+x_{s-1}^2]\text{如其}\nu=2s-1。\end{array}\right\}(s=1,2,3,\cdots)。$$

上面這個型的符號差常等於零，而上面這個型的符號差等於 A_ν 的符號❶。這樣一來，如果 α 是一個實數，那末

$$\sigma[T_\alpha(x,x)]=\begin{cases}0 & \text{如其 }\nu\text{ 是一個偶數，}\\ \operatorname{sign}A_\nu & \text{如其 }\nu\text{ 是一個奇數。}\end{cases}\tag{61}$$

（2）α 是一個複數。設

$$T_\alpha(x,x)=\sum_{k=1}^{\nu}(P_k+iQ_k)^2,\quad T_{\bar\alpha}(x,x)=\sum_{k=1}^{\nu}(P_k-iQ_k)^2,$$

其中 P_k, Q_k $(k=1,2,\cdots,\nu)$ 爲變數 $x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}$ 的實線性型。那末

$$T_\alpha(x,x)+T_{\bar\alpha}(x,x)=2\sum_{k=1}^{\nu}P_k^2-2\sum_{k=1}^{\nu}Q_k^2。\tag{62}$$

因爲這個二次型的秩等於 2ν，所以 P_k, Q_k $(k=1,2,\cdots,\nu)$ 綫性無關，因而由(62)對於非實數 α 有：

$$\sigma[T_\alpha(x,x)+T_{\bar\alpha}(x,x)]=0。\tag{63}$$

從(59)，(61)與(63)推得：

$$\sigma[S_n(x,x)]=\sum_{\left(\substack{\alpha_j\text{ 實數}\\ \nu\text{ 奇數}}\right)}\operatorname{sign}A_\nu^{(j)}。$$

但在本章 §2 中已經闡明位於這個等式右節的和等於 $I_{-\infty}^{+\infty}R(z)$。所以我們的定理已經完全證明。

從所證明的定理推得：

推論 1. 如果 $R(z)\sim S=\|s_{i+k}\|_0^\infty$ 而且 m 是矩陣 S 的秩，那末所有二次型 $S_n(x,x)=\sum_{i,k=0}^{n-1}s_{i+k}x_ix_k$ $(n=m,m+1,\cdots)$ 都有相同的符號差。

---

❶ 每一個乘積 $x_0x_{\nu-1}$, $x_1x_{\nu-2}$, $\cdots$, 都可以換爲對應的平方差 $\left(\frac{x_0+x_{\nu-1}}{2}\right)^2-\left(\frac{x_0-x_{\nu-1}}{2}\right)^2$, $\left(\frac{x_1+x_{\nu-2}}{2}\right)^2-\left(\frac{x_1-x_{\nu-2}}{2}\right)^2$, $\cdots$ 此處得出的所有平方都是彼此無關的。

在第十章§10中已經建立了計算甘凱速夫二次型符號差的規則、而且勿勞別涅斯的研究給予了可能來敍述包含所有特殊情形的規則。根據所證明的定理這個規則可以用來計算柯許指標。這樣一來，我們得出：

推論 2. 對應矩陣 $S=\|s_{i+k}\|_0^\infty$ 有秩 m 的任何有理函數 $R(z)$ 的指標爲公式

$$I_{-\infty}^{+\infty} R(z)=m-2V(1,\ D_1,\ D_2,\ \cdots,\ D_m) \tag{64}$$

所決定，其中

$$D_f=|s_{i+k}|_0^{f-1}=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{f-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_f \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{f-1} & s_f & \cdots & s_{2f-2} \end{vmatrix} \quad (f=1,\ 2,\ \cdots,\ m); \tag{65}$$

如果在行列式 $D_1,\ D_2,\ \cdots,\ D_m$ 中有一羣鄰接的行列式等於零[1]。

$$(D_h\neq 0)D_{h+1}=\cdots=D_{h+p}=0 \quad (D_{h+p+1}\neq 0),$$

那末在計算 $V(D_h,\ D_{h+1},\ \cdots,\ D_{h+p+1})$ 時可以取：

$$\operatorname{sign} D_{h+j}=(-1)^{\frac{j(j-1)}{2}}\operatorname{sign} D_h \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ p),$$

這就給出：

$$V(D_h, D_{h+1}, \cdots, D_{h+p+1})=\begin{cases} \dfrac{p+1}{2} & \text{如其 } p \text{ 是一個奇數,} \\ \dfrac{p+1-\varepsilon}{2} & \text{如其 } p \text{ 是一個偶數,} \end{cases} \tag{66}$$

$$\varepsilon=(-1)^{\frac{p}{2}}\operatorname{sign}\frac{D_{h+p+1}}{D_h}。$$

爲了把有理函數的指標經其分子與分母的係數來表出，我們需要一些輔助關係式。

首先常可表 $R(z)$ 爲形狀[2]

[1] 此處永遠有 $D_m\neq 0$（本章，§9）。

[2] 對於我們沒有必要換 $R(z)$ 爲其有理分式。在以後祇要使得 $g(z)$ 的次數不超過 $h(z)$ 的次數。

$$R(z)=Q(z)+\frac{g(z)}{h(z)},$$

其中 $Q(z)$, $g(z)$, $h(z)$ 都是多項式,而且

$$h(z)=a_0z^m+a_1z^{m-1}+\cdots+a_m\ (a_0\neq 0),\ g(z)=b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_m。$$

顯然,

$$I_{-\infty}^{+\infty}R(z)=I_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(z)}{h(z)}。$$

設

$$\frac{g(z)}{h(z)}=s_{-1}+\frac{s_0}{z}+\frac{s_1}{z^2}+\cdots$$

那末,乘這一等式的兩節以其分母 $h(z)$ 後,使其兩節中同方次的 z 的係數相等,我們得出:

$$\begin{aligned}&a_0s_{-1}=b_0,\\&a_0s_0+a_1s_{-1}=b_1,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&a_0s_{m-1}+a_1s_{m-2}+\cdots+a_ms_{-1}=b_m,\\&a_0s_t+a_1s_{t-1}+\cdots+a_ms_{t-m}=0\quad(t=m,m+1,\cdots)。\end{aligned}\tag{67}$$

應用關係式(67),我們求得次諸 $2p$ 級行列式的表示式,其中在 $j>m$ 時命 $a_j=0$, $b_j=0$:

$$\begin{vmatrix}a_0&a_1&a_2&\cdots&a_{2p-1}\\b_0&b_1&b_2&\cdots&b_{2p-1}\\0&a_0&a_1&\cdots&a_{2p-2}\\0&b_0&b_1&\cdots&b_{2p-2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0\\s_{-1}&s_0&s_1&\cdots&s_{2p-2}\\0&1&0&\cdots&0\\0&s_{-1}&s_0&\cdots&s_{2p-3}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}a_0&a_1&a_2&\cdots&a_{2p-1}\\0&a_0&a_1&\cdots&a_{2p-2}\\0&0&a_0&\cdots&a_{2p-3}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&a_0\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}a_0^{2p}\begin{vmatrix}s_{p-1}&s_p&\cdots&s_{2p-2}\\s_{p-2}&s_{p-1}&\cdots&s_{2p-3}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\s_0&s_1&\cdots&s_{p-1}\end{vmatrix}=a_0^{2p}\begin{vmatrix}s_0&s_1&\cdots&s_{p-1}\\s_1&s_2&\cdots&s_p\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\s_{p-1}&s_p&\cdots&s_{2p-2}\end{vmatrix}=a_0^{2p}D_p。\tag{68}$$

引進縮簡記法

$$\nabla_{2p}=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{2p-1} \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{2p-1} \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{2p-2} \\ 0 & b_0 & \cdots & b_{2p-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \quad (p=1,\ 2,\ \cdots;\ a_j=b_j=0\ \text{如其}\ j>m)。\tag{69}$$

那末公式(68)可以寫爲：

$$\nabla_{2p}=a_0^{2p}D_p\ \ (p=1,\ 2,\ \cdots)。\tag{68'}$$

由於這一公式，上面的推論2化爲次之定理：

定理10. 如果 $\nabla_{2m}\neq 0$，❶ 那末

$$I_{-\infty}^{+\infty}\frac{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_m}{a_0z^m+a_1z^{m-1}+\cdots+a_m}=m-2V(1,\ \nabla_2,\ \nabla_4,\ \cdots,\ \nabla_{2m})$$
$$(a_0\neq 0),\tag{70}$$

其中 $\nabla_{2p}(p=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 爲公式(69)所確定；如果此時有相隣的部分行列式等於零

$$(\nabla_{2h}\neq 0)\ \nabla_{2h+2}=\cdots=\nabla_{2h+2p}=0\ (\nabla_{2h+2p+2}\neq 0),$$

那末用次之算法來計算 $V(\nabla_{2h},\ \nabla_{2h+2},\ \cdots,\ \nabla_{2h+2p+2})$：

$$\operatorname{sign}\nabla_{2h+2j}=(-1)^{\frac{j(j-1)}{2}}\operatorname{sign}\nabla_{2h}\quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ p),$$

或者，同樣的命

$$V(\nabla_{2h},\ \cdots,\ \nabla_{2h+2p+2})=\begin{cases}\dfrac{p+1}{2} & \text{如其}\ p\ \text{是一個奇數,}\\[2ex] \dfrac{p+1-\varepsilon}{2} & \text{如其}\ p\ \text{是一個偶數,}\end{cases}$$

$$\varepsilon=(-1)^{\frac{p}{2}}\operatorname{sign}\frac{\nabla_{2h+2p+2}}{\nabla_{2h}}。$$

註 如果 $\nabla_{2m}=0$，亦卽在公式(70)中位於指標符號下面的分式是可約的，那末可以換公式(70)爲另一公式

---

❶ 條件 $\nabla_{2m}\neq 0$ 說明 $D_m\neq 0$，因而位於(70)指標符號下面的分式是既約的。

$$I_{-\infty}^{+\infty}\frac{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_m}{a_0z^m+a_1z^{m-1}+\cdots+a_m}=r-2V(1,\nabla_2,\nabla_4,\cdots,\nabla_{2r}),\quad (70')$$

其中 r 是位於指標符號下面有理分式的極點的個數（多重極點以其重數重複計算）(亦即，r 為約簡分式後分母的次數)。

事實上，在這一情形我們所關心的指標等於

$$r-2V(1,D_1,D_2,\cdots,D_r),$$

因為數 r 是對應矩陣 $S=\|s_{i+k}\|_0^\infty$ 的秩。但等式(68′)有形式的性狀，他對於可約分數能夠成立。所以

$$V(1,D_1,D_2,\cdots,D_r)=V(1,\nabla_2,\nabla_4,\cdots,\nabla_{2r}),$$

因而我們得到公式(70′)。

公式(70′)給予可能把任何分子的次數不超過分母的次數的，有理分式的指標，經其分子與分母的係數來表出。

§ 12. 路斯-霍維茨定理的第二個證明

在 § 6 中，應用施斗姆定理與路斯演段，我們已經證明了路斯-霍維茨定理。在本節中，我們根據 § 11 的定理 10 與柯許指標的性質來給予路斯-霍維茨定理的證明。

我們注意柯許指標的一些性質，以後我們需要用到他們。

1° $I_a^b R(x)=-I_b^a R(x)$。[1]

2° $I_a^b R_1(x)R(x)=\operatorname{sign} R_1(x)I_a^b R(x)$，如其在$(a,b)$中，$R_1(x)\neq\begin{cases}0\\ \infty\end{cases}$。

3° 如果 $a<c<b$，那末 $I_a^bR(x)=I_a^cR(x)+I_c^bR(x)+\eta_c$，其中 $\eta_c=0$，如其 $R(c)$ 是一個有限值，$\eta_c=\pm1$，如其在點 c 函數 $R(x)$ 變為無窮大；此處 $\eta_c=+1$ 對應於在點 c 函數從 $-\infty$ 變到 $+\infty$（當 x 增大時），而 $\eta_c=-1$ 對應於在點 c 函數從 $+\infty$ 變到 $-\infty$。

4° 如果 $R(-x)=-R(x)$，那末 $I_{-a}^0 R(x)=I_0^a R(x)$。如果 $R(-x)=R(x)$，那末 $I_{-a}^0 R(x)=-I_0^a R(x)$。

[1] 此處及以後，指標的上界可以等於 $+\infty$，而其下界可以等於 $-\infty$。

5° $I_a^b R(x)+I_a^b\frac{1}{R(x)}=\frac{\varepsilon_b-\varepsilon_a}{2}$，其中 ε_a 爲 $R(x)$ 在 (a, b) 中接近 a 時的符號，ε_b 爲 $R(x)$ 在 (a, b) 中接近 b 時的符號。

前四個性質可以直接從柯許指標的定義來得出（參考 § 2）。性質 5° 可以這樣來推出，指標和 $I_a^b R(x)+I_a^b\frac{1}{R(x)}$ 等於差 n_1-n_2，其中 n_1 爲在 x 從 a 變到 b 時，$R(x)$ 從負值變到正值的變號次數，而 n_2 爲 $R(x)$ 從正值變到負值的變號次數。

討論實多項式❶

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\cdots+a_{n-1}z+a_n \quad (a_0>0)。$$

我們可以把他表爲次之形狀：

$$f(z)=h(z^2)+zg(z^2),$$

其中

$$h(u)=a_n+a_{n-2}u+\cdots,\quad g(u)=a_{n-1}+a_{n-3}u+\cdots$$

引進記法

$$\rho=I_{-\infty}^{+\infty}\frac{a_1z^{n-1}-a_3z^{n-3}+\cdots}{a_0z^n-a_2z^{n-2}+\cdots} \tag{71}$$

在 § 3 中我們證明了[參考 § 3 的(20)式]

$$\rho=n-2k-s, \tag{72}$$

其中 k 爲多項式 $f(z)$ 有正實數部分的根的個數，而 s 爲 $f(z)$ 在虛軸上的根的個數。

我們來變換對於 ρ 的表示式(71)。

首先討論 n 爲偶數的情形。設 $n=2m$。那末

$$h(u)=a_0u^m+a_0u^{m-1}+\cdots+a_n,\quad g(u)=a_1u^{m-1}+$$
$$+a_3u^{m-2}+\cdots+a_{n-1}。$$

應用性質 $1^\circ-4^\circ$ 且取 $\eta=\pm1$，如其對應的 $\lim\limits_{u\to-0}\frac{g(u)}{h(u)}=\pm\infty$ 而在其餘的情形取 $\eta=0$，我們有：

---

❶ 此處對於多項式的係數我們回到平常的記法。

$$\rho=-I_{-\infty}^{+\infty}\frac{zg(-z^2)}{h(-z^2)}=-(I_{-\infty}^{0}+I_{0}^{+\infty}+\eta)=$$

$$=-2I_{-\infty}^{0}\frac{zg(-z^2)}{h(-z^2)}-\eta=2I_{-\infty}^{0}\frac{g(-z^2)}{h(-z^2)}-\eta=$$

$$=2I_{-\infty}^{0}\frac{g(u)}{h(u)}-\eta=I_{-\infty}^{0}\frac{g(u)}{h(u)}-I_{-\infty}^{0}\frac{ug(u)}{h(u)}-\eta=$$

$$=I_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(u)}{h(u)}-I_{-\infty}^{+\infty}\frac{ug(u)}{h(u)}。$$

同樣的當 n 爲奇數時，$n=2m+1$，我們有：

$$h(u)=a_1u^m+a_3u^{m-1}+\cdots+a_n,$$

$$g(u)=a_0u^m+a_2u^{m-1}+\cdots+a_{n-1}。$$

取 $\zeta=\operatorname{sign}\left[\frac{g(u)}{h(u)}\right]_{u=-0}$，❶ 如其 $\lim\limits_{u\to 0}\frac{g(u)}{h(u)}=0$ 而在其餘情形取 $\zeta=0$，我們求得：

$$\rho=I_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(-z^2)}{zg(-z^2)}=I_{-\infty}^{0}+I_{0}^{+\infty}+\zeta=2I_{-\infty}^{0}\frac{h(-z^2)}{zg(-z^2)}+\zeta=$$

$$=2I_{-\infty}^{0}\frac{h(u)}{ug(u)}+\zeta=I_{-\infty}^{0}\frac{h(u)}{ug(u)}-I_{-\infty}^{0}\frac{h(u)}{g(u)}+\zeta=$$

$$=I_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(u)}{ug(u)}-I_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(u)}{g(u)}。$$

這樣一來，❷

$$\rho=I_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(u)}{h(u)}-I_{-\infty}^{+\infty}\frac{ug(u)}{h(u)}\quad(n=2m),\tag{73'}$$

$$\rho=I_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(u)}{ug(u)}-I_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(u)}{g(u)}\quad(n=2m+1)。\tag{73''}$$

同從前一樣以 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$ 記所予多項式 $f(z)$ 的霍維茨行列

❶ 此處我們了解 $\operatorname{sign}\left[\frac{g(u)}{h(u)}\right]_{u=-0}$ 爲負值 u 的絕對値非常小時 $\frac{g(u)}{h(u)}$ 的符號。

❷ 如果 $a_1\neq 0$，那末(73')與(73'')這兩個公式可以合併爲一個公式

$$\rho=I_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(u)}{h(u)}+I_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(u)}{ug(u)}。\tag{73'''}$$

式。我們假設 $\Delta_n\neq 0$。[1]

（1）$n=2m$。從公式(70)[2]

$$I_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(u)}{h(u)}=m-2V(1,\ \Delta_1,\ \Delta_3,\ \cdots,\ \Delta_{n-1}),\tag{74}$$

$$I_{-\infty}^{+\infty}\frac{ug(u)}{h(u)}=m-2V(1,\ -\Delta_2,\ +\Delta_4,\ -\Delta_6,\ \cdots)=$$
$$=-m+2V(1,\ \Delta_2,\ \Delta_4,\ \cdots,\ \Delta_n)。\tag{75}$$

此時根據(73′)

$$\rho=n-2V(1,\ \Delta_1,\ \Delta_3,\ \cdots,\ \Delta_{n-1})-2V(1,\ \Delta_2,\ \Delta_4,\ \cdots,\ \Delta_n),$$

故與等式 $\rho=n-2k$ 合併後給出：

$$k=V(1,\ \Delta_1,\ \Delta_3,\ \cdots,\ \Delta_{n-1})+V(1,\ \Delta_2,\ \Delta_4,\ \cdots,\ \Delta_n)。\tag{76}$$

（2）$n=2m+1$。由公式(70)[3]

$$I_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(u)}{ug(u)}=m+1-2V(1,\ \Delta_1,\ \Delta_3,\ \cdots,\ \Delta_n),\tag{77}$$

$$I_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(u)}{g(u)}=m-2V(1,\ -\Delta_2,\ +\Delta_4,\ -\cdots)=$$
$$=-m+2V(1,\ \Delta_2,\ \Delta_4,\ \cdots,\ \Delta_{n-1})。\tag{78}$$

等式 $\rho=2m+1-2k$ 連同等式(73″)，(77)與(78)仍然給我們以公式(76)。

路斯-霍維茨定理已經證明（參考本章，§6，定理4）。

註 1．如果在公式

$$k=V(1,\ \Delta_1,\ \Delta_3,\ \cdots)+V(1,\ \Delta_2,\ \Delta_4,\ \cdots)$$

---

[1] 在這一情形 $s=0$，因而 $\rho=n-2k$。此外，$\Delta_n\neq 0$ 表示在公式(73′)，(73″)中位於指標符號下面的分式是既約的。

[2] 在計算 $\nabla_2,\ \nabla_4,\ \cdots,\ \nabla_{2m}$ 時，計算第一個指標時要換諸值 $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_m$ 與 $b_0,\ b_1,\ \cdots,\ b_m$ 對應的為 $a_0,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2m}$ 與 $0,\ a_1,\ a_3,\ \cdots,\ a_{2m-1}$，而在計算第二個指標時要對應的換為 $a_0,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2m}$ 與 $a_1,\ a_3,\ \cdots,\ a_{2m-1},\ 0$。

[3] 此處在計算第一個指標時，在公式(70)中要把 $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_{m+1}$ 與 $b_0,\ b_1,\ \cdots,\ b_{m+1}$ 對應的換為 $a_0,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2m},\ 0$ 與 $0,\ a_1,\ a_3,\ \cdots,\ a_{2m+1}$，而在計算第二個指標時要對應的換 $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_m$ 與 $b_0,\ b_1,\ \cdots,\ b_m$ 為 $a_1,\ a_3,\ \cdots,\ a_{2m+1}$ 與 $a_0,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2m}$。

中某些中間的霍維茨行列式等於零，那末對於每一羣鄰接的零行列式

$$(\Delta_l \neq 0)\ \Delta_{l+2}=\Delta_{l+4}=\cdots=\Delta_{l+2p}=0\ (\Delta_{l+2p+2}\neq 0)$$

(與定理 10 相對應的)我們寫這些行列式的符號爲

$$\operatorname{sign}\Delta_{l+2j}=(-1)^{\frac{j(j-1)}{2}}\operatorname{sign}\Delta_l\quad (j=1,2,\cdots,p),$$

就給出：

$$V(\Delta_l,\Delta_{l+2},\cdots,\Delta_{l+2p+2})=\begin{cases}\dfrac{p+1}{2}\ \text{如其 } p \text{ 是一個奇數,}\\ \dfrac{p+1-\varepsilon}{2}\ \text{如其 } p \text{ 是一個偶數,}\end{cases}\tag{79}$$

$$\varepsilon=(-1)^{\frac{p}{2}}\operatorname{sign}\frac{\Delta_{l+2p+2}}{\Delta_l}。$$

在有爲零的霍維茨行列式出現時，小心的比較這個計算 k 的規則與定理 5 (§ 8 末尾)所給出的規則，證明這兩個規則是相同的。❶

註 2. 如果 $\Delta_n=0$，那末多項式 $ug(u)$ 與 $h(u)$ 不是互質的。以 $d(u)$ 記多項式 $g(u)$ 與 $h(u)$ 的最大公因式，而以 $u^\gamma d(u)$ 記 $ug(u)$ 與 $h(u)$ 的最大公因式 ($\gamma=0$ 或 1)。以 δ 記 $d(u)$ 的次數且設 $h(u)=$ $=d(u)h_1(u)$，$g(u)=d(u)g_1(u)$。

既約有理分式 $\dfrac{g_1(u)}{h_1(u)}$ 常對應於某一個秩爲 r 的無限甘凱達夫矩陣 $S=\|s_{i+k}\|_0^\infty$，其中 r 爲 $h_1(u)$ 的次數。此處對應的行列式 $D_r\neq 0$ 而 $D_{r+1}=D_{r+2}=\cdots=0$。由於公式(68′)，我們有 $\nabla_{2r}\neq 0$，$\nabla_{2r+2}=\nabla_{2r+4}=$ $=\cdots=0$。此外，

$$I_{-\infty}^{+\infty}\frac{g_1(u)}{h_1(u)}=r-2V(1,\nabla_2,\nabla_4,\cdots,\nabla_{2r})。$$

應用這些到位於(74)，(75)，(77) 與 (78)中指標符號下面的分式，我們容易求得，對於任何 n (偶數或奇數)與 $\varkappa=2\delta+\gamma$，都有

$$\Delta_{n-\varkappa-1}\neq 0,\ \Delta_{n-\varkappa}\neq 0,\ \overbrace{\Delta_{n-\varkappa+1}=\cdots=\Delta_n}^{\varkappa}=0$$

❶ 此處要考慮到 § 8 中最後一個足註的說明。

而且在所討論的情形，所有的公式(74)，(75)，(77)與(78)都仍然有效，如果在這些公式的右節删去 $i>n-\varkappa$ 的全部 Δ_i 而且換數 m [在公式(77)中為數 $m+1$] 為指標符號下面的分式經約簡後的對應分母的次數。那末由(73′)與(73″)我們得出：

$$\rho=n-\varkappa-2V(1,\ \Delta_1,\ \Delta_3,\ \cdots)-2V(1,\ \Delta_2,\ \Delta_4,\ \cdots)。$$

連同公式 $\rho=n-2k-s$ 就給出：

$$k_1=V(1,\ \Delta_1,\ \Delta_3,\ \cdots)+V(1,\ \Delta_2,\ \Delta_4,\ \cdots),\qquad (80)$$

其中 $k_1=k+\frac{s}{2}-\frac{\varkappa}{2}$ 為 $f(z)$ 在右半平面中所有根的個數除去那些同時使多項式 $f(-z)$ 亦等於零的根[1]。

§13. 路斯-霍維茨定理的一些補充。連那爾與希派爾的穩定性判定

設給予實係數多項式

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n\quad (a_0>0)。$$

那末使得多項式 $f(z)$ 的全部根都有負實數部分的充分必要的路斯-霍維茨條件可以寫為不等式的形狀

$$\Delta_1>0,\ \ \Delta_2>0,\ \ \cdots,\ \ \Delta_n>0,\qquad (81)$$

其中

$$\Delta_i=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_i \end{vmatrix}\qquad (a_k=0\ 如其\ k>n)$$

為 i 級霍維茨行列式 $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$。

---

[1] 這是這樣得出的，因為 $\varkappa$ 為多項式 $h(u)$ 與 $ug(u)$ 的最大公因式的次數；故 $\varkappa$ 為多項式 $f(z)$ 的"異"根的個數，亦即這種根 z^*，對於他 $-z^*$ 亦是 $f(z)$ 的根的個數。這些異根的個數等於最後一羣隣接等於零的霍維茨行列式(包含 Δ_n)的個數，他們是

$$\Delta_{n-\varkappa+1}=\cdots=\Delta_n=0。$$

如果條件(81)適合，那末多項式 $f(z)$ 可以表爲 a_0 與 $z+u$, z^2+ $+vz+w(u>0,\ v>0,\ w>0)$ 形因子的乘積，故多項式 $f(z)$ 的全部係數都是正的：❶

$$a_1>0,\ a_2>0,\ \cdots,\ a_n>0。\tag{82}$$

條件(82)與條件(81)不相同，條件(82)是必要的，但並不是使 $f(z)$ 的所有根都位於左半平面 $\mathrm{Re}\, z<0$ 的充分條件。

但當條件 (82) 適合時不等式 (81) 就不是彼此獨立的。例如，當 $n=4$ 時路斯-霍維茨條件就化爲一個不等式 $\Delta_3>0$，當 $\Delta=5$ 時化爲兩個不等式：$\Delta_2>0$，$\Delta_4>0$，當 $n=6$ 時亦化爲兩個不等式：$\Delta_3>0$，$\Delta_5>0$。❷

這一情況曾爲法國數學家連那爾與希派爾所研究且在 1914 ❸ 年他們給予了與路斯-霍維茨判定不相同的穩定性判定。

定理 11（連那爾與希派爾的穩定性判定）．使得實多項式 $f(z)=$ $=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n(a_0>0)$ 的全部根都有負實數部分的充分必要條件可以寫爲下面四種形狀的任何一種：

(1) $a_n>0,\ a_{n-2}>0,\ \cdots;\ \Delta_1>0,\ \Delta_3>0,\ \cdots,$

(2) $a_n>0,\ a_{n-2}>0,\ \cdots;\ \Delta_2>0,\ \Delta_4>0,\ \cdots,$

(3) $a_n>0;\ a_{n-1}>0,\ a_{n-3}>0,\ \cdots;\ \Delta_1>0,\ \Delta_3>0,\ \cdots,$

(4) $a_n>0;\ a_{n-1}>0,\ a_{n-3}>0,\ \cdots;\ \Delta_2>0,\ \Delta_4>0,\ \cdots,$ ❹

從定理 11 推知，對於所有係數（或祇是部分係數 a_n, a_{n-2}, $\cdots$ 或

❶ 由假設 $a_0>0$。

❷ 對於前面 n 的值，這一情況在一系列對於調節理論的工作中同連那爾與希派爾的一般判定無關的已經建立起來，顯然這些工作的著者是不知道連那爾與希派爾的判定的。

❸ 參考 [135]。關於連那爾與希派爾的一些基本結果的敍述可以在蒙．格．克萊因與蒙．阿．年伊馬爾克的基本評述[14]中找到。

❹ 條件(1)，(2)，(3)，(4) 比霍維茨的條件有顯著的好處，因爲他們比霍維茨條件所含的行列式不等式的個數約少一半。

$a_n, a_{n-1}, a_{n-3}, \cdots$) 爲正數的實多項式 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$ ($a_0>0$)，霍維茨行列式不等式(81)並不是彼此無關的，是即：從所有奇數級霍維茨行列式的大於零可以推得所有偶數級霍維茨行列式亦大於零，反之亦然。

連那爾與希派爾在其著作 [135] 中曾藉助於特殊的二次型來得出條件 (1)。應用 § 11 的定理 10 與柯許指標的理論，我們給予條件 (1) [同樣的對於條件(2)，(3)，(4)] 更簡單的推理，把這些條件作爲一個更普遍的定理的特殊情形來得出。下面我們就要轉移到這個定理的闡述。

在討論中仍然引進多項式 $h(u)$ 與 $g(u)$，他們與 $f(z)$ 有次之恆等關係：

$$f(z)=h(z^2)+zg(z^2)。$$

如果 n 是一個偶數，$n=2m$，那末

$$h(u)=a_0u^m+a_2u^{m-1}+\cdots+a_n,\ g(u)=a_1u^{m-1}+a_3u^{m-2}+\cdots+a_{n-1};$$

如果 n 是一個奇數，$n=2m+1$，那末

$$h(u)=a_1u^m+a_3u^{m-1}+\cdots+a_n,\ \ g(u)=a_0u^m+a_2u^{m-1}+\cdots+a_{n-1}。$$

那末條件 $a_n>0, a_{n-2}>0, \cdots$ (對應的 $a_{n-1}>0, a_{n-3}>0, \cdots$) 可以換爲更普遍的條件：$h(u)$[對應的 $g(u)$] 當 $u>0$ 時並不變號。❶

有這些條件時，可以祇利用奇數級霍維茨行列式或祇利用偶數級霍維茨行列式來推出多項式 $f(z)$ 在右半平面中根的個數的公式。

定理 12. 如果實多項式

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n=h(z^2)+zg(z^2)\quad(a_0>0)$$

適合條件：$h(u)$ [或 $g(u)$] 當 $u>0$ 時並不變號而且最後的霍維茨行列式 $\Delta_n\neq0$，那末多項式 $f(z)$ 分布於右半平面的根的個數 k 爲次諸公式所定出：

❶ 是即當 $u>0$ 時 $h(u)\geqslant0$ 或者 $h(u)\leqslant0$ [對應的當 $u>0$ 時 $g(u)\geqslant0$ 或者 $g(u)\leqslant0$]。

	$n=2m$	$n=2m+1$
當 $u>0$ 時 $h(u)$ 並不變號	$k=2V(1,\Delta_1,\Delta_3,\cdots,\Delta_{n-1})=$ $=2V(1,\Delta_2,\Delta_4,\cdots,\Delta_n)$	$k=2V(1,\Delta_1,\Delta_3,\cdots,\Delta_n)-\frac{1-\varepsilon_\infty}{2}=$ $=2V(1,\Delta_2,\Delta_4\cdots,\Delta_{n-1})+\frac{1-\varepsilon_\infty}{2}$
當 $u>0$ 時 $g(u)$ 並不變號	$k=2V(1,\Delta_1,\Delta_3,\cdots,\Delta_{n-1})+\frac{\varepsilon_\infty-\varepsilon_0}{2}=$ $=2V(1,\Delta_2,\Delta_4,\cdots,\Delta_n)-\frac{\varepsilon_\infty-\varepsilon_0}{2}$	$k=2V(1,\Delta_1,\Delta_3,\cdots,\Delta_n)-\frac{1-\varepsilon_0}{2}=$ $=2V(1,\Delta_2,\Delta_4,\cdots,\Delta_{n-1})+\frac{1-\varepsilon_0}{2}$

(83)

其中

$$\varepsilon_\infty=\operatorname{sign}\left[\frac{g(u)}{h(u)}\right]_{u=+\infty},\quad \varepsilon_0=\operatorname{sign}\left[\frac{g(u)}{h(u)}\right]_{u=+0}。❶ \tag{84}$$

證明　仍舊引進記號

$$\rho=I_{-\infty}^{+\infty}\frac{a_1z^{n-1}-a_3z^{n-3}+\cdots}{a_0z^n-a_2z^{n-2}+\cdots}。$$

對應於表(83)我們來討論四種情形：

(1) $n=2m$；當 $n>0$ 時 $h(u)$ 並不變號，那末❷

$$I_0^{+\infty}\frac{g(u)}{h(u)}=I_0^{+\infty}\frac{ug(u)}{h(u)}=0,$$

因而從明顯的等式

$$I_{-\infty}^{0}\frac{g(u)}{h(u)}=-I_{-\infty}^{0}\frac{ug(u)}{h(u)}$$

得出：❸

❶ 如果 $a_1\neq0$，那末 $\varepsilon_\infty=\operatorname{sign}a_1$，一般的，如果 $a_1=a_3=\cdots=a_{2\mu-1}=0$，而 $a_{2\mu+1}\neq0$，那末 $\varepsilon_\infty=\operatorname{sign}a_{2\mu+1}$；如果 $a_{n-1}\neq0$，那末 $\varepsilon_0=\operatorname{sign}\frac{a_{n-1}}{a_n}$，一般的，如果 $a_{n-1}=a_{n-3}=\cdots=a_{n-2\mu+1}=0$，$a_{n-2\mu-1}\neq0$，那末 $\varepsilon_0=\operatorname{sign}\frac{a_{n-2\mu-1}}{a_n}$。

❷ 如果 $h(u_1)=0(u_1>0)$，那末 $g(u_1)\neq0$，因爲 $\Delta_n\neq0$。故從 $h(u)>0(u>0)$，知 $\frac{g(u)}{h(u)}$ 在經過 $u=u_1$ 時並不變號。

❸ 從 $\Delta_n=a_n\Delta_{n-1}\neq0$ 推知 $h(0)=a_n\neq0$。

$$I_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(u)}{h(u)}=-I_{-\infty}^{+\infty}\frac{ug(u)}{h(u)}。$$

但此時從(74)與(75)求得:

$$V(1,\ \Delta_1,\ \Delta_3,\ \cdots)=V(1,\ \Delta_2,\ \Delta_4,\ \cdots),$$

所以路斯-霍維茨的公式(76)給予:

$$k=2V(1,\ \Delta_1,\ \Delta_3,\ \cdots,\ \Delta_{n-1})=2V(1,\ \Delta_2,\ \Delta_4,\ \cdots,\ \Delta_n)。$$

(2) $n=2m$; $g(u)$ 當 $u>0$ 時並不變號。在這一情形

$$I_0^{+\infty}\frac{h(u)}{g(u)}=I_0^{+\infty}\frac{h(u)}{ug(u)}=0,$$

$$I_{-\infty}^{0}\frac{h(u)}{g(u)}+I_{-\infty}^{0}\frac{h(u)}{ug(u)}=0$$

因而,應用記法(84),我們得出:

$$I_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(u)}{g(u)}+I_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(u)}{ug(u)}-\varepsilon_0=0。\tag{85}$$

換指標符號下面的函數為其倒轉的函數,由 5° (§ 12)我們得出:

$$I_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(u)}{h(u)}+I_{-\infty}^{+\infty}\frac{ug(u)}{h(u)}=\varepsilon_\infty-\varepsilon_0。$$

但由(74)與(75)他給予:

$$V(1,\ \Delta_2,\ \Delta_4,\ \cdots)-V(1,\ \Delta_1,\ \Delta_3,\ \cdots)=\frac{\varepsilon_\infty-\varepsilon_0}{2}。$$

故與路斯-霍維茨公式(76)相合併,我們得出:

$$k=2V(1,\ \Delta_1,\ \Delta_3,\ \cdots)+\frac{\varepsilon_\infty-\varepsilon_0}{2}=2V(1,\ \Delta_2,\ \Delta_4,\ \cdots)-\frac{\varepsilon_\infty-\varepsilon_0}{2}。$$

(3) $n=2m+1$, $g(u)$ 當 $u>0$ 時並不變號。

在這一情形,同上面的一樣,公式(85)是成立的。如果在(85)中代指標以其(77)與(78)中的表示式,那末我們得出:

$$V(1,\ \Delta_1,\ \Delta_3,\ \cdots)-V(1,\ \Delta_2,\ \Delta_4,\ \cdots)=\frac{1-\varepsilon_0}{2}。$$

與路斯-霍維茨公式相合併,這個等式給予:

$$k=2V(1,\ \Delta_1,\ \Delta_3,\ \cdots)-\frac{1-\varepsilon_0}{2}=2V(1,\ \Delta_2,\ \Delta_4,\ \cdots)+\frac{1-\varepsilon_0}{2}。$$

(4) $n=2m+1$, $h(u)$ 當 $u>0$ 時並不變號。

從等式 $I_0^{+\infty}\frac{g(u)}{h(u)}=I_0^{+\infty}\frac{ug(u)}{h(u)}=0$, $I_{-\infty}^0\frac{g(u)}{h(u)}+I_{-\infty}^0\frac{ug(u)}{h(u)}=0$

推得:

$$I_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(u)}{h(u)}+I_{-\infty}^{+\infty}\frac{ug(u)}{h(u)}=0_{\circ}$$

倒轉位於指標符號下面的函數,我們得出:

$$I_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(u)}{g(u)}+I_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(u)}{ug(u)}=\varepsilon_{\infty\circ}$$

此處代指標以其表示式(77)與(78),就有:

$$V(1,\ \Delta_1,\ \Delta_3,\ \cdots)-V(1,\ \Delta_2,\ \Delta_4,\ \cdots)=\frac{1-\varepsilon_\infty}{2}。$$

故由路斯-霍維茨公式得出:

$$k=2V(1,\ \Delta_1,\ \Delta_3,\cdots)-\frac{1-\varepsilon_\infty}{2}=2V(1,\ \Delta_2,\ \Delta_4,\ \cdots)+\frac{1-\varepsilon_\infty}{2}。$$

定理 12 已經完全證明。

定理 11 可以作爲這個定理的特殊情形來得出。

定理 12 的推論　如果實多項式 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n(a_0>0)$ 有正係數

$$a_0>0,\ a_1>0,\ a_2>0,\ \cdots,\ a_n>0$$

且有 $\Delta_n\neq0$, 那末這個多項式分佈於右半平面的根的個數 k 爲次式所定出

$$k=2V(1,\ \Delta_1,\ \Delta_3,\ \cdots)=2V(1,\ \Delta_2,\ \Delta_4,\ \cdots)。$$

註　如果在上一公式或公式(83)中有某些中間的霍維茨行列式等於零,那末在計算值 $V(1,\Delta_1,\Delta_3,\cdots)$ 與 $V(1,\Delta_2,\Delta_4,\cdots)$ 時要按照 § 12 的註 1 中所述的規則來計算。

如果 $\Delta_n=\Delta_{n-1}=\cdots=\Delta_{n-\varkappa+1}=0$, $\Delta_{n-\varkappa}\neq0$, 那末在公式(83)中删去行列式 $\Delta_{n-\varkappa+1}$, $\cdots$, Δ_n, [1] 我們從這些公式定出 $f(z)$ 分佈於右半平

[1] 參考 § 12 末尾。

面 $\operatorname{Re} z>0$ 的"非異"根的個數 k_1，祇要在 $u>0$ 時 $h(u)\neq 0$ 或者在 $u>0$ 時 $g(u)\neq 0$。❶

§14. 霍維茨多項式的一些性質．斯蒂力且斯定理．用連分式表出霍維茨多項式

1. 設予實多項式

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n\quad(a_0\neq 0)。$$

把他表爲次之形狀

$$f(z)=h(z^2)+zg(z^2)。$$

我們來闡明，在多項式 $h(u)$ 與 $g(u)$ 上應當加上怎樣的條件，才能使得 $f(z)$ 爲一個霍維茨多項式。

設在公式(20)中(§3)有 $k=s=0$，我們得出使 $f(z)$ 爲霍維茨多項式的充分必要條件是次形的等式

$$\rho=n,$$

同上節中所述的一樣，其中

$$\rho=I_{-\infty}^{+\infty}\frac{a_1z^{n-1}-a_3z^{n-3}+\cdots}{a_0z^n-a_2z^{n-2}+\cdots}。$$

設 $n=2m$。按照公式(73′)(§12)這個條件可以寫爲：

$$n=2m=I_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(u)}{h(u)}-I_{-\infty}^{+\infty}\frac{ug(u)}{h(u)}。\tag{86}$$

因爲有理分式指標的絕對值不可能超過其分母的次數（在所予的情形爲 m），所以等式(86)能夠成立的充分必要條件是同時有

$$I_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(u)}{h(u)}=m,\ I_{-\infty}^{+\infty}\frac{ug(u)}{h(u)}=-m。\tag{87}$$

當 $n=2m+1$ 時等式(73″)(因爲 $\rho=n$)給予：

$$n=I_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(u)}{ug(u)}-I_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(u)}{g(u)}。$$

---

❶ 在這一情形，從多項式 $h(u)$ 與 $g(u)$ 中除去他們的最大公因式 $d(u)$ 後所得出的多項式 $h_1(u)$ 與 $g_1(u)$ 適合定理 12 的條件。

此處把位於指標符號下面的分式換為其倒轉分式（參考 § 12 的 5°）且注意 $h(u)$ 與 $g(u)$ 同為 m 次多項式，我們得出：

$$n=2m+1=I_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(u)}{h(u)}-I_{-\infty}^{+\infty}\frac{ug(u)}{h(u)}+\varepsilon_{\infty}。[1] \tag{88}$$

仍然利用分式指標的絕對值不可能超過其分母的次數這一事實，推知等式(88)能夠成立的充分必要條件是同時有：

$$I_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(u)}{h(u)}=m,\ I_{-\infty}^{+\infty}\frac{ug(u)}{h(u)}=-m,\ \varepsilon_{\infty}=1。 \tag{89}$$

如果 $n=2m$，那末(87)的第一個等式說明多項式 $h(u)$ 有 m 個不同的實根 $u_1<u_2<\cdots<u_m$ 而其分式 $\frac{g(u)}{h(u)}$ 可表為形狀

$$\frac{g(u)}{h(u)}=\sum_{i=1}^{m}\frac{R_i}{(u-u_i)}, \tag{90}$$

其中

$$R_i=\frac{g(u_i)}{h'(u_i)}>0\ (i=1,2,\cdots,m)。 \tag{90'}$$

從分式 $\frac{g(u)}{h(u)}$ 的這一個表示式，知在多項式 $h(u)$ 的兩個根 u_i, u_{i+1} 之間有多項式 $g(u)$ 的實根 u_i' 存在($i=1, 2, \cdots, m-1$)而且多項式 $h(u)$ 與 $g(u)$ 的首項係數有相同的符號，亦即

$$h(u)=a_0(u-u_1)\cdots(u-u_m),\quad g(u)=a_1(u-u_1')\cdots(u-u_{m-1}'),$$

$$u_1<u_1'<u_2<u_2'<\cdots<u_{m-1}<u_{m-1}'<u_m;\quad a_0a_1>0。$$

從(87)的第二個等式祇引進一個補充條件

$$u_m<0。$$

根據這個條件，$h(u)$與 $g(u)$的全部根都應當是負的。如果 $n=2m+1$，那末從(89)的第一個等式，知 $h(u)$ 有 m 個不同的實根 $u_1, u_2, \cdots, u_m$ 與

$$\frac{g(u)}{h(u)}=s_{-1}+\sum_{i=1}^{m}\frac{R_i}{u-u_i}\quad(s_{-1}\neq 0), \tag{91}$$

[1] 同上節所述的一樣，$\varepsilon_{\infty}=\operatorname{sign}\left[\frac{g(u)}{h(u)}\right]_{u=+\infty}$。

其中

$$R_i=\frac{g(u_i)}{h'(u_i)}>0 \quad (i=1, 2, \cdots, m)。 \tag{91'}$$

從(89)的第三個等式推得

$$s_{-1}>0, \tag{92}$$

亦即首項係數 a_0 與 a_1 有相同的符號。此外,從(91),(91')與(92)知道 $g(u)$ 有 m 個實根 $u'_1<u'_2<\cdots<u'_m$,位於隔間$(-\infty, u_1)$, (u_1, u_2), $\cdots$, (u_{m-1}, u_m)中。換句話說,

$$h(u)=a_1(u-u_1)\cdots(u-u_m), \quad g(u)=a_0(u-u'_1)\cdots(u-u'_m),$$

$$u'_1<u_1<u'_2<u_2<\cdots<u'_m<u_m; \quad a_0a_1>0。$$

從(89)的第二個等式,與在 $n=2m$ 時一樣,祇引進一個補充不等式

$$u_m<0。$$

定義 3. 我們說,兩個 m 次(或者前者為 m 次而後者為 $m-1$ 次的)多項式 $h(u)$ 與 $g(u)$ 構成一個正耦,❶ 如果這兩個多項式的根 u_1, u_2, $\cdots$, u_m 與 u'_1, u'_2, $\cdots$, u'_m(對應的, u'_1, u'_2, $\cdots$, u'_{m-1})都是不同的負實數而且排列為次之形狀:

$$u'_1<u_1<u'_2<u_2<\cdots<u'_m<u_m<0$$

$$(對應的, u_1<u'_1<u_2<\cdots<u'_{m-1}<u_m<0),$$

而這兩個多項式的首項係數有相同的符號。❷

引進正數 $v_i=-u_i$, $v'_i=-u'_i$ 且乘上構成正耦的多項式 $h(u)$ 與 $g(u)$ 以 ±1 使得這兩個多項式的首項係數都是正的,我們可以表這兩個多項式為形狀

$$h(u)=a_1\prod_{i=1}^{m}(u+v_i), \quad g(u)=a_0\prod_{i=1}^{m}(u+v'_i), \tag{93}$$

其中

❶ 參考[7],333 頁。此處所引進來的多項式的正耦定義與書[7]中所給的定義有些不同。

❷ 如果我們丟去根是負的這一條件,我們得出多項式的實耦。在路斯-霍維茨問題中關於這概念的研究可參考[20]。

$$a_1>0,\ a_0>0,\ 0<v_m<u'_m<v_{m-1}<v'_{m-1}<\cdots<v_1<v'_1,$$

如果兩個多項式 $h(u)$ 與 $g(u)$ 都有次數 m；可以表爲形狀

$$h(u)=a_0\prod_{i=1}^{m}(u+v_i),\quad g(u)=a_1\prod_{i=1}^{m-1}(u+v'_i),\tag{93'}$$

其中

$$a_0>0,\ a_1>0,\ 0<v_m<v'_{m-1}<v_{m-1}<\cdots<v'_1<v_1,$$

如果 $h(u)$ 有次數 m 而 $g(u)$ 有次數 $m-1$。

上述推理證明了次之兩個定理：

定理 13. 爲了使得多項式 $f(z)=h(z^2)+zg(z^2)$ 是一個霍維茨多項式，充分必要的，是多項式 $h(u)$ 與 $g(u)$ 構成一個正耦。[1]

定理 14. 爲了使得兩個多項式 $h(u)$ 與 $g(u)$，其前者有次數 m 而後者有次數 m 或 $m-1$，構成正耦，充分必要的，是等式

$$I_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(u)}{h(u)}=m,\quad I_{-\infty}^{+\infty}\frac{ug(u)}{h(u)}=-m\tag{94}$$

同時成立，而且在 $h(u)$ 與 $g(u)$ 有相同的次數時，有補充條件

$$\varepsilon_\infty=\operatorname{sign}\left[\frac{g(u)}{h(u)}\right]_{u=+\infty}=1。\tag{95}$$

2. 從上面的定理，應用柯許指標的性質，我們容易得出關於表分式 $\frac{g(u)}{h(u)}$ 爲特殊類型連分式的斯蒂力且斯定理，其中多項式 $h(u)$ 與 $g(u)$ 是構成正耦的。

斯蒂力且斯定理的證明奠基於次之引：

引 如果多項式 $h(u)$，$g(u)$ [$h(u)$的次數等於 m] 構成正耦而且

$$\frac{g(u)}{h(u)}=c+\cfrac{1}{du+\cfrac{h_1(u)}{g_1(u)}},\tag{96}$$

其中 c，d 爲常數，而 $h_1(u)$，$g_1(u)$ 爲次數 $\leqslant m-1$ 的多項式，那末

---

[1] 這個定理是所謂安密達-別連爾定理的特類(參考[32]，21 頁)。

1° $c\geqslant0$, $d>0$,

2° 多項式 $h_1(u)$, $g_1(u)$ 有次數 $m-1$,

3° 多項式 $h_1(u)$, $g_1(u)$ 構成正耦。

已了的 $h(u)$ 與 $g(u)$ 唯一的確定多項式 $h_1(u)$, $g_1(u)$ (不計公共的常數因子)與常數 c 及 d。

反之,從(96)與 1°, 2°, 3°,可推得多項式 $h(u)$ 與 $g(u)$ 構成正耦,而且 $h(u)$ 有次數 m,而 $g(u)$ 有次數 m 或 $m-1$ 須視 $c>0$ 或 $c=0$ 而定。

證明 設 $h(u)$, $g(u)$ 構成正耦。那末從(94)與(96)得出:

$$m=I_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(u)}{h(u)}=I_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{du+\dfrac{h_1(u)}{g_1(u)}}。\tag{97}$$

從這一等式推知 $g_1(u)$ 的次數等於 $m-1$ 而 $d\neq0$。

再者,從(97)求得:

$$m=-I_{-\infty}^{+\infty}\left[du+\frac{h_1(u)}{g_1(u)}\right]+\operatorname{sign}d=-I_{-\infty}^{+\infty}\frac{h_1(u)}{g_1(u)}+\operatorname{sign}d。$$

故知 $d>0$ 而且

$$I_{-\infty}^{+\infty}\frac{h_1(u)}{g_1(u)}=-(m-1)。\tag{98}$$

現在,(94)的第二個等式給予:

$$-m=I_{-\infty}^{+\infty}\frac{ug(u)}{h(u)}=I_{-\infty}^{+\infty}\left[cu+\frac{1}{d+\dfrac{h_1(u)}{ug_1(u)}}\right]=$$

$$=I_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{d+\dfrac{h_1(u)}{ug_1(u)}}=-I_{-\infty}^{+\infty}\left[d+\frac{h_1(u)}{ug_1(u)}\right]=-I_{-\infty}^{+\infty}\frac{h_1(u)}{ug_1(u)}。\tag{99}$$

故知 $h_1(u)$ 有次數 $m-1$。

從條件(96),條件(95)給出: $c\geqslant0$。如果 $g(u)$ 的次數小於 $h(u)$ 的次數,那末從條件(96)推得: $c=0$。

從(98)與(99)得出:

$$I_{-\infty}^{+\infty}\frac{g_1(u)}{h_1(u)}=m-1,\quad I_{-\infty}^{+\infty}\frac{ug_1(u)}{h_1(u)}=-m+\varepsilon_\infty^{(1)},\tag{100}$$

其中

$$\varepsilon_\infty^{(1)}=\operatorname{sign}\left[\frac{g_1(u)}{h_1(u)}\right]_{u=+\infty}。$$

因爲(100)式的第二個指標的絕對值 $\leqslant m-1$,所以

$$\varepsilon_\infty^{(1)}=1,\tag{101}$$

故由(100)與(101),根據定理 12 推得,多項式 $h_1(u)$ 與 $g_1(u)$ 構成一個正耦。

從(96)得出:

$$c=\lim_{u\to\infty}\frac{g(u)}{h(u)},\quad \lim_{u\to\infty}\left[\frac{g(u)}{h(u)}-c\right]u=\frac{1}{d}。$$

在 c 與 d 已經確定後,從(96)定出分式 $\frac{h_1(u)}{g_1(u)}$。

按照倒轉的次序來應用關係式(97),(98),(99),(100),(101),得出引的第二部分。這樣一來,我們的引已經完全證明。

設已予多項式正耦 $h(u)$, $g(u)$ 與多項式 $h(u)$ 的次數 m。那末,以 $h(u)$ 除 $g(u)$ 且以 c_0 記其商, $g_1(u)$ 記其餘式,我們得出:

$$\frac{g(u)}{h(u)}=c_0+\frac{g_1(u)}{h(u)}=c_0+\frac{1}{\frac{h(u)}{g_1(u)}}。$$

$\frac{h(u)}{g_1(u)}$ 可以表爲 $d_0u+\frac{h_1(u)}{g_1(u)}$ 的形狀,其中 $h_1(u)$ 的次數,有如 $g_1(u)$ 的次數,是小於 m 的。故有

$$\frac{g(u)}{h(u)}=c_0+\frac{1}{d_0u+\frac{h_1(u)}{g_1(u)}}。\tag{102}$$

這樣一來,對於正耦 $h(v)$ 與 $g(u)$ 永遠有表示式(96)。根據我們的引,有

$$c_0\geqslant 0,\quad d_0>0,$$

而多項式 $h_1(u)$ 與 $g_1(u)$ 有次數 $m-1$ 且構成一個正耦。

應用同樣的推理於多項式正耦 $h_1(u)$, $g_1(u)$,得出等式

$$\frac{g_1(u)}{h_1(u)} = c_1 + \frac{1}{d_1 u + \frac{h_2(u)}{g_2(u)}}, \qquad (102')$$

其中

$$c_1 > 0, \quad d_1 > 0,$$

而多項式 $h_2(u)$ 與 $g_2(u)$ 有次數 $m-2$ 而且構成一個正耦。繼續如此進行,最後我們得到正耦 h_m 與 g_m,其中 h_m 與 g_m 爲同號的常數。我們假設:

$$\frac{g_m}{h_m} = c_m。 \qquad (102^{(m)})$$

那末由(102),(102′),…,(102^{m})推得

$$\frac{g(u)}{h(u)} = c_0 + \cfrac{1}{d_0 u + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{d_1 u + \cfrac{1}{c_2 + \cfrac{\ddots}{\qquad + \cfrac{1}{d_{m-1} u + \cfrac{1}{c_m}}}}}}}。$$

應用引的第二部分,我們類似的證明,對於任何 $c_0 \geqslant 0$, $c_1 > 0$, …, $c_m > 0$, $d_0 > 0$, $d_1 > 0$, …, $d_{m-1} > 0$ 寫出連分式,永遠能唯一的(不計公共的常數因子)定出多項式正耦 $h(u)$ 與 $g(u)$,而且 $h(u)$ 有次數 m,而 $g(u)$在 $c_0 > 0$ 時有次數 m,在 $c_0 = 0$ 時有次數 $m-1$。

這樣一來,我們證明了❶

定理 15 (斯蒂力且斯). 如果 $h(u)$, $g(u)$ 是多項式正耦而且 $h(u)$ 有次數 m,那末

❶ 不用柯西指標理論的斯蒂力且斯定理的證明可以在書[7], 333—337 頁中找到。

$$\frac{g(u)}{h(u)} = c_0 + \cfrac{1}{d_0 u + \cfrac{1}{c_1 + \cfrac{1}{d_1 u + \cfrac{1}{c_2 + \ddots + \cfrac{1}{d_{m-1} u + \cfrac{1}{c_m}}}}}}, \tag{103}$$

其中

$$c_0 \geqslant 0,\ c_1 > 0,\ \cdots,\ c_m > 0,\ d_0 > 0,\ \cdots,\ d_{m-1} > 0。$$

此處 $c_0 = 0$，如果 $g(u)$ 有次數 $m-1$，而 $c_0 > 0$，如果 $g(u)$ 有次數 m。常數 c_i，d_i 爲所予的 $h(u)$，$g(u)$ 所唯一確定。

反之，對於任何 $c_0 \geqslant 0$ 與任何正數 $c_1, \cdots, c_m, d_0, \cdots, d_{m-1}$，連分式 (103) 定出一個多項式正耦 $h(u)$，$g(u)$，其中 $h(u)$ 有次數 m。

從定理 13 與斯蒂力且斯定理得出：

定理 16. n 次實多項式 $f(z) = h(z^2) + zg(z^2)$ 是一個霍維茨多項式的充分必要條件，是對於非負的 c_0 與正的 $c_1, \cdots, c_m, d_0, \cdots, d_{m-1}$，(103) 式能夠成立。此處 $c_0 > 0$ 如其 n 是一個奇數；而 $c_0 = 0$，如其 n 是一個偶數。

§15. 穩定性區域．馬爾可夫參數

每一個 n 次實多項式都可以視爲 n 維空間的一個點，其坐標等於以首項係數除其餘全部係數所得出的商。在這個"係數空間"所有霍維茨多項式構成某一個 n 維區域，他爲霍維茨不等式 $\Delta_1 > 0$，$\Delta_2 > 0, \cdots, \Delta_n > 0$ 或連那爾-希派爾不等式，例如 $a_n > 0$，$a_{n-2} > 0$，$\cdots$；$\Delta_1 > 0$，$\Delta_3 > 0, \cdots$ 所決定❶。這個區域稱爲穩定性區域。如果所予方程的係數爲 p 個參數的函數，那末穩定性區域是在這些參數的空間中構成的。

❶ 當 $a_0 = 1$ 時。

穩定性區域的研究有很實際的用途；❶例如對於調節系統的設計，這種研究是很主要的。

在§16中我們要證明，為阿.阿.馬爾可夫與巴.爾.切比雪夫所建立的，關於分解連分式為變數負乘冪的冪級數的兩個重要定理，他們與穩定性區域的研究有密切關係。在敍述與證明這些定理時，較方便的，我們給予多項式不是他的係數，而是特殊的參數，我們稱為馬爾可夫參數。

設給予實多項式

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n\quad(a_0\neq 0)。$$

把他表為形狀

$$f(z)=h(z^2)+zg(z^2)。$$

我們假設，多項式 $h(u)$ 與 $ug(u)$ 是互質的（$\Delta_n\neq 0$）。把既約有理分式 $\frac{g(u)}{h(u)}$ 展為 u 的降冪級數：❷

$$\frac{g(u)}{h(u)}=s_{-1}+\frac{s_0}{u}-\frac{s_1}{u^2}+\frac{s_2}{u^3}-\frac{s_3}{u^4}+\cdots\tag{104}$$

數列 $s_0, s_1, s_2, \cdots$ 定出一個無限甘凱連夫矩陣 $S=\|s_{i+k}\|_0^\infty$。以等式

$$R(v)=-\frac{g(-v)}{h(-v)}\tag{105}$$

來定出有理函數 $R(v)$。那末

$$R(v)=-s_{-1}+\frac{s_0}{v}+\frac{s_1}{v^2}+\frac{s_2}{v^3}+\cdots,\tag{106}$$

故有關係式（參考§11）

$$R(v)\sim S。\tag{107}$$

❶ 穩定性區域，以及對應於各種 k 值（k 為位於右半平面的根的個數）的區域的研究，由.伊.年伊馬爾克有一系列的工作（參考專著[24]）。

❷ 為了方便起見，以後我們以 $-s_1$，$-s_3$ 等等來記 u 的偶數次負乘冪的係數。

故知❶矩陣 S 有秩 $m=\left[\frac{n}{2}\right]$，因爲 m 是多項式 $h(u)$ 的次數，因而爲函數 $R(v)$ 的極點的個數。

當 $n=2m$ 時，(此時 $s_{-1}=0$)已知矩陣 S 唯一的定出既約分式 $\frac{g(u)}{h(u)}$，因而，如不計常數因子時，唯一的定出 $f(z)$。當 $n=2m+1$ 時，對於 $f(z)$ 的給出，除開矩陣 S 以外，還必須知道係數 s_{-1}。

另一方面，爲了給出秩爲 m 的無限甘凱連夫矩陣 S，祇要給予前 $2m$ 個數 $s_0, s_1, \cdots, s_{2m-1}$ 就已足夠。數 $s_0, s_1, \cdots, s_{2m-1}$ 可以任意選取，祇是要適合一個限制

$$D_m=\left|s_{i+k}\right|_0^m\neq 0; \tag{108}$$

展開式(104)的所有下面的係數 $s_{2m}, s_{2m+1}, \cdots$ 都可以經前 $2m$ 個係數 $s_0, s_1, \cdots, s_{2m-1}$ 唯一的（而且是有理的）表出。事實上，對於秩爲 m 的無限甘凱連夫矩陣 S，其元素間有循環關係（參考 § 10 的定理 7）

$$s_q=\sum_{g=1}^{m}\alpha_g s_{q-g}\quad (q=m,\ m+1,\ \cdots)。 \tag{109}$$

如果數 $s_0, s_1, \cdots, s_{2m-1}$ 適合不等式(108)，那末在(109)的前 m 個等式中給予這些數就唯一的定出係數 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$；此後從(109)的其餘諸式定出 $s_{2m}, s_{2m+1}, \cdots$

這樣一來，次數 $n=2m$ 的實多項式 $f(z)$ 當 $\Delta_n\neq 0$ 時可以用適合不等式(108)的 $2m$ 個數 $s_0, s_1, \cdots, s_{2m-1}$ 來唯一的❷給出。當 $n=2m+1$ 時在這些以外還要加上一個 s_{-1}。

n 個值 $s_0, s_1, \cdots, s_{2m-1}$（在 $n=2m$ 時）或 $s_{-1}, s_0, \cdots, s_{2m-1}$（在 $n=$ $=2m+1$ 時）我們稱爲多項式 $f(z)$ 的馬爾可夫參數。在 n 維空間中，這些參數可以視爲所予多項式 $f(z)$ 所映像的點的坐標。

我們要闡明，應當給予馬爾可夫參數怎樣的條件，才能使對應多項

❶ 參考定理 8（§ 10 末尾）。

❷ 不計常數因子。

式 $f(z)$ 爲霍維茨多項式。由此我們定出馬爾可夫參數空間中穩定性區域。

霍維茨多項式爲條件(94)所確定而在 $n=2m+1$ 時要加上一個補充條件(95)。引進函數 $R(v)$［參考(105)］，我們可以寫等式(94)爲：

$$I_{-\infty}^{+\infty} R(v)=m,\quad I_{-\infty}^{+\infty} vR(v)=m, \tag{110}$$

對於 $n=2m+1$ 的補充條件給予：

$$s_{-1}>0。$$

與矩陣 $S=\|s_{i+k}\|_0^{\infty}$ 相伴的我們引進無限汁凱達夫矩陣 $S^{(1)}=$ $=\|s_{i+k+1}\|_0^{\infty}$。那末，因由(106)

$$vR(v)=-s_{-1}v+s_0+\frac{s_1}{v}+\frac{s_2}{v^2}+\cdots,$$

故有關係

$$vR(v)\sim S^{(1)}。 \tag{111}$$

矩陣 $S^{(1)}$，有如矩陣 S，有有限秩 m，因爲函數 $vR(v)$，有如 $R(v)$，有 m 個極點。故二次型

$$S_m(x,\ x)=\sum_{i,k=0}^{m-1} s_{i+k}x_ix_k,\quad S_m^{(1)}(x,x)=\sum_{i,k=0}^{m-1} s_{i+k+1}x_ix_k$$

有秩 m。但由定理 9 (§ 11)與(107)，(111) 知道這些型的符號差等於指標(110)，因而等於 m。這樣一來，條件 (110) 說明二次型 $S_m(x,\ x)$ 與 $S_m^{(1)}(x,\ x)$的恆正性。我們得出了

定理 17. 爲了使得次數爲 $n=2m$ 或 $n=2m+1$ 的實多項式 $f(z)=h(z^2)+zg(z^2)$ 爲霍維茨多項式，充分必要的，[1]是：

---

[1] 我們沒有特別聲明不等式 $\Delta_n\neq 0$，因爲從定理的條件自動的得出這個不等式。事實上，如果 $f(z)$ 是一個霍維茨多項式，那末已知 $\Delta_n\neq 0$。如果給予條件 1°，2°，那末從二次型 $S_m^{(1)}(x,\ x)$的恆正性推得等式

$$-I_{-\infty}^{+\infty}\frac{ug(u)}{h(u)}=I_{-\infty}^{+\infty} vR(v)=m,$$

因此得出分式 $\frac{ug(u)}{h(u)}$ 的既約性，這就表示有不等式 $\Delta_n\neq 0$。

同樣的從定理的條件得出：$D_m=|s_{i+k}|_0^{m-1}\neq 0$，亦即數 $s_0,\ s_1,\ \cdots,\ s_{2m-1}$ 與（在 $n=2m+1$ 時）數 s_{-1} 是多項式 $f(z)$ 的馬爾可夫參數。

1° 二次型

$$S_m(x, x)=\sum_{i,k=0}^{m-1} s_{i+k}x_ix_k, \quad S_m^{(1)}(x, x)=\sum_{i,k=0}^{m-1} s_{i+k}x_ix_k \tag{112}$$

是恆正的，而且

2° (在 $n=2m+1$ 時)

$$s_{-1}>0。\tag{113}$$

此處 $s_{-1}, s_0, s_1, \cdots, s_{2m-1}$ 是展開式

$$\frac{g(u)}{h(u)}=s_{-1}+\frac{s_0}{u}-\frac{s_1}{u^2}+\frac{s_2}{u^3}-\frac{s_3}{u^4}+\cdots$$

的係數。

引進對於行列式的記法：

$$D_p=|s_{i+k}|_0^{p-1}, \quad D_p^{(1)}=|s_{i+k+1}|_0^{p-1} \quad (p=1, 2, \cdots, m)。\tag{114}$$

那末條件 1° 與次之行列式不等式組等價

$$\left.\begin{aligned}
&D_1=s_0>0, \quad D_2=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix}>0, \cdots, D_m=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{m-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{m-1} & s_m & \cdots & s_{2m-2} \end{vmatrix}>0, \\
&D_1^{(1)}=s_1>0, D_2^{(1)}=\begin{vmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{vmatrix}>0, \cdots, D_m^{(1)}=\begin{vmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_m \\ s_2 & s_3 & \cdots & s_{m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_m & s_{m+1} & \cdots & s_{2m-1} \end{vmatrix}>0。
\end{aligned}\right\} \tag{115}$$

在 $n=2m$ 時不等式 (115) 定出馬爾可夫參數空間中穩定性區域。在 $n=2m+1$ 時除這些不等式外還要加上一個條件：

$$s_{-1}>0。\tag{116}$$

在次節中我們要闡明從不等式(115)推出矩陣 S 的一些什麼性質，同時分出與霍維茨多項式相對應的無限汗凱連夫矩陣 S 的特殊類。

§ 16. 與力矩問題的關係

1. 我們來敍述次之正的半軸上$0<v<\infty$的力矩問題：❶

給予實數序列$s_0, s_1, \cdots$需要定出正數

$$\mu_1>0,\ \mu_2>0,\ \cdots,\ \mu_m>0;\ 0<v_1<v_2<\cdots<v_m \tag{117}$$

使得次之等式能夠成立

$$s_p=\sum_{j=1}^{m}\mu_j v_j^p \quad (p=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \tag{118}$$

不難看出，等式組(118)相當於次之u的負乘冪級數的展開式：

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\mu_j}{u+v_j}=\frac{s_0}{u}-\frac{s_1}{u^2}+\frac{s_2}{u^3}-\cdots \tag{119}$$

在這一情形無限甘凱連夫矩陣$S=\|s_{i+k}\|_0^\infty$有有限秩m，且由不等式(117)知在既約眞有理分式

$$\frac{g(u)}{h(u)}=\sum_{j=1}^{m}\frac{\mu_j}{u+v_j} \tag{120}$$

中[$h(u)$與$g(u)$的首項係數都是選取爲正的]多項式$h(u)$與$g(u)$構成一個正耦[參考(91)與(91′)]。

所以(參考定理14)我們所述的力矩問題有解的充分必要條件，是藉助於等式(119)與(120)，數列$s_0, s_1, s_2, \cdots$確定一個$2m$次霍維茨多項式$f(z)=h(z^2)+zg(z^2)$。

力矩問題的解是唯一的，因爲從展開式(119)唯一的定出正數v_j與μ_j $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$。

與"無限的"力矩問題(118)相伴的，我們討論從(118)的前$2m$個等式所給予的"有限的"力矩問題：

$$s_p=\sum_{j=1}^{m}\mu_j v_j^p \quad (p=0,\ 1,\ \cdots,\ 2m-1)。 \tag{121}$$

從這些關係式還可推出次之甘凱連夫二次型表示式：

---

❶ 所說的力矩問題與一般的力矩乘冪問題不同，對於後者要換$\sum_{j=1}^{m}\mu_j v_j^p$爲斯蒂爾吉斯積分$\int_0^\infty v^p d\mu(v)$(參考[3])。

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i,k=0}^{m-1} s_{i+k}x_ix_k &= \sum_{j=1}^{m}\mu_j(x_0+x_1v_j+\cdots+x_{m-1}v_j^{m-1})^2,\\ \sum_{i,k=0}^{m-1} s_{i+k+1}x_ix_k &= \sum_{j=1}^{m}\mu_jv_j(x_0+x_1v_j+\cdots+x_{m-1}v_j^{m-1})^2。\end{aligned}\right\}\tag{122}$$

因爲變數 $x_0, x_1, \cdots, x_{m-1}$ 的線性型

$$x_0+x_1v_j+\cdots+x_{m-1}v_j^{m-1}\ (j=1, 2, \cdots, m)$$

是線性無關的（這些型的係數構成一個不爲零的范達蒙行列式！）而且 $v_j>0$, $\mu_j>0$ $(j=1, 2, \cdots, m)$，所以二次型(122)是恆正的。那末根據定理 17，數 $s_0, s_1, \cdots, s_{2m-1}$ 是某一個霍維茨多項式 $f(z)$ 的馬爾可夫參數。這些數是展開式(119)的前 $2m$ 個係數。連同其餘的係數 s_{2m}, $s_{2m+1}, \cdots$，他們定出無限的力矩問題 (118) 的解，這個解與有限的問題(121)的解是相同的。

這樣一來，我們證明了次之

定理 18. 1. 爲了使得有限力矩問題

$$s_p=\sum_{j=1}^{m}\mu_jv_j^p \tag{123}$$

$(p=0, 1, \cdots, 2m-1;\ \mu_1>0, \cdots, \mu_m>0,\ 0<v_1<v_2<\cdots<v_m)$，其中 s_p 是已知的，而 v_j 與 μ_j 是未知的實數 $(p=0, 1, \cdots, 2m-1;\ j=1, 2, \cdots, m)$，有解存在，充分必要的，是二次型

$$\sum_{i,k=0}^{m-1} s_{i+k}x_ix_k,\quad \sum_{i,k=0}^{m-1} s_{i+k+1}x_ix_k \tag{124}$$

爲恆正型，亦即數 $s_0, s_1 \cdots, s_{2m-1}$ 是某一個 $2m$ 次霍維茨多項式的馬爾可夫參數。

2. 爲了使得無限力矩問題

$$s_p=\sum_{j=1}^{m}\mu_jv_j^p \tag{125}$$

$(p=0, 1, 2, \cdots;\ \mu_1>0, \cdots, \mu_m>0;\ 0<v_1<v_2<\cdots<v_m)$，其 s_p 爲已知的，而 v_j 與 μ_j 爲未知的實數 $(p=0, 1, 2, \cdots;\ j=1, 2, \cdots, m)$，有解存在，充分必要的，是 1° 二次型 (124) 是恆正的與 2° 無限什凱速夫

矩陣 $S=\|s_{i+k}\|_0^\infty$ 有秩 m，亦即級數

$$\frac{s_0}{u}-\frac{s_1}{u^2}+\frac{s_2}{u^3}-\cdots=\frac{g(u)}{h(u)} \tag{126}$$

定出 $2m$ 次霍維茨多項式 $f(z)=h(z^2)+zg(z^2)$。

3．無論是有限的 (123)，或者是無限的 (124)，力矩問題的解永遠是唯一的。

2．我們應用所證明的定理來研究對應於某一霍維茨多項式的 m 秩無限甘凱連夫矩陣 $S=\|s_{i+k}\|_0^\infty$ 的子式，亦即其二次型 (124) 是恆正的矩陣 $S=\|s_{i+k}\|_0^\infty$ 的子式。在這一情形產生矩陣 S 的數 $s_0, s_1, s_2, \cdots$ 可以表爲(123)的形狀，所以對於矩陣 S 的任何 $h(\leqslant m)$ 級子式都是：

$$\left\|\begin{matrix} s_{i_1+k_1} & \cdots & s_{i_1+k_h} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{i_h+k_1} & \cdots & s_{i_h+k_h}\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \mu_1 v_1^{i_1} & \mu_2 v_2^{i_1} & \cdots & \mu_m v_m^{i_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_1 v_1^{i_h} & \mu_2 v_2^{i_h} & \cdots & \mu_m v_m^{i_h}\end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} v_1^{k_1} & \cdots & v_1^{k_h} \\ v_2^{k_1} & \cdots & v_2^{k_h} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ v_m^{k_1} & \cdots & v_m^{k_h}\end{matrix}\right\|,$$

因而，

$$S\begin{pmatrix} i_1 \, i_2 \cdots i_h \\ k_1 k_2 \cdots k_h\end{pmatrix} =$$

$$=\sum_{1\leqslant\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_h\leqslant m}\mu_{\alpha_1}\mu_{\alpha_2}\cdots\mu_{\alpha_h}\begin{vmatrix} v_{\alpha_1}^{i_1} & v_{\alpha_2}^{i_1} & \cdots & v_{\alpha_h}^{i_1} \\ v_{\alpha_1}^{i_2} & v_{\alpha_2}^{i_2} & \cdots & v_{\alpha_h}^{i_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{\alpha_1}^{i_h} & v_{\alpha_2}^{i_h} & \cdots & v_{\alpha_h}^{i_h}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} v_{\alpha_1}^{k_1} & v_{\alpha_1}^{k_2} & \cdots & v_{\alpha_1}^{k_h} \\ v_{\alpha_2}^{k_1} & v_{\alpha_2}^{k_2} & \cdots & v_{\alpha_2}^{k_h} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{\alpha_h}^{k_1} & v_{\alpha_h}^{k_2} & \cdots & v_{\alpha_h}^{k_h}\end{vmatrix} \tag{127}$$

但由不等式

$$0<v_1<v_2<\cdots<v_m,\ i_1<i_2<\cdots<i_h,\ k_1<k_2<\cdots<k_h$$

得出廣義范達蒙行列式爲正的性質❶

$$\begin{vmatrix} v_{\alpha_1}^{i_1} & v_{\alpha_2}^{i_1} & \cdots & v_{\alpha_h}^{i_1} \\ v_{\alpha_1}^{i_2} & v_{\alpha_2}^{i_2} & \cdots & v_{\alpha_h}^{i_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{\alpha_1}^{i_h} & v_{\alpha_2}^{i_h} & \cdots & v_{\alpha_h}^{i_h}\end{vmatrix}>0,\quad \begin{vmatrix} v_{\alpha_1}^{k_1} & v_{\alpha_1}^{k_2} & \cdots & v_{\alpha_1}^{k_h} \\ v_{\alpha_2}^{k_1} & v_{\alpha_2}^{k_2} & \cdots & v_{\alpha_2}^{k_h} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{\alpha_h}^{k_1} & v_{\alpha_h}^{k_2} & \cdots & v_{\alpha_h}^{k_h}\end{vmatrix}>0。$$

❶ 參考第十三章，§8，1，例 1。

故因數 $\mu_j>0(j=1, 2, \cdots, m)$，由(127)推得：

$$S\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_h \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_h \end{pmatrix}>0 \quad \left(0\leqslant \begin{matrix} i_1<i_2<\cdots<i_h \\ k_1<k_2<\cdots<k_h, \end{matrix} \; h=1,2,\cdots,m\right), \tag{128}$$

反之，如果在 m 秩無限甘凱連夫矩陣 $S=\|s_{i+k}\|_0^\infty$ 中所有的任意的 $h(\leqslant m)$ 級子式都是正的，那末二次型(124)是恆正的。

我們引進

定義 4. 無限矩陣 $A=\|a_{ik}\|_0^\infty$ 稱爲有秩 m 的完全正矩陣，是在這樣的情形且祇在這樣的情形，矩陣 A 的所有階 $h\leqslant m$ 的子式都是正的，而所有級數 $h>m$ 的子式都等於零。

現在我們來敍述所建立的矩陣 S 的性質[1]。

定理 19. 爲了使得無限甘凱連夫矩陣 $S=\|s_{i+k}\|_0^\infty$ 是一個有秩 m 的完全正矩陣，充分必要的，是(1)矩陣 S 有秩 m 與(2)二次型

$$\sum_{i,k=0}^{m-1} s_{i+k}x_ix_k, \quad \sum_{i,k=0}^{m-1} s_{i+k+1}x_ix_k$$

是恆正的。

從這個定理與定理 17 得出

定理 20. n 次實多項式 $f(z)$ 是一個霍維茨多項式，充分必要的，是對應於這個多項式的無限甘凱連夫矩陣 $S=\|s_{i+k}\|_0^\infty$ 爲有秩 $m=\left[\frac{n}{2}\right]$ 的完全正矩陣而在 n 爲一奇數的情形要補充一個 $s_{-1}>0$ 的條件。

此處矩陣 S 的元素 $s_0, s_1, s_2, \cdots$ 與數 s_{-1} 爲展開式

$$\frac{g(u)}{h(u)}=s_{-1}+\frac{s_0}{u}-\frac{s_1}{u^2}+\frac{s_2}{u^3}-\cdots \tag{129}$$

所定出，其中

$$f(z)=h(z^2)+zg(z^2)。$$

§ 17. 馬爾可夫與切比雪夫定理

在 1894 年片且爾步爾格斯克科學院紀錄中所刊載的，他的有名的

[1] 參考[61д]。

專著"關於從轉化為連分式所得出的函數" ❶裏面，已故院士阿.阿.馬爾可夫證明了兩個定理，其中第二個曾為潑.爾.切比雪夫❷用不同的方法但在定理的敍述上無何特殊差別的，在 1892 年所建立。

在這一節中，我們來證明這些定理對於馬爾可夫參數的穩定性區域的研究有直接關係，而且根據上節的定理 19 給予這些定理以比較簡單的證明(與連分式無關的)。

轉移到第一個定理的敍述，我們引用上面所提到的阿.阿.馬爾可夫專著中的說法❸：

"根據上面所說的，不難證明兩個顯著的定理來結束我們的這篇文章。

有一個是關於行列式❹

$$\Delta_1,\ \Delta_2,\ \cdots,\ \Delta_m,\ \Delta^{(1)},\ \Delta^{(2)},\ \cdots,\ \Delta^{(m)}$$

的而另一個是關於方程❺

$$\psi_m(x)=0$$

的根的。

關於行列式的定理．如果對於數

$$s_0,\ s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_{2m-2},\ s_{2m-1},$$

我們有兩組值

(1) $s_0=a_0,\ s_1=a_1,\ s_2=a_2,\ \cdots,\ s_{2m-2}=a_{2m-2},\ s_{2m-1}=a_{2m-1},$

(2) $s_0=b_0,\ s_1=b_1,\ s_2=b_2,\ \cdots,\ s_{2m-2}=b_{2m-2},\ s_{2m-1}=b_{2m-1},$

使得所有行列式

---

❶ 還可參考[22]，78—105 頁。

❷ 這一定理是在潑.爾.切比雪夫的論文"關於用變數的降冪來展為連分式的展開式"中刊載的。參考[31]，307—362 頁。

❸ [22]，95 頁倒數第三行以後。

❹ 我們的記法為 $D_1,\ D_2,\ \cdots,\ D_m,\ D_1^{(1)},\ D_2^{(1)},\ \cdots,\ D_m^{(1)}$ (參考 §15 末尾)。

❺ 我們的記法為 $h(-x)=0$。

$$\Delta_1 = s_0,\quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 \\ s_1 & s_2 \end{vmatrix},\ \cdots,\ \Delta_m = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{m-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{m-1} & s_m & \cdots & s_{2m-2} \end{vmatrix},$$

$$\Delta^{(1)} = s_1,\quad \Delta^{(2)} = \begin{vmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{vmatrix},\ \cdots,\ \Delta^{(m)} = \begin{vmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_m \\ s_2 & s_3 & \cdots & s_{m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_m & s_{m+1} & \cdots & s_{2m-1} \end{vmatrix}$$

都爲正數且適合不等式

$$a_0 \geqslant b_0,\ b_1 \geqslant a_1,\ a_2 \geqslant b_2,\ b_3 \geqslant a_3,\ \cdots,\ a_{2m-2} \geqslant b_{2m-2},\ b_{2m-1} \geqslant a_{2m-1},$$

那末我們的行列式

$$\Delta_1,\ \Delta_2,\ \cdots,\ \Delta_m;\ \Delta^{(1)},\ \Delta^{(2)},\ \cdots,\ \Delta^{(m)},$$

對於所有適合不等式

$$a_0 \geqslant s_0 \geqslant b_0,\ b_1 \geqslant s_1 \geqslant a_1,\ a_2 \geqslant s_2 \geqslant b_2,\ \cdots$$

$$a_{2m-2} \geqslant s_{2m-2} \geqslant b_{2m-2},\ b_{2m-1} \geqslant s_{2m-1} \geqslant a_{2m-1}$$

的諸值

$$s_0,\ s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_{2m-1},$$

應當仍爲正數。

同樣的條件應當使得

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{k-1} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k-1} & a_k & \cdots & a_{2k-2} \end{vmatrix} \geqslant \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{k-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{k-1} & s_k & \cdots & s_{2k-2} \end{vmatrix} \geqslant \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{k-1} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_k \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k-1} & b_k & \cdots & b_{2k-2} \end{vmatrix}$$

與

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_k \\ b_2 & b_3 & \cdots & b_{k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_k & b_{k+1} & \cdots & b_{2k-1} \end{vmatrix} \geqslant \begin{vmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_k \\ s_2 & s_3 & \cdots & s_{k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_k & s_{k+1} & \cdots & s_{2k-1} \end{vmatrix} \geqslant \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_{k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_k & a_{k+1} & \cdots & a_{2k-1} \end{vmatrix}$$

$(k=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$”。

爲了給予與穩定問題相結合的這個定理的另一說法，我們引進一些概念與記法。

馬爾可夫參數 $s_0, s_1, \cdots, s_{2m-1}$（在 $n=2m$ 時）或 $s_{-1}, s_0, s_1, \cdots, s_{2m-1}$（在 $n=2m+1$ 時）將視爲 n 維空間的某一點 P 的坐標。在這一空間中以 G 記穩定性區域。區域 G 的特性爲不等式(115) 與 (116)所確定(§15 末尾)。

我們說，點 $P=\{s_i\}$ "前於"點 $P^*=\{s_i^*\}$，且寫爲 $P\prec P^*$，如果

$$\left.\begin{array}{l} s_0\leqslant s_0^*,\ s_1^*\leqslant s_1,\ s_2\leqslant s_2^*,\ s_3^*\leqslant s_3,\ \cdots,\ s_{2m-1}^*\leqslant s_{2m-1} \\ \text{且(當 } n=2m+1 \text{ 時)有} \\ s_{-1}\leqslant s_{-1}^* \end{array}\right\} \tag{130}$$

而且在這些關係式中至少有一個<號存在。

如果祇有關係式(130)而沒有最後的這句話，那末我們寫爲：

$$P\preceq P^*。$$

我們說點 Q 位於點 P 與 R "之間"，如果 $P\prec Q\prec R$。

每一個點 P 對應於一個 m 秩無限什凱達夫矩陣：$S=\|s_{i+k}\|_0^\infty$。我們記這個矩陣爲 S_P。

現在我們給予馬爾可夫定理以次之說法：

定理 21（馬爾可夫）. 如果兩點 P 與 R 位於穩定性區域 G 中，那末位於點 P 與 R 之間的任一點 Q 亦必位於區域 G 中，亦即

從 $P, R\in G$, $P\preceq Q\preceq R$ 得出：$Q\in G$。

證明 從 $P\preceq Q\preceq R$ 知道，可以聯兩點 P 與 R 以含有點 Q 的曲線線段

$$s_i=(-1)^i\varphi_i(t)\quad [\alpha\leqslant t\leqslant\gamma;\ i=0,1,\cdots,2m-1 \text{ 且(當 } n=2m+1 \text{ 時) } i=-1], \tag{131}$$

使得(1)函數 $\varphi_i(t)$，在 t 從 $t=\alpha$ 變到 $t=\gamma$ 時，是連續的，單調上昇的，且可微分的與(2)使得變數 t 的值 α, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$ 對應於曲線上的點 P, Q, R。

應用(131)的値組成 m 秩無限汗凱連夫矩陣 $S=S(t)=\|s_{i+k}\|_0^\infty$。討論這個矩陣的一個部分,是即長方矩陣

$$\left\|\begin{matrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{m-1} & s_m \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_m & s_{m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{m-1} & s_m & \cdots & s_{2m-2} & s_{2m-1} \end{matrix}\right\|。\tag{132}$$

根據定理的條件,當 $t=\alpha$ 與 $t=\gamma$ 時矩陣 $S(t)$ 有秩 m 是完全正的,故矩陣(132)的所有 $p=1, 2, \cdots, m$ 級子式都是正的。

我們來證明,這個性質對於任意中間値 $t\ (\alpha<t<\gamma)$ 仍然有效。

對於 $p=1$,這是很明顯的。假定他對於 $p-1$ 級子式成立,我們來證明這個論斷對於 p 級子式亦是對的。討論任何一個 p 級子式,他是爲矩陣(132)的部分行列所構成的:

$$D_p^{(q)}=\left|\begin{matrix} s_q & s_{q+1} & \cdots & s_{q+p-1} \\ s_{q+1} & s_{q+2} & \cdots & s_{q+p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{q+p-1} & s_{q+p} & \cdots & s_{q+2p-2} \end{matrix}\right| \quad [q=0,1,\cdots,2(m-p)+1]。\tag{133}$$

計算這個子式的導式

$$\frac{d}{dt}D_p^{(q)}=\sum_{i,k=0}^{p-1}\frac{\partial D_p^{(q)}}{\partial s_{q+i+k}}\frac{ds_{q+i+k}}{dt}。\tag{134}$$

$\frac{\partial D_p^{(q)}}{\partial s_{q+i+k}}\ (i, k=0, 1, \cdots, p-1)$ 是行列式(133)中元素的代數餘子式(餘因子)。因爲根據假設,這個行列式的所有子式都是正的,所以

$$(-1)^{i+k}\frac{\partial D_p^{(q)}}{\partial s_{q+i+k}}>0 \quad (i, k=0, 1, \cdots, p-1)。\tag{135}$$

另一方面,從(131)求得

$$(-1)^{q+i+k}\frac{ds_{q+i+k}}{dt}=\frac{d\varphi_{q+i+k}}{dt}\geqslant 0 \quad (i, k=0, 1, \cdots, p-1)。\tag{136}$$

從(134),(135)與(136)得出:

$$(-1)^q\frac{d}{dt}D_p^{(q)}\geqslant 0\quad\begin{pmatrix}q=0,1,\cdots,2(m-p)+1,\\ p=1,2,\cdots,m,\\ \alpha\leqslant t\leqslant\gamma\end{pmatrix}。\tag{137}$$

這樣一來，對於變數 t 從值 $t=\alpha$ 增加到值 $t=\gamma$ 時，每一個子式(133)對於偶數 q 是單調上昇的（更真確的說是不下降的）而對於奇數 q 是單調下降的（更真確的說是不上昇的），且因在 $t=\alpha$ 與 $t=\gamma$ 時這個子式是正的，所以對於任何中間值 $t\ (\alpha<t<\gamma)$ 他亦是正的。

因此，從矩陣(132)的 $p-1$ 級正子式與從其部分行列所構成的 p 級正子式得出，矩陣(132)的任何 p 級子式都是正的❶。

從所證明的結果，知道對於任何 $t\ (\alpha\leqslant t\leqslant\gamma)$，值 $s_0, s_1, \cdots, s_{2m-1}$ 與（在 $n=2m+1$ 時）s_{-1} 適合不等式(115)與(116)，亦即對於任何 t，這些值是某一個霍維茨多項式的馬爾可夫參數。換句話說，全部曲線(131)，因而，點 $\boldsymbol{Q}$ 位於穩定性區域 $\boldsymbol{G}$ 中。

定理已經完全證明。

註　因為已經證明，曲線(131)上每一點都屬於區域 $\boldsymbol{G}$，所以對於任何 $t\ (\alpha\leqslant t\leqslant\gamma)$，(131)諸值定出一個有秩 m 的完全正矩陣 $S(t)=\|s_{i+k}(t)\|_0^\infty$。故不等式(135)，因而(137)對於任何 $t\ (\alpha\leqslant t\leqslant\gamma)$ 都能成立，亦即在 t 增加時，$D_p^{(q)}$ 是增加的，如果 q 是一個偶數，而是減少的，如果 q 是一個奇數$[q=0, 1, \cdots, 2(m-p)+1; p=1, \cdots, m]$。換句話說，從 $\boldsymbol{P}\preceq\boldsymbol{Q}\preceq\boldsymbol{R}$ 得出：

$$(-1)^qD_p^{(q)}(\boldsymbol{P})\leqslant(-1)^qD_p^{(q)}(\boldsymbol{Q})\leqslant(-1)^qD_p^{(q)}(\boldsymbol{R})$$
$$[q=0, 1, \cdots, 2(m-p)+1; p=1, \cdots, m]。$$

這些不等式當 $q=0, 1$ 時給予馬爾可夫不等式[(130)式前面的兩個不等式]。

現在來討論本節開始所提出的切比雪夫–馬爾可夫定理。仍然引用阿.阿.馬爾可夫專著中的一段文字：❷

❶ 這可從費凱脫行列式恆等式來得出(參考[7]，306—307頁)。

❷ 參考[22]，103頁順數第5行以後。

關於根的定理。如果數

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2m-2},\ a_{2m-1},$$
$$s_0,\ s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_{2m-2},\ s_{2m-1},$$
$$b_0,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_{2m-2},\ b_{2m-1}$$

適合上述定理的所有條件，[1] 那末 m 次方程

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{m-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_m & x \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_{m+1} & x^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_m & a_{m+1} & \cdots & a_{2m-1} & x^m \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{m-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_m & x \\ s_2 & s_3 & \cdots & s_{m+1} & x^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_m & s_{m+1} & \cdots & s_{2m-1} & x^m \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-1} & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_m & x \\ b_2 & b_3 & \cdots & b_{m+1} & x^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_m & b_{m+1} & \cdots & b_{2m-1} & x^m \end{vmatrix}=0$$

對於未知量 x 沒有多重的，沒有虛的，亦沒有負的根。

而且第二個方程的根大於第一個方程的對應根而小於第三個方程的對應根"。

我們來闡明，這個定理與馬爾可夫參數空間中穩定性區域得出怎樣的關係。命 $f(z)=h(z^2)+zg(z^2)$ 與

$$h(-v)=c_0v^m+c_1v^{m-1}+\cdots+c_m\quad(c_0\neq 0),$$

我們從分解式(105)

[1] 是即上述馬爾可夫定理——關於行列式的定理(本節開始)。

$$R(v)=-\frac{g(-v)}{h(-v)}=-s_{-1}+\frac{s_0}{v}+\frac{s_1}{v^2}+\cdots$$

得出恆等式

$$-g(-v)=\left(-s_{-1}+\frac{s_0}{v}+\frac{s_1}{v^2}+\cdots\right)(c_0v^m+c_1v^{m-1}+\cdots+c_m)。$$

使冪次 v^{-1}, v^{-2}, …, v^{-m} 的係數等於零，我們求得：

$$\left.\begin{array}{l} s_0c_m+s_1c_{m-1}+\cdots+s_mc_0 \quad =0, \\ s_1c_m+s_2c_{m-1}+\cdots+s_{m+1}c_0 =0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_{m-1}c_m+s_mc_{m-1}+\cdots+s_{2m-1}c_0=0; \end{array}\right\} \tag{138}$$

再加上方程

$$h(-v)=0, \tag{139}$$

寫爲：

$$c_m+vc_{m-1}+\cdots+v^mc_0=0。 \tag{139'}$$

從(138)與(139')消去係數 c_0, c_1, …, c_m，我們表方程 (139) 爲次之形狀

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{m-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_m & v \\ s_2 & s_3 & \cdots & s_{m+1} & v^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_m & s_{m+1} & \cdots & s_{2m-1} & v^m \end{vmatrix}=0。 \tag{139''}$$

這樣一來，在切比雪夫-馬爾可夫定理中的一個代數方程與方程 (139) 重合，而對於值 s_0, s_1, …, s_{2m-1} 所要適合的不等式與在馬爾可夫參數空間中確定穩定性區域的不等式(115)相同。

切比雪夫-馬爾可夫定理說明，當馬爾可夫參數 s_0, s_1, …, s_{2m-1} 在穩定性區域中變動時，多項式 $h(z)$ 的對應的根 $u_1=-v_1, u_2=-v_2, \cdots, u_m=-v_m$ 是如何變動的。

定理的第一部分說明我們已知的事實：當不等式(115)成立時，多

項式 $h(u)$ 的全部根 $u_1, u_2, \cdots, u_m$ 都是負的單重實根❶。我們以

$$u_1(\boldsymbol{P}),\ u_2(\boldsymbol{P}),\ \cdots,\ u_m(\boldsymbol{P}),$$

來記這些根，其中 $\boldsymbol{P}$ 為區域 G 中的對應點。

那末切比雪夫-馬爾可夫定理的第二(基本)部分可以述為：

定理 22(切比雪夫-馬爾可夫). 如果 $\boldsymbol{P}$ 與 $\boldsymbol{Q}$ 是區域 G 中兩個點而且點 $\boldsymbol{P}$"前於"點 $\boldsymbol{Q}$,

$$\boldsymbol{P} \prec \boldsymbol{Q}, \tag{140}$$

那末

$$u_1(\boldsymbol{P}) < u_1(\boldsymbol{Q}),\ u_2(\boldsymbol{P}) < u_2(\boldsymbol{Q}),\ \cdots,\ u_m(\boldsymbol{P}) < u_m(\boldsymbol{Q}) \text{❷}。 \tag{141}$$

證明　多項式 $h(u)$ 的係數可以經參數 $s_0, s_1, \cdots, s_{2m-1}$ 有理表出。❸故由

$$h(u_i) \quad (i=1, 2, \cdots, m)$$

得出：❹

$$\frac{\partial h(u_i)}{\partial s_l} + h'(u_i)\frac{du_i}{ds_l} = 0 \quad (i=1,2,\cdots,m;\ l=0,1,\cdots,2m-1)。 \tag{142}$$

另一方面，對參數 s_l 逐項微分展開式

$$\frac{g(u)}{h(u)} = s_{-1} + \frac{s_0}{u} - \frac{s_1}{u^2} + \frac{s_2}{u^3} - \cdots,$$

我們有：

$$\frac{h(u)\dfrac{\partial g(u)}{\partial s_l} - g(u)\dfrac{\partial h(u)}{\partial s_l}}{h^2(u)} = \frac{(-1)^l}{u^{l+1}} + \frac{1}{u^{2m+1}}(*)。 \tag{143}$$

乘這一等式的兩節以多項式 $\dfrac{h^2(u)}{u-u_i}$ 且以 C_{il} 記這個多項式中乘冪 u^l 的

---

❶ 參考 §14 的定理 13。

❷ 換句話說，在 $s_0, s_2, \cdots, s_{2m-2}$ 增大而 $s_1, s_3, \cdots, s_{2m-1}$ 減少時，根 $u_1, u_2, \cdots, u_m$ 是增大的。

❸ 可從方程(138)得出，為了具體起見可以設 $c_0=1$。

❹ 此處 $\dfrac{\partial h(u_i)}{\partial s_l} = \left[\dfrac{\partial h(u)}{\partial s_l}\right]_{u=u_i}$。

係數，我們得出：

$$\frac{h(u)}{u-u_i}\frac{\partial g(u)}{\partial s_l}-\frac{g(u)\frac{\partial h(u)}{\partial s_l}}{u-u_i}=\frac{(-1)^l C_{il}}{u}+\cdots \tag{144}$$

在等式(144)中使左右兩節的 $\frac{1}{u}$ 的係數(剩餘)相等，我們求得：

$$(-1)^l g(u_i)\frac{\partial h(u_i)}{\partial s_l}=C_{il}, \tag{145}$$

與(142)相結合給出：

$$\frac{du_i}{ds_l}=\frac{(-1)^l C_{il}}{g(u_i)h'(u_i)}。$$

引進值

$$R_i=\frac{g(u_i)}{h'(u_i)}\quad(i=1,2,\cdots,m), \tag{146}$$

我們得出**切比雪夫-馬爾可夫公式**：

$$\frac{du_i}{ds_l}=\frac{(-1)^l C_{il}}{R_i[h'(u_i)]^2}\quad(i=1,2,\cdots,m;\ l=0,1,\cdots,2m-1)。 \tag{147}$$

但在穩定性區域中，值 $R_i(i=1,2,\cdots,m)$是正的[參考§14的(90′)]。對於係數 C_{il} 亦有同樣的說法。事實上，

$$\frac{h^2(u)}{u-u_i}=c_0^2(u+v_1)^2\cdots(u+v_{i-1})^2(u+v_i)(u+v_{i+1})^2\cdots(u+v_m)^2, \tag{148}$$

其中

$$v_i=-u_i>0\quad(i=1,2,\cdots,m)。$$

從(148)看到，在 $\frac{h^2(u)}{u-u_i}$ 的展開式中所有 u 的乘冪的係數 C_{il} 都是正的。這樣一來，從切比雪夫-馬爾可夫公式我們得出：

$$(-1)^l\frac{du_i}{ds_l}>0。 \tag{149}$$

在馬爾可夫定理的證明中我們已經證明，對區域 G 中任何兩點 $P\prec Q$ 可聯結以曲線弧 $s_l=(-1)^l\varphi_l(t)\ (l=0,1,\cdots,2m-1)$，其中 $\varphi_l(t)$ 爲 t 的可微分的單調上昇函數[t 在由 α 到 β 的範圍內變動($\alpha<\beta$)，而

且 $t=\alpha$ 對應於點 $\boldsymbol{P}$,而 $t=\beta$ 對應於點 $\boldsymbol{Q}$]。那末沿這條曲線由於(149)有：

$$\frac{du_i}{dt}=\sum_{l=0}^{2m-1}\frac{\partial u_i}{\partial s_l}\frac{ds_l}{dt}\geqslant 0,\ \frac{du_i}{dt}\neq 0(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)\text{❶}。\tag{150}$$

故在積分後,我們得出：

$$u_{i(t=\alpha)}=u_i(\boldsymbol{P})<u_{i(t=\beta)}=u_i(\boldsymbol{Q})\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)。$$

切比雪夫-馬爾可夫定理已經證明。

§18. 廣義的路斯-霍維茨問題

在這一節中,我們對於複係數多項式 $f(z)$,給予定出在右半平面中根的個數的規則。

設

$$f(iz)=b_0z^n+b_1z^{n-1}+\cdots+b_n+i(a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n),\tag{151}$$

其中 $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n,\ b_0,\ b_1,\ \cdots,\ b_n$ 都是實數。如果 n 是多項式 $f(z)$ 的次數,那末 $b_0+ia_0\neq 0$。對於普遍性並無損失的可以作爲 $a_0\neq 0$ [否則我們可以換多項式 $f(z)$ 爲 $if(z)$]。

我們假設實多項式

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n\ \text{與}\ b_0z^n+b_1z^{n-1}+\cdots+b_n\tag{152}$$

互質,亦即這兩個多項式的結式不等於零❷：

$$\nabla_{2n}=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n & 0 & \cdots & 0\\ b_0 & b_1 & \cdots & b_n & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_0 & \cdots & a_{n-1} & a_n & \cdots & 0\\ 0 & b_0 & \cdots & b_{n-1} & b_n & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}\neq 0。\tag{153}$$

---

❶ 因爲 $(-1)^l\frac{ds_l}{dt}=\frac{d\varphi_l}{dt}\geqslant 0(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$,而且至少對於一個 l 有値 t 存在,使得 $(-1)^l\frac{ds_l}{dt}>0$。

❷ ∇_{2n} 是一個 $2n$ 級行列式。

故知,特別的,多項式 (152) 沒有公共的實根,因而多項式 $f(z)$ 沒有根在虛軸上。

以 k 記 $f(z)$ 的有正實數部分的根的個數。考慮右半平面中為虛軸與半徑為 R $(R\to\infty)$ 的半圓周所圍成的區域,逐字重復本章 §3 中對於實多項式 $f(z)$ 所述的推理,我們得出 $\arg f(z)$ 沿虛軸所得的增量公式

$$\Delta_{-\infty}^{+\infty} \arg f(z) = (n-2k)\pi。\tag{154}$$

故由(151)與條件 $a_0 \neq 0$ 我們得出:

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n} = n - 2k。\tag{155}$$

故應用 §11 的定理 10,我們得出

$$k = V(1, \nabla_2, \nabla_4, \cdots, \nabla_{2n})。\tag{156}$$

其中

$$\nabla_{2p} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{2p-1} \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{2p-1} \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{2p-2} \\ 0 & b_0 & \cdots & b_{2p-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} (p=1,2,\cdots,n;\ \text{在 } k>n \text{ 時 } a_k = b_k = 0)。\tag{157}$$

我們得到了次之定理:

定理 23. 如果給予一個複多項式 $f(z)$,可寫為

$$f(iz) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n + i(a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n) \quad (a_0 \neq 0),$$

而且多項式 $a_0 z^n + \cdots + a_n$ 與 $b_0 z^n + \cdots + b_n$ 互質($\nabla_{2n} \neq 0$),那末多項式 $f(z)$ 位於右半平面的根的個數為公式(156)與(157)所定出。

再者,如果在 (157) 中有行列式等於零,那末對於每一羣相鄰的零行列式

$$(\nabla_{2h} \neq 0)\, \nabla_{2h+2} = \cdots = \nabla_{2h+2p} = 0\, (\nabla_{2h+2p+2} \neq 0) \tag{158}$$

在計算 $V(1, \nabla_2, \nabla_4, \cdots, \nabla_{2n})$ 時,要取

$$\operatorname{sign}\nabla_{2h+2j}=(-1)^{\frac{j(j-1)}{2}}\operatorname{sign}\nabla_{2h}\quad(j=1,2,\cdots,p),\qquad(159)$$

或者，同樣的，有：

$$V(\nabla_{2h},\ \nabla_{2h+2},\ \cdots,\ \nabla_{2h+2p},\ \nabla_{2h+2p+2})=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{p+1}{2} & \text{如其 } p \text{ 是一個奇數,}\\ \dfrac{p+1-\varepsilon}{2} & \text{如其 } p \text{ 是一個偶數,}\ \varepsilon=(-1)^{\frac{p}{2}}\operatorname{sign}\dfrac{\nabla_{2h+2p+2}}{\nabla_{2h}}。\end{cases}\qquad(160)$$

讓讀者自己驗證，在特殊情形，當 $f(z)$ 是一個實多項式時，由定理 23 可以得出路斯-霍維茨定理（參考 § 6）❶。

在結束時，我們注意在這一章中所討論的是應用二次型（特別是甘凱速夫型）於多項式在複平面上根的一個分佈問題，應用於路斯-霍維茨問題。在二次型與安密達型中還有有趣味的應用，應用於其他的根的分佈問題。對於這些問題有興趣的讀者，我們推薦曾經引到過的蒙.格.克萊因與蒙.阿.年伊馬爾克的著作"對稱型與安密達型方法在代數方程根的分離問題中的應用"赫力可夫，1936。

❶ 對於廣義的路斯-霍維茨問題的方便的計算法可以在專著 [24] 與論文 [23] 中找到。還可參考 [32]。